

تأثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنروپی توزیع توأم ماکسیمم آنروپی

شهرام منصوری^۱، عین اله پاشا^۲
مرکز علوم پایه، دانشگاه صنعت آب و برق (عباسپور)
^۲گروه ریاضی، دانشگاه تربیت معلم

چکیده: در این مقاله روشی برای بدست آوردن تابع توزیع احتمال توأم دو متغیره به طور تصادفی مرتب شده با معلوم بودن توزیع‌های حاشیه‌ای و ضریب همبستگی ارائه شده و نحوه اجرای آن در مثالی توضیح داده شده است. سپس به محاسبه میزان کاهش آنروپی توزیع احتمال توأم ماکسیمم آنروپی با حاشیه‌ای‌های معین، وقتی قید ضریب همبستگی نیز لحاظ گردد، پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: متغیرهای به طور تصادفی مرتب شده، اصل ماکسیمم آنروپی، فاصله کولبک لیلر.

۱ مقدمه

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع چگالی احتمال $G(x)$ و $H(y)$ باشند، گوییم X و Y متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده هستند، هرگاه $X \leq Y$ a.s. باشد، در این صورت به ازای هر z ، $G(z) \leq H(z)$ می‌دانیم توابع چگالی احتمال توأم مختلفی می‌توانند دارای توزیع‌های احتمال حاشیه‌ای مشابهی باشند. در این مقاله با رهیافت اصل ماکسیمم آنروپی، توزیع توأم معین می‌شود. تابع توزیع ماکسیمم آنروپی یک متغیره و چند متغیره تحت برخی قیود توسط بسیاری از محققان مانند جینز (۱۹۶۸) و کاپور (۱۹۸۹) مورد مطالعه قرار گرفته است.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: شهرام منصوری، mansoury456@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲B۱۰

۲ تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

میویسین و همکاران (۱۹۹۳a) توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی با حاشیه‌ای‌های معلوم و ضریب همبستگی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین میویسین و همکاران (۱۹۹۳b) و (۱۹۹۴) تاثیر استقلال متغیرهای تصادفی را روی عدم حتمیت مطالعه کردند. میویسین و همکاران (۱۹۹۵) با شرط رتبه همبستگی، توزیع با حداقل اطلاع را برای استفاده در تحلیل عدم قطعیت بکار بردند. منصوروی و همکاران (۲۰۰۵)، یک فرم کلی برای تابع توزیع احتمال چند متغیره ماکسیمم آنتروپی بیزی را با شرط معلوم بودن توابع چگالی حاشیه‌ای و ماتریس کوواریانس متغیرهای تصادفی ارائه کردند. توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی برای متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده توسط استراسن (۱۹۶۵) و کامایی و همکاران (۱۹۷۷) مورد مطالعه قرار گرفته است. کیفیر (۲۰۰۹)، روشی برای به دست آوردن توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی برای داده‌های بطور تصادفی مرتب شده ارائه داد. در بخش ۲ این مقاله با روشی دیگر به همان نتایج کیفیر (۲۰۰۹)، می‌رسیم و با مثالی روش ارائه شده توضیح داده می‌شود. در بخش ۳ آنتروپی توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی مقایسه می‌شوند. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۴ بیان خواهد شد.

۲ توزیع توأم احتمال ماکسیمم آنتروپی دو متغیره به طور تصادفی مرتب شده

در این بخش نتایج لازم برای تعیین تابع توزیع احتمال ماکسیمم آنتروپی بیان می‌شود.

قضیه ۱: (منصوروی و همکاران ۲۰۰۵) اگر L^2 مجموعه توابع اندازه پذیر باشد که مربع آن‌ها انتگرال پذیر است، آنگاه برای هر دو تابع h_1 و h_2 در L^2 ، $h_1 \stackrel{a.s.}{=} h_2$ است اگر و تنها اگر برای هر تابع دلخواه K تساوی

$$\int_R K(x)h_1(x)dx = \int_R K(x)h_2(x)dx \quad (1)$$

برقرار باشد.

تعریف ۱: با معیار شانون آنتروپی دو متغیر تصادفی پیوسته (X, Y) با تابع چگالی احتمال $f(x, y)$ که با نماد $H(X, Y)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$H(X, Y) = E(-\ln f(X, Y)) = - \int \int_{R^2} f(x, y)(\ln f(x, y))dxdy. \quad (2)$$

تعریف شده است.

ش. منصوری، ع. پاشا ۳

تعریف ۲ : فاصله کولبک لیبلر اندازه‌ای است که فاصله بین دو توزیع را تعیین می‌کند. برای دو تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x)$ و $g(x)$ این فاصله به صورت

$$D(f \parallel g) = E_f \ln \frac{f(X)}{g(X)}$$

تعریف می‌شود. بدیهی است که اگر $f = g$ ، آنگاه $D(f \parallel g) = 0$.

قضیه ۲ : اگر $h \in L^2$ ، g توابع چگالی حاشیه‌ای یک کلاس از توزیع احتمال توأم دو متغیر بطور تصادفی مرتب شده بصورت $a.s. X \leq Y$ باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی بطور یکتا دارای فرم کلی

$$f_M(x, y) = f_1(x)f_2(y)I(x \leq y) \quad (3)$$

است، که در آن f_1 و f_2 از حل دستگاه معادلات تابعی

$$\begin{cases} \int_R f_1(x)f_2(y)I(x \leq y)dy = g(x) \\ \int_R f_1(x)f_2(y)I(x \leq y)dx = h(y) \end{cases} \quad (4)$$

به دست می‌آیند.

برهان چون توابع چگالی حاشیه‌ای $f(x, y)$ معلوم هستند بنابراین برای توابع دلخواه M و N میانگین‌های

$$\mu_1 = E(M(X)), \quad \mu_2 = E(N(Y)) \quad (5)$$

معلوم خواهند بود. با توجه به قضیه ۱ معلوم بودن h و g معادل معلوم بودن $E(M(X))$ و $E(N(Y))$ است. لذا برای تعیین تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی تحت شرایط (۵) باید (۲) ماکسیمم گردد. حال با استفاده از روش اویلر-لاگرانژ (کاپور، ۱۹۸۹)، لاگرانژین به صورت

$$\begin{aligned} L &= \int \int_{R^2} f(-\ln f)dx dy + \lambda_1 \left(\int \int_{R^2} M(x)f dx dy - \mu_1 \right) \\ &+ \lambda_2 \left(\int \int_{R^2} N(y)f dx dy - \mu_2 \right) \\ &= \int \int_{R^2} \{-f \ln f + (\lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y))f\} dx dy - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2. \end{aligned}$$

است. چون $f(-\ln f + (\lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)))f$ تابعی مقعر و پیوسته بر حسب f است جواب بهینه، بطور یکتا آنتروپی را ماکسیمم می‌کند. لذا تابع چگالی احتمال

۴ تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

ماکسیمم آنتروپی جواب معادله

$$\frac{\partial}{\partial f} \{-f \ln f + (\lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y))f\} = 0$$

است. بنابراین

$$f_M(x, y) = e^{\lambda_1 M(x)} e^{\lambda_2 N(y)} I(x \leq y)$$

واضح است که f_M حاصل ضرب دو تابع بر حسب x و y به صورت

$$f_M(x, y) = f_1(x) f_2(y) I(x \leq y)$$

است. از آنجا که h و g توابع چگالی حاشیه‌ای هستند، f_1 و f_2 از (۴) قابل حصول می‌باشند.

قضیه ۳: اگر $h \in L^2$ و g توابع چگالی حاشیه‌ای یک کلاس از توزیع احتمال توأم دو متغیر بطور تصادفی مرتب شده بصورت $X \leq Y$ *a.s.* و با ضریب همبستگی ρ باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی بطور یکتا دارای فرم کلی

$$f_M(x, y) = f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y),$$

است، که در آن λ ، f_1 و f_2 از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \int_R f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y) dy = g(x) \\ \int_R f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y) dx = h(y) \\ \int \int_{R^2} xy f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y) dx dy = \rho \sigma_X \sigma_Y + \mu_X \mu_Y \end{cases} \quad (6)$$

به دست می‌آیند.

پرهان چون توابع چگالی حاشیه‌ای $f(x, y)$ معلوم هستند، پس برای توابع دلخواه M و N میانگین‌های

$$\mu_1 = E(M(X)), \quad \mu_2 = E(N(Y)) \quad (7)$$

نیز معلوم هستند. با توجه به قضیه ۱، معلوم بودن h و g معادل معلوم بودن $E(M(X))$ و $E(N(Y))$ است. چون ضریب همبستگی مقدار معلوم ρ است. بنابراین این عبارت

$$EXY = \rho \sigma_X \sigma_Y + \mu_X \mu_Y = C \quad (8)$$

ش. منصوری، ع. پاشا ۵

معلوم می‌باشد. حال برای تعیین تابع چگالی احتمال ماکسیمم آن‌تروپی تحت شرایط (۷) و (۸) باید (۲) ماکسیمم گردد. با استفاده از روش اویلر-لاگرانژ، لاگرانژین به صورت

$$\begin{aligned} L &= \int \int_{R^2} f(-\ln f) dx dy + \lambda \left(\int \int_{R^2} xy f dx dy - C \right) \\ &+ \lambda_1 \left(\int \int_{R^2} M(x) f dx dy - \mu_1 \right) + \lambda_2 \left(\int \int_{R^2} N(y) f dx dy - \mu_2 \right) \\ &= \int \int_{R^2} \{-f \ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)) f\} dx dy \\ &- (\lambda C + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2). \end{aligned}$$

است. حال چون $f(-\ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)))$ تابعی مقعر و پیوسته بر حسب f است جواب بهینه، بطور یکتا آن‌تروپی را ماکسیمم می‌کند. لذا تابع چگالی احتمال ماکسیمم آن‌تروپی جواب معادله

$$\frac{\partial}{\partial f} \{-f \ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)) f\} = 0,$$

است. بنابراین

$$f_M(x, y) = e^{\lambda_1 M(x)} e^{\lambda_2 N(y)} e^{\lambda xy}, \quad x \leq y.$$

در نتیجه فرم تابع چگالی احتمال ماکسیمم آن‌تروپی به صورت

$$f_M(x, y) = f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y)$$

است. از آنجایی که توابع چگالی حاشیه‌ای و ضریب همبستگی معلوم هستند بدیهی است که f_1, λ و f_2 از (۶) قابل حصول می‌باشند.

مثال ۱: فرض کنیم X و Y متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده، به صورت $Y \leq X$ *a.s.* باشند و بترتیب دارای توزیع‌های بتای $B(3, 3)$ و $B(1, 3)$ باشند، در این صورت فرم تابع چگالی احتمال توأم (X, Y) به صورت

$$f_M(x, y) = f_1(x) f_2(y) I(0 \leq y \leq x \leq 1)$$

است لذا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای به صورت

$$\begin{cases} g(x) = \int_R f_M(x, y) dy = \int_0^x f_1(x) f_2(y) dy \\ h(y) = \int_R f_M(x, y) dx = \int_y^1 f_1(x) f_2(y) dx \end{cases}$$

۶ تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

هستند. از طرفی با توجه به مفروضات مثال توابع چگالی احتمال به صورت

$$g(x) = 3 \cdot x^2(1-x)^2, \quad 0 < x < 1; \quad h(y) = 3(1-y)^2, \quad 0 < y < 1$$

هستند، لذا

$$\begin{cases} 3 \cdot x^2(1-x)^2 = f_1(x) \int_0^x f_2(y) dy \\ 3(1-y)^2 = f_2(y) \int_y^1 f_1(x) dx \end{cases}$$

با تعریف $A(x) = \int_0^x f_2(y) dy$ و $B(y) = \int_y^1 f_1(x) dx$ داریم

$$\begin{cases} A(x)B'(x) = -3 \cdot x^2(1-x)^2 \\ A'(x)B(x) = 3(1-x)^2 \end{cases} \quad (9)$$

که در آن $A'(x)$ و $B'(x)$ به ترتیب مشتق‌های $A(x)$ و $B(x)$ نسبت به x

هستند. در نتیجه $[A(x)B(x)]' = -3 \cdot x^2(1-x)^2 + 3(1-x)^2$ و از آنجا

$$A(x)B(x) = -6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x \quad (10)$$

از (9) و (10) نتیجه می‌شود

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{3(1-x)^2}{-6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x}$$

پس از انتگرال گیری داریم

$$\ln A(x) = -\frac{1}{3} \ln(x-1) + \ln x - \frac{2}{3} \ln(2x+1) + C_1$$

بنا بر این

$$A(x) = C_1 \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

به طور مشابه از (9) و (10) نتیجه می‌شود

$$\frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{3 \cdot x^2(1-x)^2}{-6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x}$$

پس از اندکی محاسبات داریم $B(x) = C_2(1-x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}$ حال مشتق‌های

$A(x)$ و $B(x)$ را عبارتند از

$$A'(x) = C_1 \frac{-1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}}, \quad B'(x) = 1 \cdot C_2 x(1-x)^{\frac{2}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}$$

ش. منصوری، ع. پاشا ۷

لذا تابع چگالی احتمال توأم (X, Y) به صورت

$$\begin{aligned} f_M(x, y) &= f_1(x)f_2(y)I(0 \leq y \leq x \leq 1) \\ &= -A'(y)B'(x)I(0 \leq y \leq x \leq 1) \\ &= C \frac{x(1-x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}}(2y+1)^{\frac{1}{2}}} I(0 \leq y \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

به دست می‌آید. از آنجا که f_M یک تابع چگالی احتمال توأم است $\int \int_{R^2} f_M(x, y) dx dy = 1$ و از آن $C = 1/91$ به دست می‌آید. بنابراین

$$f_M(x, y) = 1/91 \frac{x(1-x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(1-y)^{\frac{1}{2}}(2y+1)^{\frac{1}{2}}} I(0 \leq y \leq x \leq 1)$$

۳ مقایسه آنروپی توزیع‌های ماکسیم آنروپی تحت قیود مختلف

فرض کنید $E = (x_1 \dots x_n)' \in E$ یک ناحیه محدب R^n باشد و \mathcal{F}_1 را مجموعه توابع چگالی (جرم) احتمال توأم بردار تصادفی $X = (X_1, \dots, X_n)'$ تعریف شود که دارای محمل E هستند و دارای توابع چگالی (جرم) احتمال حاشیه‌ای $g_i, i = 1, \dots, n$ باشند. یعنی:

$$\mathcal{F}_1 = \{f : E \rightarrow R^+ \mid \text{جرم احتمال } f \text{ هستند. } i = 1, \dots, n\}$$

فرض کنید $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$ مجموعه توابع چگالی (جرم) احتمال توأم در \mathcal{F}_1 باشند که ماتریس کوواریانس آن Σ باشد، یعنی

$$\mathcal{F}_2 = \{f \mid f \in \mathcal{F}_1; \text{Cov}(X) = \Sigma\}$$

تعیین توابع چگالی (جرم) احتمال ماکسیم آنروپی روی \mathcal{F}_1 و \mathcal{F}_2 با معیار شانون به صورت

$$f(x) = \arg \max_{f \in \mathcal{F}_1} H(f)I(x \in E),$$

$$k(x) = \arg \max_{f \in \mathcal{F}_2} H(f)I(x \in E).$$

مورد نظراست.

۸ تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

قضیه ۴ تابع چگالی (جرم) احتمال توأم ماکسیمم آنتروپی روی مجموعه \mathcal{F}_1 به صورت

$$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) I(x \in E)$$

است، که در آن f_1, \dots, f_n از حل دستگاه معادلات تابعی

$$\int_E f(x) dx_{-i} = g_i(x_i); \quad i = 1, \dots, n$$

به دست می آید، که در آن $dx_{-i} = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$ است. برهان با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت به عنوان توزیع پیشین این حکم، نتیجه قضیه ۱ در مرجع ۵ است.

قضیه ۵ : تابع چگالی احتمال (تابع احتمال) توأم چند متغیره ماکسیمم آنتروپی روی مجموعه \mathcal{F}_2 به صورت

$$k(x) = \prod_{i=1}^n k_i(x_i) e^{(x-\mu)' \Lambda (x-\mu)} I(x \in E)$$

است، که در آن ها $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ، $\mu_i = EX_i$ است و $f_i, i = 1, \dots, n$ و $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{m,n}$ از حل دستگاه معادله های حاصل از توزیع های حاشیه ای و ماتریس و واریانس کوواریانس به دست می آید.

برهان با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت به عنوان توزیع پیشین این حکم، نتیجه قضیه ۲ در مرجع ۵ است.

می دانیم با افزایش اطلاعات مقدار آنتروپی کاهش پیدا می کند. بنابراین انتظار می رود با افزایش تعداد قیود آنتروپی کاهش یابد. در این بخش ثابت می شود، میزان کاهش آنتروپی تابع چگالی (تابع احتمال) توأم بدست آمده در قضیه ۵ نسبت به تابع چگالی (جرم) احتمال توأم در قضیه ۴ برابر فاصله کولبک k نسبت به f است. به عبارت دیگر قضیه زیر را داریم

قضیه ۶ : با مفروضات قضیه های ۴ و ۵ داریم $D(k||f) = H(f) - H(k)$ و $H(f) \geq H(k)$

برهان چون توابع چگالی احتمال توأم $f(x_1, \dots, x_n)$ و $k(x_1, \dots, x_n)$ دارای توابع چگالی احتمال حاشیه ای یکسان $g(x_1), \dots, g(x_n)$ می باشد، به ازای هر

ش. منصورى، ع. پاشا ۹

داريم: $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(x_1, \dots, x_n) \ln f_i(x_i) dx &= E_f(\ln f_i(X_i)) \\ &= E_{g_i}(\ln f_i(X_i)) \\ &= E_k(\ln f_i(X_i)) \\ &= \int_{R^n} k(x_1, \dots, x_n) \ln f_i(x_i) dx. \quad (11) \end{aligned}$$

با استفاده از تعريف ۱ داريم

$$\begin{aligned} H(f) - H(k) &= \int_{R^n} k \ln k dx - \int_{R^n} f \ln f dx \\ &= \int_{R^n} k \ln k dx - \int_{R^n} f \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i) dx \\ &= \int_{R^n} k \ln k dx - \sum_{i=1}^n \int_{R^n} f \ln f_i(x_i) dx, \quad (12) \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در (۱۲) داريم:

$$\begin{aligned} H(f) - H(k) &= \int_{R^n} k \ln k dx - \sum_{i=1}^n \int_{R^n} k \ln f_i(x_i) dx \\ &= \int_{R^n} k \ln k dx - \int_{R^n} k \ln f dx \\ &= \int_{R^n} k \ln \frac{k}{f} dx = D(k \| f) \end{aligned}$$

بنابراين

$$H(f) - H(k) = D(k \| f)$$

چون $D(k \| f) \geq 0$ است نتيجه مي گيريم: $H(f) \geq H(k)$

۴ بحث و نتيجه گيري

روش هاي معمول براي تعيين توزيع هاي ماكسيمم آنتروپي يك متغيره و چند متغيره تحت قيود معين براي توزيع هاي چند متغيره با توزيع هاي حاشيه اي و ضريب

۱۰..... تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

همبستگی معین بین متغیرها از طریق اندازه آنتروپی شانون تعمیم داده شده است. فرض کنید $f(x_1, \dots, x_n)$ توابع چگالی یا جرم احتمال توأم ماکسیمم آنتروپی با اندازه شانون باشد، در این صورت
الف- اگر فقط توزیع حاشیه‌ای X_1 معلوم باشد، آنگاه

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)I((x_1, \dots, x_n) \in E)$$

ب- اگر توزیع‌های حاشیه‌ای X_1 و X_2 معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)I((x_1, \dots, x_n) \in E)$$

ج- اگر تمام توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)I((x_1, \dots, x_n) \in E)$$

د- اگر توزیع حاشیه‌ای X_1 و X_2 و ضریب همبستگی بین آنها معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)e^{\lambda_1 x_1 x_2}I((x_1, \dots, x_n) \in E)$$

ه- اگر توزیع‌های حاشیه‌ای X_1, \dots, X_n و ضریب همبستگی بین هر دو متغیر معلوم باشد، آنگاه

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \exp\left\{\sum_{i < j} \lambda_{i,j} x_i x_j\right\}I((x_1, \dots, x_n) \in E)$$

که در آنها توابع f_1, \dots, f_n و ثابت‌های $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای تعیین می‌گردند. همچنین ثابت شد در توزیع‌های دو متغیره اگر علاوه بر توزیع‌های حاشیه‌ای نیز ضریب همبستگی به قیود اضافه شود میزان کاهش آنتروپی برابر فاصله کولبک لیبیلر آن دو تابع (چگالی) احتمال آنها است. از مواردی که نیاز به مطالعه بیشتر دارد، تعیین حداقل و حداکثر ضریب همبستگی بین هر دو متغیر تصادفی در یک محمل معین برای توزیع احتمال بدست آمده در قضیه ۴ می‌باشد. همچنین تعیین توابع توزیع ماکسیمم آنتروپی با استفاده از سایر اندازه‌های آنتروپی مانند اندازه رنی، کاپور و ... از مواردی هستند که نیاز به تحقیقات بعدی دارند.

مراجع

Jaynes, E. T. (1968), Prior Probabilities. *IEEE Transaction* 4, 227-248

ش. منصورى، ع. پاشا ۱۱

Kamae, T., U. Krengel, and G. L. O'Brien (1977), Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces, *The Annals of Probability*, **5**, 899-912.

Kapur, J. N. (1989), Maximum Entropy Models in Science and Engineering. *Willey eastern limited, India*.

Strassen, V. (1965), The Existence of Probability Measures with Given Marginals, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 423-439.

Meeuwissen, M. H. (1993a). Probability Distributions with Given Marginals and Given Correlation that Have Maximum Entropy. *Report 93-81, The Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delf, The Netherland*.

Meeuwissen, M. H. (1993b), Dependent Random Variables in Uncertainty Analysis *PhD Thesis, The faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delf, The Netherland*

Meeuwissen, M. H. (1994), Tree Dependent Random Variables *Report 94-28, TWI, Delf, The Netherland*

Meeuwissen, M. H. and Bedford, T. (1995), Minimally Informative Distributions with Given Rank Correlation for Use in Uncertainty Analysis *Report 95-135, The faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delf, The Netherland*

Mansoury, S. Pasha, E. and Mohammadzadeh M. (2005), Determination of Maximum Bayesian Entropy Probability Distribution *Journal of Sciences Islamic Republic of Iran* **16**, 339-345

Kiefer, N. (2009), The Maximum Entropy Distribution for Stochastically Ordered Random Variables with Fixed Marginals *Internet. Cornell University Departments of Economics and Statistical Sciences, Working Paper*, 09-01.

The Effect of Correlation on the Change of Entropy of the Maximum Entropy joint Distribution

Mansoury, S. and Pasha, E.

Abbaspour University of Technology, Tehran, Iran.

Tarbiat Moallem University, Tehran, Iran.

Abstract: Stochastically ordered random variables with given marginal distributions are combined into a joint distribution preserving the ordering and the marginals using a maximum entropy principle. A closed-form of the maximum entropy density function is obtained. Next we have compared the entropies of maximum entropy distributions, under two constraints The constraints are either prescription of marginal distributions and the marginals and covariance matrix

Keywords: Stochastically ordered random variables, Maximum entropy principle , Kullback Liebler distance.

Mathematics Subject Classification (2000): 62B10