مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶

جلد ۱، شماره ۲، ص ۱۲۱-۱۳۷

برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی

محمدرضا فریدروحانی، خلیل شفیعی هولیقی

گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۱۰/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۲/۲۶

چکیده : تا کنون مسئلهٔ آشکارسازی سیگنال با استفاده از نظریهٔ میدان‌های تصادفی توسط گروهی از آمارشناسان مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله برآورد نقطه‌ای پارامترهای سیگنال یک میدان تصادفی گاوسی فضای مقیاس به روش بیزی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به پیچیدگی توزیع پسین پارامترهای این مدل و عدم وجود فرم بسته برای آن، با استفاده از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC)، برآوردهای مذکور را تقریب کرده‌ایم. درنهایت از روش پیشنهادی برای تحلیل داده‌های fMRI حاصل از یک مطالعه واقعی در موسسهٔ عصب شناسی مونترآل کانادا استفاده کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی : میدان تصادفی، میدان گاوسی فضای مقیاس، مشتق رادن-نیکودیم، روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی(MCMC).

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمدرضا فریدروحانی، m_faridrohani@sbu.ac.ir

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

۱ مقدمه

تصویربرداری تشدید مغناطیسی (MRI) روشی است، که درآن از امواج رادیویی و یک میدان مغناطیسی بسیارقوی به‌جای اشعهٔ X به‌منظور تصویربرداری از داخل اندامهای انسانی استفاده می‌شود. تکنیک مزبور در تصویربرداری از مغز به عصب شناسان کمک می‌کند تا نواحی سفید و خاکستری مغز را از یکدیگر تشخیص داده و به علاوه بتوانند نواحی آسیب دیده مغز که به سبب عواملی همچون وجود تومور و نظایر آن رخ می‌دهند را بر اساس تعداد زیادی تصویر در یک بازهٔ زمانی کوتاه شناسایی کنند. با بهره‌گیری از قابلیت‌های تصویربرداری تشدید مغناطیسی می‌توان نسبت به اندازه‌گیری تغییرات متابولیک در نواحی فعال مغز که ناشی از اعمال یک تحریک خاص می‌باشد اقدام نمود. بکارگیری تصویربرداری تشدید مغناطیسی به هدف شناسایی نواحی فعال مغز به تصویربرداری تشدید مغناطیسی عملکردی (fMRI) موسوم است. متذکر می‌گردد علیرغم آنکه نواحی عمومی مرتبط با فعالیت‌هایی نظیر صحبت کردن، چشیدن، حفظ کردن و موارد دیگر در مغز انسان مشخص است، مکان دقیق این فعالیت‌ها از فردی به فرد دیگر متغیر است. علاوه بر این آسیب‌ها، ضربه‌های مغزی و نیز وجود تومورها باعث جابجایی محل یک فعالیت خاص می‌گردد، بطوریکه درمان چنین آسیب‌هایی مستلزم شناسایی مکان دقیق اینگونه فعالیت‌ها می باشد.

درسال ۱۹۹۱ نخستین آزمایش بااستفاده از تصاویر تشدید مغناطیسی جهت مطالعهٔ فعالیت های مغز انجام پذیرفت. درآزمایشی مشابه در موسسهٔ عصب شناسی مونترآل کانادا، یک آزمودنی تحت محرک بینایی ساده‌ای قرارگرفت که طی آن محرک‌هادر ۴ اسکن در وضعیت خاموش و در ۴ اسکن در وضعیت روشن قرارداشتند. عملیات فوق برای ۵ بار تکرار و نهایتاً ۴۰ اسکن از مغز فرد مورد نظر بدست آمده است. فاصله بین اسکن‌ها ۶ ثانیه و دورهٔ کل اعمال محرک‌ها ۴۸ ثانیه بوده‌است. داده‌های مطالعهٔ مزبور یک سری زمانی متشکل از۴۰ تصویر ۱۲۸×۱۲۸ پیکسل را تشکیل می‌دهند.

هدف مهم از تحلیل تصاویر حاصله از fMRI مکان‌یابی ناحیه‌ای از مغز است که

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

فعالیت ناشی از اعمال محرک خاصی در آن بروز یافته‌است. از نقطه نظر پردازش سیگنال، این ناحیه‌ای است که درآن سیگنال مشاهده می‌شود. بدین طریق می‌توان نواحی غیرفعال (نوفهٔ سفید) را از نواحی فعال تشخیص داد. معمولاً پاسخ مورد ارزیابی در زمان t و مکان s در قالب یک فرایند مکانی-زمانی و به صورت مجموع دو مولفهٔ سیگنال ونوفهٔ سفید مدل‌بندی می‌گردد. بسته به هدف از تحقیق، مدل بندی‌های مختلفی برای تحلیل آماری داده‌های fMRI توسط آمارشناسان مورد توجه قرار گرفته‌است. فریستون و همکاران (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵)، ورسلی و فریستون (۱۹۹۵) مولفهٔ سیگنال در مکان t را به صورت پیچش $h(t)$ با تابع پاسخ هموداینامیک مدل‌بندی نمودند. این در حالی است که ورسلی و همکاران (۱۹۹۲)، ورسلی (۱۹۹۴) از مدل‌بندی مبتنی بر نظریهٔ میدانهای تصادفی استفاده و تصاویر fMRI را به عنوان تحققی از یک میدان تصادفی گاوسی در نظر گرفتند. شفیعی (۱۹۹۸) و ورسلی (۲۰۰۱) نشان دادند که بیشتر ویژگی‌های سیگنال در مؤلفهٔ کسینوس آن بروز یافته که این مولفه نیز تقریباً یک میدان تصادفی گاوسی می‌باشد. براساس روش پیشنهادی ورسلی، مؤلفهٔ زمان در سری زمانی یاد شده حذف و براساس یک تصویر که به نوعی تلخیصی از این سری زمانی است، اقدام به شناسایی مکان سیگنال احتمالی می‌شود. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۷) بر این اساس نشان دادند که برای آشکارسازی سیگنالی با شکل تابعی گاوسی که مکان و مقیاس آن نامعلوم است، آمارهٔ نسبت درستنمایی برای آزمون فرض عدم وجود سیگنال، معادل ماکزیمم کلی میدان تصادفی در ناحیهٔ جستجو است. اما از آنجا که توزیع دقیق این آماره شناخته شده نیست، برای محاسبهٔ p-مقدار، صرفاً می‌توان براساس امید ریاضی تابع مشخصهٔ اویلر، آنرا تقریب نمود. مسئلهٔ آشکارسازی سیگنال از منظر بیزی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. جنوویس (۲۰۰۰) و گوسل و همکاران (۲۰۰۱) با فرض استقلال زمانی- مکانی نوفه در مکان t به مدل‌بندی بیزی سیگنال پرداختند. جنوویس با برازش یک سیگنال پارامتری زمان-وابسته به مشاهدات، مدل‌بندی بیز را برای ارزیابی یکنوایی سیگنال در طی زمان بکاربرده است. این در حالی است که روش گوسل و همکاران او مبتنی بر مدل‌بندی بیزی پاسخ‌های هموداینامیک درمکان t بوده است. فریستون (۲۰۰۲)، فریستون و پنی (۲۰۰۲) و

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

پنی و همکاران (۲۰۰۳) ازطریق مدل‌بندی خطی سلسله مراتبی زمانی یک روش بیز تجربی را برای تحلیل تصاویر fMRI معرفی نموده‌اند. وول‌ریچ و همکاران (۲۰۰۴) نیز نوفهٔ زمانی–مکانی و مدل بندی تابع پاسخ همودینامیک را درقالب رهیافتی بیزی مورد مطالعه و بررسی قراردادهاند. فریدروحانی و همکاران (۲۰۰۶) نیز روش بیزی را برای آشکارسازی سیگنال در یک میدان گاوسی فضای مقیاس معرفی و در یک مسئلهٔ واقعی بکاربرده‌اند. یاد آور می شود، از نقطه نظر آماری آشکارسازی سیگنال معادل مسئلهٔ آزمون فرض آماری وجود سیگنال است.

در این مقاله با استفاده از مفاهیم ارائه شده در مقالهٔ فرید روحانی و همکاران (۲۰۰۶)، به برآورد نقطه‌ای بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی براساس توزیع پسین این پارامترها می پردازیم. همچنین روش پیشنهادی را بر روی تصاویر fMRI حاصله از یک مطالعهٔ انجام گرفته در موسسهٔ عصب‌شناسی مونترآل کانادا، که پیشتر معرفی گردید، بکار خواهیم بست.

۲ توزیع پسین پارامترهای یک میدان گاوسی

یکی از مولفه‌های مهم رهیافت بیزی توزیع پسین $\pi(\theta|x) = \frac{L(\theta|x).\pi(\theta)}{m(x)}$ است، که درآن $m(x) = \int L(\theta|x).d\Pi(\theta)$ توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی X و $\Pi(\theta)$ معرف تابع توزیع پیشین پارامترهای موردنظر می‌باشند. با فرض آنکه $\pi(\theta)$ معرف تابع چگالی پیشین پارامتر موردنظر باشد، به ازای θ_0 تثبیت شده‌ای در فضای پارامتر، توزیع پسین فوق را با تقسیم نمودن صورت و مخرج بر $L(\theta_0|x)$ می‌توان به صورت

$$\pi(\theta|x) = [\int \frac{L(\theta|x)}{L(\theta_0|x)} d\Pi(\theta)]^{-1} \frac{L(\theta|x)}{L(\theta_0|x)} \pi(\theta) \qquad (1)$$

بازنویسی کرد. برای شناسایی ساختار توزیع پسین در یک فضای کلی‌تر، فرض کنید (Θ, F_2, Π) نشان دهندهٔ یک فضای احتمال پیشین و به ازای هر $\theta \in \Theta$، P_θ نیز اندازهٔ احتمالی روی فضای (X, F_1) باشد. روشن است که به ازای هر مجموعهٔ دلخواه $A \in F_1$ وهر θ_0 تثبیت شده در Θ، $P_{\theta_0}(A)$ و $P_\Pi(A) = \int_\Theta P_\theta(A) d\Pi(\theta)$ دو اندازهٔ احتمال روی (X, F_1) خواهند بود. بنابراین با استفاده از قضیهٔ تجزیهٔ لبگ، مجموعه‌ای مانند $A_0 \in F_1$ به گونه‌ای که $P_\Pi(A_0) = 0$ و تابع P_Π–اندازه‌پذیر و

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

نامنفی f وجود دارند به قسمی که: $P_{\theta_\circ}(A) = \int f(x)dP_\Pi(x) + P_{\theta_\circ}(A \cap A_\circ)$ تابع f را مشتق رادن-نیکودیم $P_{\theta_\circ}$ نسبت به P_Π نامیده، با نماد $f(x) = \frac{dP_{\theta_\circ}}{dP_\Pi}(x)$ نشان می‌دهند و می‌توان آنرا به صورت

$$f(x) = \frac{dP_{\theta_\circ}}{dP_\Pi}(x) = [\int \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_\circ}}(x)d\Pi(\theta)]^{-1}$$

به‌دست آورد (فرید روحانی و همکاران، ۲۰۰۶). بنابراین از آنجا که $\pi(\theta|x) \propto \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_\circ}}(x).\pi(\theta)$، صورت عمومی توزیع پسین پارامتر مورد نظر از رابطهٔ

$$\pi(\theta|x) = [\int \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_\circ}}(x)d\Pi(\theta)]^{-1}\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_\circ}}(x)\pi(\theta) \qquad (۲)$$

بدست می آید. بر این اساس توزیع پسین پارامترهای یک میدان تصادفی گاوسی را به‌دست می‌آوریم.

میدان تصادفی $\{Z(t); t \in C \subset [\circ, \infty)^N\}$ به صورت

$$dZ(t) = \xi\sigma_\circ^{-N/2} f(\frac{t - t_\circ}{\sigma_\circ})dt + dW(t) \qquad (۳)$$

را درنظربگیرید، که درآن $t_\circ \in C$ ، $\xi \geq \circ$ و $\sigma_\circ > \circ$ به ترتیب پارامترهای مکان، پهنا و مقیاس سیگنالی به شکل تابعی f می‌باشند. W نیز معرف یک صفحهٔ براونی N بعدی روی ناحیه C است. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۵) میدان تصادفی گاوسی فضای مقیاس با پارامترهای $t_\circ \in C$ ، $\xi \geq \circ$ و $\sigma_\circ > \circ$ را به صورت شکل هموار شدهٔ

$$X(t, \sigma) = \sigma^{-N/2} \int k(\frac{h - t}{\sigma})dZ(h) \qquad (۴)$$

تعریف نمودند، که در آن dZ از رابطهٔ (۳) به‌دست آمده و k تابع هموارسازی است که در شرط $\int k^2(t)dt = 1$ صدق می‌کند. یکی از مفیدترین توابع هموارساز، هموارساز گاوسی $k(t) \propto \exp^{-\|t\|^2/2}$ است. بعلاوه هر میدان گاوسی فضای مقیاس $X(t, \sigma)$ را می‌توان به صورت مجموع مولفه‌ای غیرتصادفی به فرم

$$\mu(t, \sigma; \xi, t_\circ, \sigma_\circ) = \xi(\sigma_\circ\sigma)^{-N/2} \int f(\frac{h - t_\circ}{\sigma_\circ})k(\frac{h - t}{\sigma})dh$$

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

و یک مولفهٔ تصادفی $W^*(t,\sigma)$ نشان داد، که در آن W^* یک میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر، واریانس یک و تابع کوواریانس

$$Cov(X(t_1,\sigma_1),X(t_2,\sigma_2)) = (\sigma_1\sigma_2)^{-N/2}\int k(\frac{h-t_1}{\sigma_1})k(\frac{h-t_2}{\sigma_2})dh$$

است. از آنجا که قضیهٔ فیلتر جفت شده در پردازش سیگنال بیان می‌دارد که بهترین آشکارسازی سیگنال، با هموارسازی توسط تابعی انجام می‌پذیرد که دارای شکل یکسانی با فرم تابعی سیگنال باشد، از این‌رو نوعاً تابع k و تابع f همسان فرض می‌شوند. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۵) نشان داده‌اند که در یک میدان گاوسی فضای مقیاس (۴) و با فرض $f=k$ (که لزوماً توابعی گاوسی نیستند)، برای آزمون فرض $\xi=0$ درمقابل $\xi=\xi^*$ لگاریتم آمارهٔ نسبت درستنمایی به صورت

$$\xi^* X(t_0,\sigma_0) - \xi^{*2}/2 \qquad (۵)$$

خواهد بود. بنابراین با فرض $\theta=(\xi,t_0,\sigma_0)$ و $\theta_0=(0,t_0,\sigma_0)$ و با استفاده از روابط (۲) و (۵)، توزیع پسین θ را می‌توان در قالب قضیهٔ زیر به‌دست آورد.

قضیه ۱ : گیریم $X(t,\sigma)$ میدان گاوسی فضای مقیاسی به شکل (۴) باشد، که در آن t در یک زیر مجموعهٔ فشرده از $[0,\infty)$ قراردارد. اگر $\theta=(\xi,t_0,\sigma_0)$ و $\theta_0=(0,t_0,\sigma_0)$ در این صورت با فرض $f=k$ که الزاماً توابعی گاوسی نیستند، توزیع پسین θ تحت پیشین $\pi(\theta)$ عبارت است از:

$$[\int_\Theta e^{[\xi x(t_0,\sigma_0)-\frac{\xi^2}{2}]}\pi(\theta)d\theta]^{-1} e^{[\xi x(t_0,\sigma_0)-\frac{\xi^2}{2}]}\pi(\theta). \qquad (۶)$$

برهان : نتیجهٔ مستقیمی از رابطهٔ (۲) و قضیهٔ ۲ در فریدروحانی و همکاران (۲۰۰۶) است.

فرع ۱ : تحت مفروضات قضیهٔ فوق، اگر θ دارای توزیع پیشین ناسره روی فضای Θ باشد در این‌صورت توزیع پسین θ متناسب با تابع $\exp[\xi x(t_0,\sigma_0)-\xi^2/2]$ خواهد بود.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

فرع ۲ : تحت مفروضات قضیهٔ فوق، اگر ξ مستقل از (t_0, σ_0) دارای توزیع پیشین ناسره روی $(0, \infty)$ باشد در این‌صورت توزیع پسین θ عبارت است از:

$$[\int_{\Theta_1} \frac{\Phi(x)}{\phi(x)} \pi_1(\theta_1) d\theta_1]^{-1} . \frac{\phi(\xi - x)}{\phi(x)} . \pi_1(\theta_1) \qquad (۷)$$

که در آن $\theta_1 = (t_0, \sigma_0)$، Θ_1 فضای پارامتر θ_1، $\phi(.)$ و $\Phi(.)$ به ترتیب معرف تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

برهان : با استفاده از روشی مشابه اثبات رابطهٔ (۹) در فریدروحانی و همکاران (۲۰۰۶) و با توجه به اینکه $e^{\xi x(t_0, \sigma_0) - \frac{\xi^2}{2}} = \frac{\phi(\xi - x)}{\phi(x)}$، نتیجهٔ (۷) بدست می‌آید.

بنابراین با استناد به قضیه و نتایج فوق می‌توان براساس توزیع پسین (۶) نسبت به استنباط بیزی دربارهٔ پارامتر $\theta = (\xi, t_0, \sigma_0)$ اقدام نمود. به عنوان مثال تحت شرایط نتیجهٔ ۱، به سهولت می‌توان نمای توزیع پسین را که در این حالت معادل برآورد ماکسیمم درستنمایی است، از رابطهٔ

$$(\hat{t}_0, \hat{\sigma_0}) = \arg \max_{(t_0, \sigma_0)} X^2(t_0, \sigma_0) \quad , \quad \hat{\xi} = X(\hat{t}_0, \hat{\sigma_0}) \qquad (۸)$$

به‌دست آورد. با این وجود متأسفانه در اغلب موارد توزیع پسین (۶) دارای فرم بسته نبوده و مشخصات مختلف این توزیع به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند. از اینرو بایستی با استفاده از روشهای عددی مانند فنون مبتنی بر محاسبات آماری مشخصات توزیع پسین را به گونه‌ای تقریب نمود. در بخش بعد با بهره‌گیری از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC) به معرفی الگوریتمی عمومی برای برآورد نماگرهای اصلی توزیع پسین (۷) می‌پردازیم.

۳ برآورد بیزی پارامترهای میدان گاوسی فضای مقیاس به روش MCMC

همچنانکه می‌دانیم در مواردی که توزیع تحت بررسی به سادگی قابلیت نمونه‌گیری بر اساس روشهای مرسوم را نداشته باشد، از روشهای نمونه‌گیری تقریبی می‌توان استفاده نمود. روش MCMC یکی از روشهایی است که از توزیع مورد نظر به عنوان توزیع مانای یک زنجیر مارکوف، نمونه‌گیری می‌کند.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

با توجه به اینکه برای تعیین هر گونه مشخصهٔ توزیع پسین (۶) بایستی بتوان ضریب ثابت $[\int_\Theta e^{[\xi x(t_\circ,\sigma_\circ)-\frac{\xi^2}{2}]}\pi(\theta)d\theta]^{-1}$ رامحاسبه نمود و از آنجا که این ضریب نوعاً به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست، می‌توان از روش MCMC برای تولید نمونهٔ $\{\theta^{(n)}\}$ ازتوزیع پسین (۶) استفاده نمود. به ویژه تحت شرایط نتیجهٔ ۲ توزیع‌های شرطی ξ به شرط $\theta_1=(t_\circ,\sigma_\circ)$ و بالعکس را می‌توان تعیین نمود. لذا با استفاده ازالگوریتم متروپلیس–هستینگز و ترکیب آن با روش نمونه‌گیر گیبز می‌توان روش عمومی تولید نمونه از توزیع پسین (۷) را معرفی کرد. به سهولت می‌توان نشان داد که تحت شرایط نتیجهٔ ۲ توزیع‌های پسین شرطی از روابط

$$\pi(\xi|\theta_1,x) = \frac{\phi(\xi-x)}{1-\Phi(-x)} \qquad (۹)$$

$$\pi(\theta_1|\xi,x) = \frac{\pi_1(\theta_1)\phi(\xi-x)/\phi(x)}{\int_{\Theta_1}\pi_1(\theta_1)\phi(\xi-x)/\phi(x)d\theta_1} \qquad (۱۰)$$

بدست می‌آیند. اینک با ترکیب روش نمونه‌گیر گیبز و الگوریتم متروپلیس–هستینگز دنباله‌ای از نمونه‌های $\{(\xi^{(n)},\theta_1^{(n)})\}$ را از توزیع پسین (۷) تولید می‌کنیم. گام‌های این الگوریتم ترکیبی به شرح زیر است:

۱) قرار می‌دهیم $n=0$ ، $\theta_1^{(n)}=(t_\circ^{(n)},\sigma_\circ^{(n)})$ را از توزیع پیشین $\pi_1(\theta_1)$ تولید می‌کنیم.

۲) تحت $\theta_1^{(n)}=(t_\circ^{(n)},\sigma_\circ^{(n)})$، $\xi^{(n+1)}$ از توزیع (۹) را تولید می‌کنیم.

۳) $\theta^*=(t_\circ^*,\sigma_\circ^*)$ را از توزیع پیشنهادی $q(\theta_1^{(n)},\theta^*)$ و u را از توزیع یکنواخت (۱و۰) تولید می‌کنیم.

۴) کسر $\alpha(\theta_1^{(n)},\theta^*)=\min\{\frac{P(\theta^*|\xi^{(n+1)},x).q(\theta^*,\theta_1^{(n)})}{P(\theta_1^{(n)}|\xi^{(n+1)}x).q(\theta_1^{(n)},\theta^*)},1\}$را بدست می‌آوریم.

۵) اگر $u<\alpha(\theta_1^{(n)},\theta^*)$ در اینصورت قرار می‌دهیم $\theta_1^{(n+1)}=\theta^*$ و در غیر اینصورت $\theta_1^{(n+1)}=\theta_1^{(n)}$.

۶) قرار می‌دهیم $n=n+1$ و به گام ۲ می‌رویم.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

با تکرار الگوریتم فوق و باصرف‌نظر کردن از b مقدار اولیه در دنبالهٔ $\{\theta^{(n)}\} = \{(\xi^{(n)}, \theta_1^{(n)})\}$، نمونه‌ای تقریبا تصادفی از توزیع پسین (۷) بدست خواهد آمد، که از این نمونه می‌توان در برآورد پارامتر θ استفاده نمود. به عنوان مثال برای برآورد میانگین توزیع پسین، می‌توان میانگین نمونه‌های تولیدی، یعنی

$$\hat{\theta_j} = \frac{1}{n-b} \sum_{i=b+1}^{n} \theta_j^{(i)} \quad j = 1, \ldots, N+2$$

را به عنوان تقریبی از برآورد بیزی درنظر گرفت، که درآن b را نقطهٔ برش دنبالهٔ $\{\theta_j^{(i)}\}$ نامیده و روشهای مختلفی برای تعیین آن ارائه شده است. در این مقاله یکی از این روشها، موسوم به روش ارزیابی مجموع تجمعی مورد استفاده قرار گرفته است.

حالت خاص : فرض کنید پارامتر مکانی سیگنال مستقل از دو پارامتر پهنا و مقیاس دارای توزیع پیشین نرمال N متغیره با میانگین μ_0 و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ_0 باشد. همچنین σ_0 مستقل از دو پارامتر دیگر دارای توزیع پیشین یکنواخت روی (۱ و ۰) باشد. در این‌صورت به شرط $t_0^{(n)}$ و $\sigma_0^{(n)}$ توزیع پیشنهادی

$$q(\theta_1^{(n)}, \theta_1) = N(t_0^{(n)}, \Sigma_0).I_{(0,1)}(\sigma_0^{(n)}) \qquad (11)$$

را درنظر می‌گیریم. با محاسبات نه چندان پیچیده گام‌های شش گانهٔ تولید دنبالهٔ $\{\theta^{(n)}\}$ از توزیع پسین (۷) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

۱) قرار می‌دهیم $n = 0$ ، $\theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)})$ را از توزیع پیشین $\pi_1(\theta_1) = N(\mu_0, \Sigma_0)I_{(0,1)}(\sigma_0)$ تولید می‌کنیم.

۲) تحت $\theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)})$ از توزیع شرطی (۹)، $\xi^{(n+1)}$ را تولید می‌کنیم.

۳) $\theta^* = (t_0^*, \sigma_0^*)$ را از توزیع پیشنهادی (۱۱) و u را از توزیع یکنواخت (۱و۰) تولید می‌کنیم.

۴) با توجه به تقارن توزیع پیشنهادی نسبت به دو مولفه خود، $\alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*)$ را از طریق $\min\{\frac{\pi_1(\theta^*)\phi(\xi^{(n+1)} - x(\theta^*))/\phi(x(\theta^*))}{\pi_1(\theta_1^{(n)})\phi(\xi^{(n+1)} - x(\theta_1^{(n)}))/\phi(x(\theta_1^{(n)}))}, 1\}$ بدست می‌آوریم.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

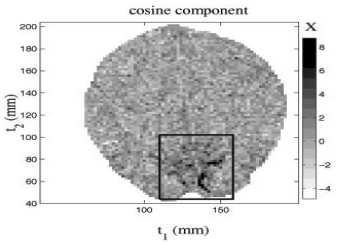
۵) اگر $u < \alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*)$ در اینصورت قرار می‌دهیم $\theta_1^{(n+1)} = \theta^*$ و در غیر اینصورت $\theta_1^{(n+1)} = \theta_1^{(n)}$.

۶) قرار می‌دهیم $n = n + 1$ و به گام ۲ می‌رویم.

در بخش بعد با استفاده از توزیع پیشین فوق و الگوریتم ارائه شده به برآورد بیزی پارامترهای مکان، مقیاس و پهنای سیگنال می‌پردازیم.

۴ کاربرد در fMRI

در این بخش با استفاده از روش معرفی شده در بخش ۲، برآورد بیزی پارامترهای مدل گاوسی فضای مقیاس را براساس تصاویر fMRI حاصله از مطالعهٔ انجام شده در موسسهٔ عصب شناسی مونترآل کانادا، محاسبه می‌کنیم. شکل ۱ تصویر مولفهٔ



شکل ۱: مولفه کسینوس دریک تصویر واقعی تشدید مغناطیسی عملکردی (شفیعی و همکاران ،۲۰۰۳)

کسینوس سیگنال، پس از تلخیصی که بر روی سری زمانی تصاویر حاصله اعمال شده است، را نشان می‌دهد. پارامترهای این تصویر دو بعدی عبارتند از $\theta = (\xi, t_{0_1}, t_{0_2}, \sigma_0)$. با فرض برقراری شرایط نتیجهٔ ۲ و با استفاده از رابطهٔ (۸)، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای پهنا، مکان (طول و عرض) و مقیاس سیگنال محاسبه و در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

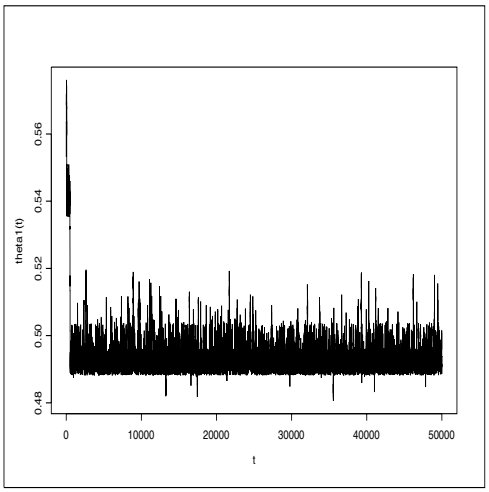
[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درستنمایی مولفه پهنا، مکان و مقیاس سیگنال.

پارامتر	ξ	t_{01}	t_{02}	σ_0
برآورد	۱۷/۳۳۰	۰/۵۳۵	۰/۲۵۲	۱/۰۰۰

به منظور بدست آوردن برآورد بیزی پارامترهای فوق، برای مؤلفهٔ مکان سیگنال توزیع پیشین نرمال دومتغیرهٔ مستقل با پارامترهای $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) =$ (۰و۱/۰و۱/۰و۵/۰و۵/۰) را درنظر گرفته‌ایم. البته این توزیع در ناحیهٔ جستجوی مغز بریده شده است. توزیع پیشین برای مؤلفه های مقیاس و پهنا نیز همانند توزیع پیشین (۱۱) انتخاب شده‌اند. براساس الگوریتم ترکیبی پیش گفته با ۵۰۰۰۰ تکرار، دنباله‌ای از پارامترها تولید شده‌اند، که به عنوان نمونه دنبالهٔ پارامتر طول سیگنال در شکل ۲ ملاحظه می‌شود.

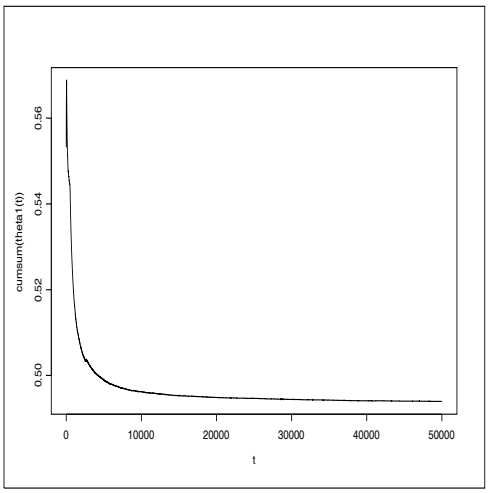


شکل ۲: دنباله پارامتر طول سیگنال تولید شده

با توجه به نمودار مزبور علیرغم آنکه همگرایی دنبالهٔ تولیدی به خوبی مشهود است، اما برای کنترل دقیق‌تر همگرایی این‌گونه دنباله‌ها و به علاوه تعیین نقطهٔ برش b که در تقریب برآوردهای بیزی مورد نیاز است، می‌توان از روش ارزیابی مجموع تجمعی سود جست. فرض کنید $\hat{\theta_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \theta^{(j)}$، در اینصورت به نمودار

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

حاصل از رسم تابع $\sum_{j=1}^{t}[\theta^{(j)} - \hat{\theta}_n]$ درمقابل t ارزیابی مجموع تجمعی گویند. اگر تابع مزبور با افزایش t رفتاری مجانبی داشته باشد، این ویژگی نشان از همگرایی دنبالهٔ تولیدی در الگوریتم MCMC دارد. جهت ارزیابی همگرایی دنباله‌های تولیدشده، نمودارهای مجموع تجمعی متناظر با هریک از پارامترهای مکان، مقیاس و پهنای سیگنال رسم و مورد توجه قرار گرفته‌اند. شکل ۳ نمودار مجموع تجمعی دنبالهٔ پارامتر طول سیگنال را نشان می دهد. با توجه به رفتار مجانبی این نمودار، همگرایی دنبالهٔ تولید شده تایید می‌شود و به علاوه با ملاحظهٔ این نمودار تکرار ۲۰۰۰ام را می‌توان به عنوان نقطهٔ برش مناسب جهت برآورد دقیق‌تر پارامترهای سیگنال در نظر گرفت. البته ارزیابی مجموع تجمعی برای سایر مولفه‌های سیگنال نیز گویای همگرایی دنباله‌های تولید شده در الگوریتم پیشنهادی بوده و به علاوه نقطهٔ برش مزبور را تایید می‌کنند.



شکل ۳: نمودار مجموع تجمعی دنباله پارامترطول سیگنال تولید شده

اینک پس از حصول اطمینان از کیفیت مقادیر تولید شده، می‌توان با استفاده از مباحث پیشین برآورد بیزی پارامترهای مورد نظر را بدست آورد. جدول ۲ برآورد بیزی پارامترهای سه گانهٔ سیگنال را براساس میانگین و نمای توزیع پسین (۷)، به ترتیب برای دو انتخاب مختلف (۰و۰/۱و۰/۱و۰/۵و۰/۵) و

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

(۰و ۱/۰و ۱/۰و ۲۵۲/۰و ۵۳۵/۰) به عنوان پارامترهای توزیع پیشین (۱۱) نشان می‌دهند. سطرهای دوم و سوم این جدول به ترتیب معرف میانگین و نمای توزیع پسین متناظر با پارامتر پیشینی (۰و ۱/۰و ۱/۰و ۵/۰و ۵/۰) و سطرهای چهارم و پنجم معرف مقادیر مشابه و متناظر با پارامتر پیشینی (۰و ۱/۰و ۱/۰و ۲۵۲/۰و ۵۳۵/۰) می‌باشند. متذکر می‌گردد انتخاب (۰و ۱/۰و ۱/۰و ۲۵۲/۰و ۵۳۵/۰) به عنوان پارامترهای توزیع پیشین مکان سیگنال برگرفته از برآورد ماکسیمم درستنمایی مؤلفه‌های سیگنال است که پیشتر در جدول ۱ ارائه شد.

جدول ۲: برآورد بیزی مولفه پهنا، مکان و مقیاس سیگنال تحت پیشین (۱۱) با پارامترهای (۰و ۱/۰و ۵/۰و ۵/۰) و (۰و ۱/۰و ۱/۰و ۲۵۲/۰و ۵۳۵/۰)

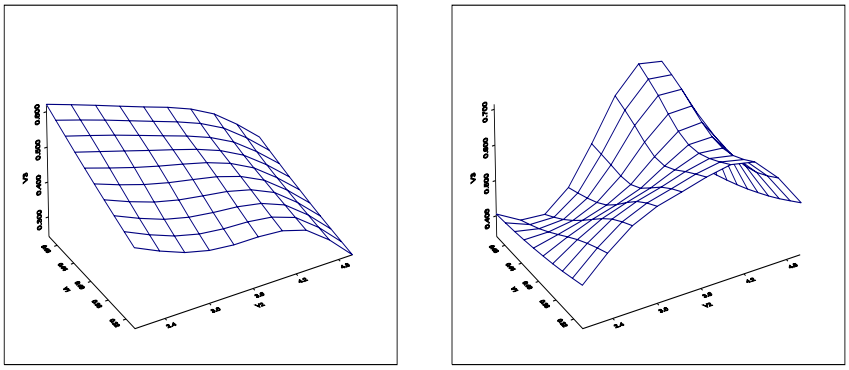
پارامتر	ξ	$t_{۰۱}$	$t_{۰۲}$	$\sigma_{۰}$
B1-Mean	۹/۶۴۷	۰/۴۹۳	۰/۳۵۰	۰/۹۷۸
B1-Mode	۱۳/۹۶۷	۰/۵۲۰	۰/۳۶۲	۱/۰۰۰
B2-Mean	۱۷/۲۴۸	۰/۵۵۵	۰/۲۹۵	۰/۹۸۷
B2-Mode	۲۱/۰۲۷	۰/۵۶۷	۰/۲۹۹	۱/۰۰۰

همچنانکه ملاحظه می‌شود برآورد مکان و مقیاس سیگنال در تمامی روش‌های پیشنهادی، اعم از روش ماکسیمم درستنمایی و روش بیزی، بسیار نزدیک به یکدیگرند. با این وجود برآورد بیزی پهنای سیگنال به نظر تحت تاثیر پیشین‌های انتخابی تفاوت چشمگیری را نشان می‌دهد. به منظور بررسی تاثیر انتخاب پارامترهای توزیع پیشین در برآورد بیزی میانگین پسین، این پارامترها به صورت عمومی (۰و ۱/۰و ۱/۰و $\mu_{۲}$ و $\mu_{۱}$) در نظر گرفته شده‌اند. شکل‌های a.۴ و b.۴ به خوبی تاثیر انتخاب پارامترهای مختلف توزیع پیشین را در برآورد بیزی مزبور نشان می‌دهند.

همچنانکه در شکل a.۴ ملاحظه می‌شود بیشترین برآورد میانگین پسین برای مؤلفهٔ طول سیگنال در مقادیر میانی $\mu_{۲}$ و مقادیر بالای $\mu_{۱}$ بدست می‌آید. این در حالی است که در مؤلفهٔ عرض سیگنال، افزایش مقدار $\mu_{۱}$ و بالعکس کاهش سطح $\mu_{۲}$ باعث افزایش برآورد میانگین پسین طول سیگنال می‌شود.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]



b a

شکل ۴: برآورد میانگین پسین مولفه (a) : طول و (b) : عرض سیگنال

از سوی دیگر مقایسهٔ نتایج حاصل از برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآوردهای بیزی مبتنی بر میانگین و نمای توزیع پسین، براساس مشخصهٔ میانگین توان‌دوم خطاها که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید نیز جالب توجه خواهد بود.

$$E^{۲} = \frac{۱}{n * m} \sum_{t} [Z(t) - \hat{\xi}\hat{\sigma_{۰}}^{-N/۲} f(\frac{t - \hat{t_{۰}}}{\hat{\sigma_{۰}}})]^{۲}$$

که در آن n و m به ترتیب تعداد پیکسل‌های سطر و ستون تصویر مورد نظراست. مقادیر این کمیت برای تصویر مورد آزمون در جدول ۳ ارائه شده‌است. همچنانکه ملاحظه می‌شود از نقطه نظر میانگین توان دوم خطاها، برآوردگر میانگین توزیع پسین با انتخاب پارامترهای پیشین (۰و۱/۰و۱/۰و۵/۰و۵/۰) از وضعیت مطلوب‌تری برخوردار است.

جدول ۳: میانگین توان‌دوم خطاهای برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی

روش برآورد	MLE	B1-Mode	B1-Mean	B2-Mode	B2-Mean
میانگین توان‌دوم خطاها	۸/۱۳	۵/۷۸	۳/۰۸	۱۲/۵۱	۸/۹۰

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

بحث و نتیجه گیری

هدف این مقاله ارائهٔ روشی برای محاسبهٔ برآوردهای بیزی پارامترهای یک میدان تصادفی فضای مقیاس بوده است. بدیهی است در این راستا همانند هر رهیافت بیزی تعیین توزیع پیشین و مقادیر پارامترهای این توزیع حائز اهمیت خواهد بود. در این راستا استفاده از روشهای مختلف انتخاب توزیع پیشین اعم از بیز سلسله‌مراتبی، بیز تجربی و سایر روشهای مرسوم می‌تواند به گزینهٔ قابل دفاعی به عنوان توزیع پیشین در یک مسئلهٔ واقعی منجر شود. اما آنچه از اهمیت برخورداراست توانایی ما برای محاسبهٔ برآوردهای بیزی پارامترهای یک میدان تصادفی گاوسی مقیاس تحت هر توزیع پیشین معین می‌باشد، که این امر براساس الگوریتم پیشنهادی انجام پذیر خواهد بود. متذکر می‌شود در مواردی نظیر روش بیز تجربی یا سلسله مراتبی ترکیب روش پیشنهادی با روش‌های بهینه‌سازی عددی مانند الگوریتم EM می تواند به نتایج جالب توجهی منجر شود که خارج از اهداف این مقاله است.

تقدیر و تشکر

این مقاله حاصل طرح پژوهشی مصوب در معاونت پژوهشی دانشگاه شهید بهشتی است که بدینوسیله از حمایت مالی این دانشگاه قدردانی به عمل می‌آید.

مراجع

Farid Rohani, M., Shafie, K., and Noorbaloochi, S. (2006), *A Bayesian Signal Detection Procedure for Scale Space Random Fields.*, The Canadian Journal of Statistics, **34(2)**, 311-325.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

Friston, K. J., Holmes, A. P., Poline, J. B., Grasby, P. J., Williams, S. C. R., and Frackowiak, R. S. J. (1995), *Analysis of fMRI Time Series Revisited.* NeuroImage, **2**, 45-53.

Friston, K. J., Jezzard, P., and Turner, R. (1994), *Analysis of Functional MRI Time Series Human.* Human Brain Mapping, **1**, 153-171.

Friston, K. J., and Penny, W. (2002), *Posterior Probability Maps and SPMs.* NeuroImage, **19(3)**, 1240-1249.

Friston, K. J., Penny, W., Phillips, C., Kiebel, S., Hinton, G., and Ashburner, J. (2002), *Classical and Bayesian Inference in Neuroimaging: Theory.* NeuroImage, **16**, 465-483.

Genovese, C. R. (2000), *A Bayesian Time-course Model for Functional Magnetic Resonance Image Data.* Journal of the American Statistical Association, **95(451)**, 691-703.

Goseel, C., Fahrmeir, L., and Auer, D. (2001), *Bayesian Modeling of the Hemodynamic Response Function in Bold fMRI.* NeuroImage, **14**, 140-148.

Penny, W., Kiebel, S., and Friston, K. J. (2003), *Variational Bayesian Inference for fMRI Time Series.* NeuroImage, **19(3)**, 724-741.

Shafie, K. (1998), *The Geometry of Gausian Rotaion Space Random Fields.* PhD Thesis, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.

Shafie, K., Sigal, B., Siegmund, D. O., and Worsley, K. J. (2003), *Rotation Space Random Fields with an Application to fMRI Data.* Annals of Statistics, **31**, 1732-1771.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]

Siegmund, D. O., and Worsley, K. J. (1995), *Testing for Signal with Unknown Location and Scale in a Stationary Gaussian Random Field.* Annals of Statistics, **23**, 608-639.

Woolrich, M., Behrens, T., Beckmann, C., Jenkinson, M., and Smith, S. (2004), *Multivariate Linear Modeling for fMRI Group Analysis Uing Bayesian Inference.* NeuroImage, **21**, 1732-1747.

Worsley, K. J. (1994), *Local Maxima and the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of χ^2, F and t Fields. Classical and Bayesian Inference in Neuroimaging: Theory.* NeuroImage, **16**, 465-483.

Worsley, K. J. (2001), *Testing for Signals with Unknown Location and Scale in a χ^2 Random Field, with an Application to fMRI.* Advances in Applied Probability, **33**, 773-799.

Worsley, K. J, Evans, A., Marrett, S. and Neelin, P. (1992), *A Three Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain.* Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, **12**, 900-918.

Worsley, K. J. and Friston, K. J. (1995), *Analysis of fMRI Time-series Revisited-again.* Neuroimage, **2**, 173-181.

[Downloaded from irstat.ir on 2026-11-06]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.2.1]