

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶

جلد ۱، شماره ۲، ص ۱۲۱-۱۳۷

## برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی

محمدرضا فریدروحانی، خلیل شفیعی هولیقی

گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۱۰/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۲/۲۶

**چکیده:** تا کنون مسئله آشکارسازی سیگنال با استفاده از نظریه میدان‌های تصادفی توسط گروهی از آمارشناسان مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله برآورد نقطه‌ای پارامترهای سیگنال یک میدان تصادفی گاوسی فضای مقیاس به روش بیزی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به پیچیدگی توزیع پسین پارامترهای این مدل و عدم وجود فرم بسته برای آن، با استفاده از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC)، برآوردهای مذکور را تقریب کرده‌ایم. درنهایت از روش پیشنهادی برای تحلیل داده‌های fMRI حاصل از یک مطالعه واقعی در موسسه عصب شناسی مونترآل کانادا استفاده کرده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** میدان تصادفی، میدان گاوسی فضای مقیاس، مشتق رادن-نیکودیم، روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC).

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمدرضا فریدروحانی، m.faridrohani@sbu.ac.ir

تصویربرداری تشدید مغناطیسی (MRI) روشی است، که در آن از امواج رادیویی و یک میدان مغناطیسی بسیار قوی به جای اشعه X به منظور تصویربرداری از داخل اندامهای انسانی استفاده می‌شود. تکنیک مزبور در تصویربرداری از مغز به عصب شناسان کمک می‌کند تا نواحی سفید و خاکستری مغز را از یکدیگر تشخیص داده و به علاوه بتوانند نواحی آسیب دیده مغز که به سبب عواملی همچون وجود تومور و نظایر آن رخ می‌دهند را بر اساس تعداد زیادی تصویر در یک بازه زمانی کوتاه شناسایی کنند. با بهره‌گیری از قابلیت‌های تصویربرداری تشدید مغناطیسی می‌توان نسبت به اندازه‌گیری تغییرات متابولیک در نواحی فعال مغز که ناشی از اعمال یک تحریک خاص می‌باشد اقدام نمود. بکارگیری تصویربرداری تشدید مغناطیسی به هدف شناسایی نواحی فعال مغز به تصویربرداری تشدید مغناطیسی عملکردی (fMRI) موسوم است. متذکر می‌گردد علی‌رغم آنکه نواحی عمومی مرتبط با فعالیت‌هایی نظیر صحبت کردن، چشیدن، حفظ کردن و موارد دیگر در مغز انسان مشخص است، مکان دقیق این فعالیت‌ها از فردی به فرد دیگر متغیر است. علاوه بر این آسیب‌ها، ضربه‌های مغزی و نیز وجود تومورها باعث جابجایی محل یک فعالیت خاص می‌گردد، بطوریکه درمان چنین آسیب‌هایی مستلزم شناسایی مکان دقیق اینگونه فعالیت‌ها می‌باشد.

در سال ۱۹۹۱ نخستین آزمایش با استفاده از تصاویر تشدید مغناطیسی جهت مطالعه فعالیت‌های مغز انجام پذیرفت. در آزمایشی مشابه در موسسه عصب شناسی مونترآل کانادا، یک آزمودنی تحت محرک بینایی ساده‌ای قرار گرفت که طی آن محرک‌ها در ۴ اسکن در وضعیت خاموش و در ۴ اسکن در وضعیت روشن قرار داشتند. عملیات فوق برای ۵ بار تکرار و نهایتاً ۴۰ اسکن از مغز فرد مورد نظر بدست آمده است. فاصله بین اسکن‌ها ۶ ثانیه و دوره کل اعمال محرک‌ها ۴۸ ثانیه بوده است. داده‌های مطالعه مزبور یک سری زمانی متشکل از ۴۰ تصویر  $128 \times 128$  پیکسل را تشکیل می‌دهند.

هدف مهم از تحلیل تصاویر حاصله از fMRI مکان‌یابی ناحیه‌ای از مغز است که

فعالیت ناشی از اعمال محرک خاصی در آن بروز یافته است. از نقطه نظر پردازش سیگنال، این ناحیه ای است که در آن سیگنال مشاهده می شود. بدین طریق می توان نواحی غیرفعال (نوفه سفید) را از نواحی فعال تشخیص داد. معمولاً پاسخ مورد ارزیابی در زمان  $t$  و مکان  $s$  در قالب یک فرایند مکانی-زمانی و به صورت مجموع دو مولفه سیگنال و نوفه سفید مدل بندی می گردد. بسته به هدف از تحقیق، مدل بندی های مختلفی برای تحلیل آماری داده های fMRI توسط آمارشناسان مورد توجه قرار گرفته است. فریستون و همکاران (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵)، ورسلی و فریستون (۱۹۹۵) مولفه سیگنال در مکان  $t$  را به صورت پیشش  $h(t)$  با تابع پاسخ هموداینامیک مدل بندی نمودند. این در حالی است که ورسلی و همکاران (۱۹۹۲)، ورسلی (۱۹۹۴) از مدل بندی مبتنی بر نظریه میدانهای تصادفی استفاده و تصاویر fMRI را به عنوان تحقیقی از یک میدان تصادفی گاوسی در نظر گرفتند. شفیع (۱۹۹۸) و ورسلی (۲۰۰۱) نشان دادند که بیشتر ویژگی های سیگنال در مولفه کسینوس آن بروز یافته که این مولفه نیز تقریباً یک میدان تصادفی گاوسی می باشد. براساس روش پیشنهادی ورسلی، مولفه زمان در سری زمانی یاد شده حذف و براساس یک تصویر که به نوعی تلخیصی از این سری زمانی است، اقدام به شناسایی مکان سیگنال احتمالی می شود. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۷) بر این اساس نشان دادند که برای آشکارسازی سیگنالی با شکل تابعی گاوسی که مکان و مقیاس آن نامعلوم است، آماره نسبت درستنمایی برای آزمون فرض عدم وجود سیگنال، معادل ماکزیمم کلی میدان تصادفی در ناحیه جستجو است. اما از آنجا که توزیع دقیق این آماره شناخته شده نیست، برای محاسبه  $p$ -مقدار، صرفاً می توان براساس امید ریاضی تابع مشخصه اویلر، آنرا تقریب نمود. مسئله آشکارسازی سیگنال از منظر بیزی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. جنووویس (۲۰۰۰) و گوسل و همکاران (۲۰۰۱) با فرض استقلال زمانی- مکانی نوفه در مکان  $t$  به مدل بندی بیزی سیگنال پرداختند. جنووویس با برآزش یک سیگنال پارامتری زمان-وابسته به مشاهدات، مدل بندی بیزی را برای ارزیابی یکنوایی سیگنال در طی زمان بکاربرده است. این در حالی است که روش گوسل و همکاران او مبتنی بر مدل بندی بیزی پاسخ های هموداینامیک در مکان  $t$  بوده است. فریستون (۲۰۰۲)، فریستون و پنی (۲۰۰۲) و

پنی و همکاران (۲۰۰۳) از طریق مدل‌بندی خطی سلسله مراتبی زمانی یک روش بیزی تجربی را برای تحلیل تصاویر fMRI معرفی نموده‌اند. وولریچ و همکاران (۲۰۰۴) نیز نوفه زمانی-مکانی و مدل بندی تابع پاسخ همودینامیک را در قالب رهیافتی بیزی مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. فریدروحانی و همکاران (۲۰۰۶) نیز روش بیزی را برای آشکارسازی سیگنال در یک میدان گاوسی فضای مقیاس معرفی و در یک مسئله واقعی بکاربرده‌اند. یاد آور می شود، از نقطه نظر آماری آشکارسازی سیگنال معادل مسئله آزمون فرض آماری وجود سیگنال است.

در این مقاله با استفاده از مفاهیم ارائه شده در مقاله فرید روحانی و همکاران (۲۰۰۶)، به برآورد نقطه‌ای بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی براساس توزیع پسین این پارامترها می پردازیم. همچنین روش پیشنهادی را بر روی تصاویر fMRI حاصله از یک مطالعه انجام گرفته در موسسه عصب‌شناسی مونترآل کانادا، که بیشتر معرفی گردید، بکار خواهیم بست.

## ۲ توزیع پسین پارامترهای یک میدان گاوسی

یکی از مولفه‌های مهم رهیافت بیزی توزیع پسین  $\frac{L(\theta|x) \cdot \pi(\theta)}{m(x)}$  است، که در آن  $m(x) = \int L(\theta|x) \cdot d\Pi(\theta)$  توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی  $X$  و  $\Pi(\theta)$  معرف تابع توزیع پیشین پارامترهای موردنظر می‌باشند. با فرض آنکه  $\pi(\theta)$  معرف تابع چگالی پیشین پارامتر موردنظر باشد، به ازای  $\theta_0$  تثبیت شده‌ای در فضای پارامتر، توزیع پسین فوق را با تقسیم نمودن صورت و مخرج بر  $L(\theta_0|x)$  می‌توان به صورت

$$\pi(\theta|x) = \left[ \int \frac{L(\theta|x)}{L(\theta_0|x)} d\Pi(\theta) \right]^{-1} \frac{L(\theta|x)}{L(\theta_0|x)} \pi(\theta) \quad (1)$$

بازنویسی کرد. برای شناسایی ساختار توزیع پسین در یک فضای کلی‌تر، فرض کنید  $(\Theta, F_\Pi, \Pi)$  نشان دهنده یک فضای احتمال پیشین و به ازای هر  $\theta \in \Theta$ ،  $P_\theta$  نیز اندازه احتمالی روی فضای  $(X, F_1)$  باشد. روشن است که به ازای هر مجموعه دلخواه  $A \in F_1$  و هر  $\theta_0$  تثبیت شده در  $\Theta$ ،  $P_{\theta_0}(A)$  و  $P_\theta(A) = \int_\Theta P_\theta(A) d\Pi(\theta)$  دو اندازه احتمال روی  $(X, F_1)$  خواهند بود. بنابراین با استفاده از قضیه تجزیه لبگ، مجموعه‌ای مانند  $A_0 \in F_1$  به گونه‌ای که  $P_\Pi(A_0) = 0$  و تابع  $P_\Pi$ -اندازه‌پذیر و

فریدروحانی، شفیع هویلی ..... ۱۲۵

نامنهی  $f$  وجود دارند به قسمی که:  $P_{\theta_0}(A) = \int f(x)dP_{\Pi}(x) + P_{\theta_0}(A \cap A_0)$  تابع  $f$  را مشتق رادن-نیکودیم  $P_{\theta_0}$  نسبت به  $P_{\Pi}$  نامیده، با نماد  $f(x) = \frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\Pi}}(x)$  نشان می دهند و می توان آنرا به صورت

$$f(x) = \frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\Pi}}(x) = \left[ \int \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}}(x)d\Pi(\theta) \right]^{-1}$$

به دست آورد (فرید روحانی و همکاران، ۲۰۰۶). بنابراین از آنجا که  $\pi(\theta|x) \propto \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}}(x) \cdot \pi(\theta)$  صورت عمومی توزیع پسین پارامتر مورد نظر از رابطه

$$\pi(\theta|x) = \left[ \int \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}}(x)d\Pi(\theta) \right]^{-1} \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}}(x)\pi(\theta) \quad (2)$$

بدست می آید. بر این اساس توزیع پسین پارامترهای یک میدان تصادفی گاوسی را به دست می آوریم.

میدان تصادفی  $\{Z(t); t \in C \subset [0, \infty)^N\}$  به صورت

$$dZ(t) = \xi \sigma_0^{-N/2} f\left(\frac{t-t_0}{\sigma_0}\right) dt + dW(t) \quad (3)$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $t_0 \in C$ ،  $0 \leq \xi$  و  $0 < \sigma_0$  به ترتیب پارامترهای مکان، پهنا و مقیاس سیگنالی به شکل تابعی  $f$  می باشند.  $W$  نیز معرف یک صفحه براونی  $N$  بعدی روی ناحیه  $C$  است. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۵) میدان تصادفی گاوسی فضای مقیاس با پارامترهای  $t_0 \in C$ ،  $0 \leq \xi$  و  $0 < \sigma_0$  را به صورت شکل هموار شده

$$X(t, \sigma) = \sigma^{-N/2} \int k\left(\frac{h-t}{\sigma}\right) dZ(h) \quad (4)$$

تعریف نمودند، که در آن  $dZ$  از رابطه (۳) به دست آمده و  $k$  تابع هموارسازی است که در شرط  $\int k^2(t)dt = 1$  صدق می کند. یکی از مفیدترین توابع هموارسازی هموارسازی گاوسی  $k(t) \propto \exp^{-\|t\|^2/2}$  است. بعلاوه هر میدان گاوسی فضای مقیاس  $X(t, \sigma)$  را می توان به صورت مجموع مولفه ای غیر تصادفی به فرم

$$\mu(t, \sigma; \xi, t_0, \sigma_0) = \xi(\sigma_0 \sigma)^{-N/2} \int f\left(\frac{h-t_0}{\sigma_0}\right) k\left(\frac{h-t}{\sigma}\right) dh$$

۱۲۶ ..... برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی

و یک مولفه تصادفی  $W^*(t, \sigma)$  نشان داد، که در آن  $W^*$  یک میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر، واریانس یک و تابع کوواریانس

$$Cov(X(t_1, \sigma_1), X(t_2, \sigma_2)) = (\sigma_1 \sigma_2)^{-N/2} \int k\left(\frac{h-t_1}{\sigma_1}\right) k\left(\frac{h-t_2}{\sigma_2}\right) dh$$

است. از آنجا که قضیه فیلتر جفت شده در پردازش سیگنال بیان می‌دارد که بهترین آشکارسازی سیگنال، با هموارسازی توسط تابعی انجام می‌پذیرد که دارای شکل یکسانی با فرم تابعی سیگنال باشد، از این رو نوعاً تابع  $k$  و تابع  $f$  همسان فرض می‌شوند. سیگموند و ورسلی (۱۹۹۵) نشان داده‌اند که در یک میدان گاوسی فضای مقیاس (۴) و با فرض  $f = k$  (که لزوماً توابعی گاوسی نیستند)، برای آزمون فرض  $\xi = 0$  در مقابل  $\xi = \xi^*$  لگاریتم آماره نسبت درستنمایی به صورت

$$\xi^* X(t_0, \sigma_0) - \xi^{*2} / 2 \quad (5)$$

خواهد بود. بنابراین با فرض  $\theta = (\xi, t_0, \sigma_0)$  و  $\theta_0 = (0, t_0, \sigma_0)$  و با استفاده از روابط (۲) و (۵)، توزیع پسین  $\theta$  را می‌توان در قالب قضیه زیر به دست آورد.

**قضیه ۱:** گیریم  $X(t, \sigma)$  میدان گاوسی فضای مقیاسی به شکل (۴) باشد، که در آن  $t$  در یک زیر مجموعه فشرده از  $[0, \infty)$  قرار دارد. اگر  $\theta = (\xi, t_0, \sigma_0)$  و  $\theta_0 = (0, t_0, \sigma_0)$  در این صورت با فرض  $f = k$  که الزاماً توابعی گاوسی نیستند، توزیع پسین  $\theta$  تحت پیشین  $\pi(\theta)$  عبارت است از:

$$\left[ \int_{\Theta} e^{[\xi x(t_0, \sigma_0) - \xi^2]} \pi(\theta) d\theta \right]^{-1} e^{[\xi x(t_0, \sigma_0) - \xi^2]} \pi(\theta). \quad (6)$$

**برهان:** نتیجه مستقیمی از رابطه (۲) و قضیه ۲ در فریدروحنی و همکاران (۲۰۰۶) است.

**فرع ۱:** تحت مفروضات قضیه فوق، اگر  $\theta$  دارای توزیع پیشین ناسره روی فضای  $\Theta$  باشد در این صورت توزیع پسین  $\theta$  متناسب با تابع  $\exp[\xi x(t_0, \sigma_0) - \xi^2 / 2]$  خواهد بود.

فرع ۲ : تحت مفروضات قضیه فوق، اگر  $\xi$  مستقل از  $(t_0, \sigma_0)$  دارای توزیع پشین ناسره روی  $(0, \infty)$  باشد در این صورت توزیع پشین  $\theta$  عبارت است از:

$$\left[ \int_{\Theta_1} \frac{\Phi(x)}{\phi(x)} \pi_1(\theta_1) d\theta_1 \right]^{-1} \cdot \frac{\phi(\xi - x)}{\phi(x)} \cdot \pi_1(\theta_1) \quad (V)$$

که در آن  $\Theta_1, \theta_1 = (t_0, \sigma_0)$  فضای پارامتر  $\theta_1$ ،  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  به ترتیب معرف تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

برهان : با استفاده از روشی مشابه اثبات رابطه (۹) در فریدروحانی و همکاران (۲۰۰۶) و با توجه به اینکه  $\frac{\phi(\xi - x)}{\phi(x)} = e^{\xi x(t_0, \sigma_0) - \frac{\xi^2}{2}}$  نتیجه (V) بدست می آید.

بنابراین با استناد به قضیه و نتایج فوق می توان براساس توزیع پشین (۶) نسبت به استنباط بیزی درباره پارامتر  $\theta = (\xi, t_0, \sigma_0)$  اقدام نمود. به عنوان مثال تحت شرایط نتیجه ۱، به سهولت می توان نمای توزیع پشین را که در این حالت معادل برآورد ماکسیمم درستنمایی است، از رابطه

$$(\hat{t}_0, \hat{\sigma}_0) = \arg \max_{(t_0, \sigma_0)} X^2(t_0, \sigma_0), \quad \hat{\xi} = X(\hat{t}_0, \hat{\sigma}_0) \quad (A)$$

به دست آورد. با این وجود متأسفانه در اغلب موارد توزیع پشین (۶) دارای فرم بسته نبوده و مشخصات مختلف این توزیع به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند. از اینرو بایستی با استفاده از روشهای عددی مانند فنون مبتنی بر محاسبات آماری مشخصات توزیع پشین را به گونه ای تقریب نمود. در بخش بعد با بهره گیری از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC) به معرفی الگوریتمی عمومی برای برآورد نماگرهای اصلی توزیع پشین (V) می پردازیم.

### ۳ برآورد بیزی پارامترهای میدان گاوسی فضای مقیاس به روش MCMC

همچنانکه می دانیم در مواردی که توزیع تحت بررسی به سادگی قابلیت نمونه گیری بر اساس روشهای مرسوم را نداشته باشد، از روشهای نمونه گیری تقریبی می توان استفاده نمود. روش MCMC یکی از روشهایی است که از توزیع مورد نظر به عنوان توزیع مانای یک زنجیر مارکوف، نمونه گیری می کند.

با توجه به اینکه برای تعیین هر گونه مشخصه توزیع پسین (۶) بایستی بتوان ضریب ثابت  $[\int_{\Theta} e^{[\xi x(t_0, \sigma_0) - \frac{\xi^2}{2}]} \pi(\theta) d\theta]^{-1}$  را محاسبه نمود و از آنجا که این ضریب نوعاً به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست، می توان از روش MCMC برای تولید نمونه  $\{\theta^{(n)}\}$  از توزیع پسین (۶) استفاده نمود. به ویژه تحت شرایط نتیجه ۲ توزیع های شرطی  $\xi$  به شرط  $\theta_1 = (t_0, \sigma_0)$  و بالعکس را می توان تعیین نمود. لذا با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز و ترکیب آن با روش نمونه گیر گیبز می توان روش عمومی تولید نمونه از توزیع پسین (۷) را معرفی کرد. به سهولت می توان نشان داد که تحت شرایط نتیجه ۲ توزیع های پسین شرطی از روابط

$$\pi(\xi|\theta_1, x) = \frac{\phi(\xi - x)}{1 - \Phi(-x)} \quad (9)$$

$$\pi(\theta_1|\xi, x) = \frac{\pi_1(\theta_1)\phi(\xi - x)/\phi(x)}{\int_{\Theta_1} \pi_1(\theta_1)\phi(\xi - x)/\phi(x)d\theta_1} \quad (10)$$

بدست می آیند. اینک با ترکیب روش نمونه گیر گیبز و الگوریتم متروپلیس-هستینگز دنباله ای از نمونه های  $\{(\xi^{(n)}, \theta_1^{(n)})\}$  را از توزیع پسین (۷) تولید می کنیم. گام های این الگوریتم ترکیبی به شرح زیر است:

(۱) قرار می دهیم  $\theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)})$ ،  $n = 0$  را از توزیع پیشین  $\pi_1(\theta_1)$  تولید می کنیم.

(۲) تحت  $\theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)})$  از توزیع (۹)،  $\xi^{(n+1)}$  را تولید می کنیم.

(۳)  $\theta^* = (t_0^*, \sigma_0^*)$  را از توزیع پیشنهادی  $q(\theta_1^{(n)}, \theta^*)$  و  $u$  را از توزیع یکنواخت (۱ و ۰) تولید می کنیم.

(۴) کسر  $\alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*) = \min\left\{\frac{P(\theta^*|\xi^{(n+1)}, x).q(\theta_1^{(n)}, \theta^*)}{P(\theta_1^{(n)}|\xi^{(n+1)}, x).q(\theta_1^{(n)}, \theta^*)}, 1\right\}$  را بدست می آوریم.

(۵) اگر  $u < \alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*)$  در اینصورت قرار می دهیم  $\theta_1^{(n+1)} = \theta^*$  و در غیر اینصورت  $\theta_1^{(n+1)} = \theta_1^{(n)}$ .

(۶) قرار می دهیم  $n = n + 1$  و به گام ۲ می رویم.

با تکرار الگوریتم فوق و با صرف نظر کردن از  $b$  مقدار اولیه در دنباله  $\{\theta^{(n)}\} = \{(\xi^{(n)}, \theta_1^{(n)})\}$  نمونه‌ای تقریباً تصادفی از توزیع پسین (۷) بدست خواهد آمد، که از این نمونه می‌توان در برآورد پارامتر  $\theta$  استفاده نمود. به عنوان مثال برای برآورد میانگین توزیع پسین، می‌توان میانگین نمونه‌های تولیدی، یعنی

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{n-b} \sum_{i=b+1}^n \theta_j^{(i)} \quad j = 1, \dots, N+2$$

را به عنوان تقریبی از برآورد بیزی در نظر گرفت، که در آن  $b$  را نقطه برش دنباله  $\{\theta_j^{(i)}\}$  نامیده و روشهای مختلفی برای تعیین آن ارائه شده است. در این مقاله یکی از این روشها، موسوم به روش ارزیابی مجموع تجمعی مورد استفاده قرار گرفته است.

**حالت خاص:** فرض کنید پارامتر مکانی سیگنال مستقل از دو پارامتر پهنا و مقیاس دارای توزیع پیشین نرمال  $N$  متغیره با میانگین  $\mu_0$  و ماتریس واریانس-کوواریانس  $\Sigma_0$  باشد. همچنین  $\sigma$  مستقل از دو پارامتر دیگر دارای توزیع پیشین یکنواخت روی (۱ و ۰) باشد. در این صورت به شرط  $t_0^{(n)}$  و  $\sigma_0^{(n)}$  توزیع پیشنهادی

$$q(\theta_1^{(n)}, \theta_1) = N(t_0^{(n)}, \Sigma_0) \cdot I_{(0,1)}(\sigma_0^{(n)}) \quad (11)$$

را در نظر می‌گیریم. با محاسبات نه چندان پیچیده گام‌های شش گانه تولید دنباله  $\{\theta^{(n)}\}$  از توزیع پسین (۷) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(1) \quad \text{قرار می‌دهیم } n = 0, \theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)}), \text{ را از توزیع پیشین } \pi_1(\theta_1) = N(\mu_0, \Sigma_0) I_{(0,1)}(\sigma_0) \text{ تولید می‌کنیم.}$$

$$(2) \quad \text{تحت } \theta_1^{(n)} = (t_0^{(n)}, \sigma_0^{(n)}) \text{ از توزیع شرطی (9)، } \xi^{(n+1)} \text{ را تولید می‌کنیم.}$$

$$(3) \quad \theta^* = (t_0^*, \sigma_0^*) \text{ را از توزیع پیشنهادی (11) و } u \text{ را از توزیع یکنواخت (10) تولید می‌کنیم.}$$

$$(4) \quad \text{با توجه به تقارن توزیع پیشنهادی نسبت به دو مولفه خود، } \alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*) \text{ را از طریق } \{1, \min\left\{\frac{\pi_1(\theta^*)\phi(\xi^{(n+1)} - x(\theta^*)) / \phi(x(\theta^*))}{\pi_1(\theta_1^{(n)})\phi(\xi^{(n+1)} - x(\theta_1^{(n)})) / \phi(x(\theta_1^{(n)}))}\right\}, 1\} \text{ بدست می‌آوریم.}$$

۱۳۰ ..... برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی

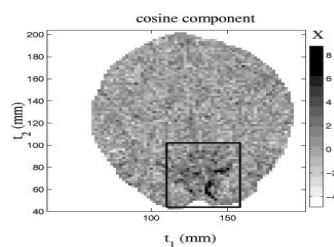
(۵) اگر  $u < \alpha(\theta_1^{(n)}, \theta^*)$  در اینصورت قرار می‌دهیم  $\theta_1^{(n+1)} = \theta^*$  و در غیر اینصورت  $\theta_1^{(n+1)} = \theta_1^{(n)}$ .

(۶) قرار می‌دهیم  $n = n + 1$  و به گام ۲ می‌رویم.

در بخش بعد با استفاده از توزیع پیشین فوق و الگوریتم ارائه شده به برآورد بیزی پارامترهای مکان، مقیاس و پهنای سیگنال می‌پردازیم.

#### ۴ کاربرد در fMRI

در این بخش با استفاده از روش معرفی شده در بخش ۲، برآورد بیزی پارامترهای مدل گاوسی فضای مقیاس را براساس تصاویر fMRI حاصله از مطالعه انجام شده در موسسه عصب شناسی مونترآل کانادا، محاسبه می‌کنیم. شکل ۱ تصویر مولفه



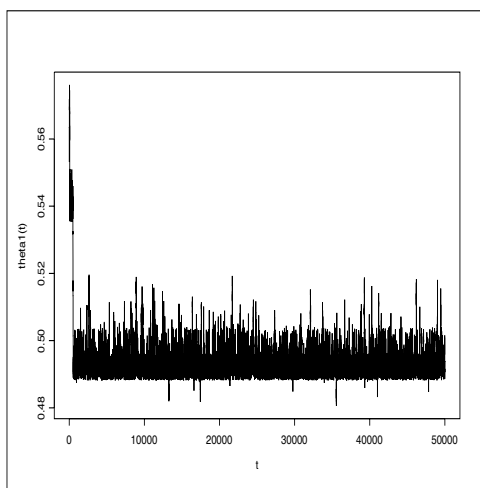
شکل ۱: مولفه کسینوس در یک تصویر واقعی تشدید مغناطیسی عملکردی (شفیعی و همکاران، ۲۰۰۳)

کسینوس سیگنال، پس از تلخیصی که بر روی سری زمانی تصاویر حاصله اعمال شده است، را نشان می‌دهد. پارامترهای این تصویر دو بعدی عبارتند از  $\theta = (\xi, t_{01}, t_{02}, \sigma_0)$ . با فرض برقراری شرایط نتیجه ۲ و با استفاده از رابطه (۸)، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای پهنای، مکان (طول و عرض) و مقیاس سیگنال محاسبه و در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی مولفه پهنا، مکان و مقیاس سیگنال.

پارامتر	$\xi$	$t_{01}$	$t_{02}$	$\sigma_0$
برآورد	۱۷/۳۳۰	۰/۵۳۵	۰/۲۵۲	۱/۰۰۰

به منظور بدست آوردن برآورد بیزی پارامترهای فوق، برای مؤلفه مکان سیگنال توزیع پیشین نرمال دو متغیره مستقل با پارامترهای  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = (0/50, 0/50, 0/1, 0/1, 0/50)$  را در نظر گرفته‌ایم. البته این توزیع در ناحیه جستجوی مغز بریده شده است. توزیع پیشین برای مؤلفه‌های مقیاس و پهنا نیز همانند توزیع پیشین (۱۱) انتخاب شده‌اند. براساس الگوریتم ترکیبی پیش گفته با ۵۰۰۰۰ تکرار، دنباله‌ای از پارامترها تولید شده‌اند، که به عنوان نمونه دنباله پارامتر طول سیگنال در شکل ۲ ملاحظه می‌شود.

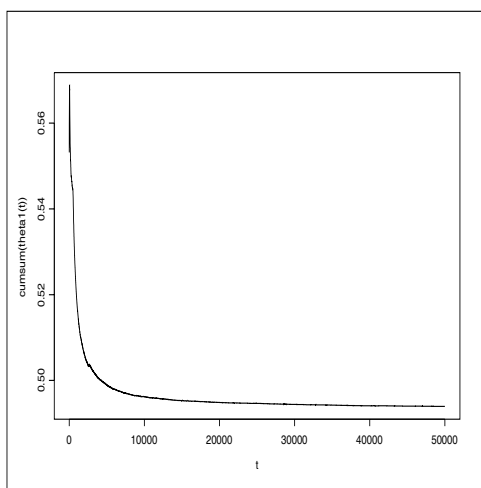


شکل ۲: دنباله پارامتر طول سیگنال تولید شده

با توجه به نمودار مزبور علیرغم آنکه همگرایی دنباله تولیدی به خوبی مشهود است، اما برای کنترل دقیق‌تر همگرایی این گونه دنباله‌ها و به علاوه تعیین نقطه برش  $b$  که در تقریب برآوردهای بیزی مورد نیاز است، می‌توان از روش ارزیابی مجموع تجمعی سود جست. فرض کنید  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \theta^{(j)}$  در اینصورت به نمودار

۱۳۲ ..... برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی

حاصل از رسم تابع  $\sum_{j=1}^t [\theta^{(j)} - \hat{\theta}_n]$  در مقابل  $t$  ارزیابی مجموع تجمعی گویند. اگر تابع مزبور با افزایش  $t$  رفتاری مجانبی داشته باشد، این ویژگی نشان از همگرایی دنباله تولیدی در الگوریتم MCMC دارد. جهت ارزیابی همگرایی دنباله‌های تولیدشده، نمودارهای مجموع تجمعی متناظر با هر یک از پارامترهای مکان، مقیاس و پهنای سیگنال رسم و مورد توجه قرار گرفته‌اند. شکل ۳ نمودار مجموع تجمعی دنباله پارامتر طول سیگنال را نشان می‌دهد. با توجه به رفتار مجانبی این نمودار، همگرایی دنباله تولید شده تایید می‌شود و به علاوه با ملاحظه این نمودار تکرار ۱۲۰۰۰ ام را می‌توان به عنوان نقطه برش مناسب جهت برآورد دقیق‌تر پارامترهای سیگنال در نظر گرفت. البته ارزیابی مجموع تجمعی برای سایر مولفه‌های سیگنال نیز گویای همگرایی دنباله‌های تولید شده در الگوریتم پیشنهادی بوده و به علاوه نقطه برش مزبور را تایید می‌کنند.



شکل ۳: نمودار مجموع تجمعی دنباله پارامتر طول سیگنال تولید شده

اینک پس از حصول اطمینان از کیفیت مقادیر تولید شده، می‌توان با استفاده از مباحث پیشین برآورد بیزی پارامترهای مورد نظر را بدست آورد. جدول ۲ برآورد بیزی پارامترهای سه گانه سیگنال را براساس میانگین و نمای توزیع پسین (۷)، به ترتیب برای دو انتخاب مختلف (۰/۱ و ۰/۱ و ۰/۵ و ۰/۵) و

فریدروحانی، شفیع هولقی ..... ۱۳۳.

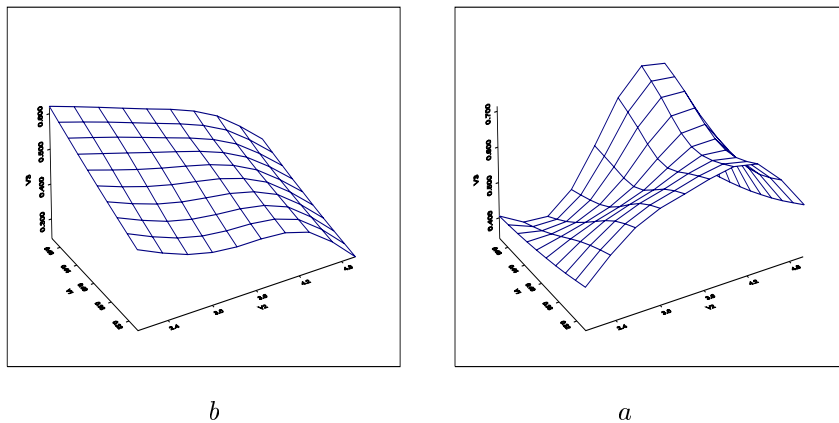
( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/252$  و  $0/535$ ) به عنوان پارامترهای توزیع پیشین (۱۱) نشان می‌دهند. سطرهای دوم و سوم این جدول به ترتیب معرف میانگین و نمای توزیع پسین متناظر با پارامتر پیشینی ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/5$  و  $0/5$ ) و سطرهای چهارم و پنجم معرف مقادیر مشابه و متناظر با پارامتر پیشینی ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/252$  و  $0/535$ ) می‌باشند. متذکر می‌گردد انتخاب ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/252$  و  $0/535$ ) به عنوان پارامترهای توزیع پیشین مکان سیگنال برگرفته از برآورد ماکسیمم درست‌نمایی مؤلفه‌های سیگنال است که بیشتر در جدول ۱ ارائه شد.

جدول ۲: برآورد بیزی مؤلفه پهنا، مکان و مقیاس سیگنال تحت پیشین (۱۱) با پارامترهای ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/5$  و  $0/5$ ) و ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/252$  و  $0/535$ )

پارامتر	$\xi$	$t_{0.1}$	$t_{0.2}$	$\sigma_0$
B1-Mean	۹/۶۴۷	۰/۴۹۳	۰/۳۵۰	۰/۹۷۸
B1-Mode	۱۳/۹۶۷	۰/۵۲۰	۰/۳۶۲	۱/۰۰۰
B2-Mean	۱۷/۲۴۸	۰/۵۵۵	۰/۲۹۵	۰/۹۸۷
B2-Mode	۲۱/۰۲۷	۰/۵۶۷	۰/۲۹۹	۱/۰۰۰

همچنانکه ملاحظه می‌شود برآورد مکان و مقیاس سیگنال در تمامی روش‌های پیشنهادی، اعم از روش ماکسیمم درست‌نمایی و روش بیزی، بسیار نزدیک به یکدیگرند. با این وجود برآورد بیزی پهنا سیگنال به نظر تحت تاثیر پیشین‌های انتخابی تفاوت چشمگیری را نشان می‌دهد. به منظور بررسی تاثیر انتخاب پارامترهای توزیع پیشین در برآورد بیزی میانگین پسین، این پارامترها به صورت عمومی ( $0/1$  و  $0/1$  و  $0/5$  و  $0/5$ ) در نظر گرفته شده‌اند. شکل‌های a.۴ و b.۴ به خوبی تاثیر انتخاب پارامترهای مختلف توزیع پیشین را در برآورد بیزی مزبور نشان می‌دهند.

همچنانکه در شکل a.۴ ملاحظه می‌شود بیشترین برآورد میانگین پسین برای مؤلفه طول سیگنال در مقادیر میانی  $\mu_2$  و مقادیر بالای  $\mu_1$  بدست می‌آید. این در حالی است که در مؤلفه عرض سیگنال، افزایش مقدار  $\mu_1$  و بالعکس کاهش سطح  $\mu_2$  باعث افزایش برآورد میانگین پسین طول سیگنال می‌شود.



شکل ۴: برآورد میانگین پسین مولفه (a): طول و (b): عرض سیگنال

از سوی دیگر مقایسه نتایج حاصل از برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآوردهای بیزی مبتنی بر میانگین و نمای توزیع پسین، براساس مشخصه میانگین توان دوم خطاها که از رابطه زیر بدست می آید نیز جالب توجه خواهد بود.

$$E^2 = \frac{1}{n * m} \sum_t [Z(t) - \hat{\xi} \hat{\sigma}_o^{-N/2} f(\frac{t - \hat{t}_o}{\hat{\sigma}_o})]^2$$

که در آن  $n$  و  $m$  به ترتیب تعداد پیکسل‌های سطر و ستون تصویر مورد نظراست. مقادیر این کمیت برای تصویر مورد آزمون در جدول ۳ ارائه شده است. همچنانکه ملاحظه می شود از نقطه نظر میانگین توان دوم خطاها، برآوردگر میانگین توزیع پسین با انتخاب پارامترهای پیشین (۰ و ۱ و ۰/۱ و ۰/۵ و ۰/۵) از وضعیت مطلوب تری برخوردار است.

جدول ۳: میانگین توان دوم خطاهای برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی

B2-Mean	B2-Mode	B1-Mean	B1-Mode	MLE	روش برآورد
۸/۹۰	۱۲/۵۱	۳/۰۸	۵/۷۸	۸/۱۳	میانگین توان دوم خطاها

### بحث و نتیجه گیری

هدف این مقاله ارائه روشی برای محاسبه برآوردهای بیزی پارامترهای یک میدان تصادفی فضای مقیاس بوده است. بدیهی است در این راستا همانند هر رهیافت بیزی تعیین توزیع پیشین و مقادیر پارامترهای این توزیع حائز اهمیت خواهد بود. در این راستا استفاده از روشهای مختلف انتخاب توزیع پیشین اعم از بیز سلسله مراتبی، بیز تجربی و سایر روشهای مرسوم می تواند به گزینه قابل دفاعی به عنوان توزیع پیشین در یک مسئله واقعی منجر شود. اما آنچه از اهمیت برخوردار است توانایی ما برای محاسبه برآوردهای بیزی پارامترهای یک میدان تصادفی گاوسی مقیاس تحت هر توزیع پیشین معین می باشد، که این امر براساس الگوریتم پیشنهادی انجام پذیر خواهد بود. متذکر می شود در مواردی نظیر روش بیز تجربی یا سلسله مراتبی ترکیب روش پیشنهادی با روش های بهینه سازی عددی مانند الگوریتم EM می تواند به نتایج جالب توجهی منجر شود که خارج از اهداف این مقاله است.

### تقدیر و تشکر

این مقاله حاصل طرح پژوهشی مصوب در معاونت پژوهشی دانشگاه شهید بهشتی است که بدینوسیله از حمایت مالی این دانشگاه قدردانی به عمل می آید.

### مراجع

- Farid Rohani, M., Shafie, K., and Noorbaloochi, S. (2006), *A Bayesian Signal Detection Procedure for Scale Space Random Fields.*, The Canadian Journal of Statistics, **34(2)**, 311-325.

برآورد بیزی پارامترهای سیگنال در یک میدان تصادفی گاوسی ..... ۱۳۶

Friston, K. J., Holmes, A. P., Poline, J. B., Grasby, P. J., Williams, S. C. R., and Frackowiak, R. S. J. (1995), *Analysis of fMRI Time Series Revisited*. *NeuroImage*, **2**, 45-53.

Friston, K. J., Jezzard, P., and Turner, R. (1994), *Analysis of Functional MRI Time Series Human*. *Human Brain Mapping*, **1**, 153-171.

Friston, K. J., and Penny, W. (2002), *Posterior Probability Maps and SPMs*. *NeuroImage*, **19(3)**, 1240-1249.

Friston, K. J., Penny, W., Phillips, C., Kiebel, S., Hinton, G., and Ashburner, J. (2002), *Classical and Bayesian Inference in Neuroimaging: Theory*. *NeuroImage*, **16**, 465-483.

Genovese, C. R. (2000), *A Bayesian Time-course Model for Functional Magnetic Resonance Image Data*. *Journal of the American Statistical Association*, **95(451)**, 691-703.

Goseel, C., Fahrmeir, L., and Auer, D. (2001), *Bayesian Modeling of the Hemodynamic Response Function in Bold fMRI*. *NeuroImage*, **14**, 140-148.

Penny, W., Kiebel, S., and Friston, K. J. (2003), *Variational Bayesian Inference for fMRI Time Series*. *NeuroImage*, **19(3)**, 724-741.

Shafie, K. (1998), *The Geometry of Gaussian Rotation Space Random Fields*. PhD Thesis, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.

Shafie, K., Sigal, B., Siegmund, D. O., and Worsley, K. J. (2003), *Rotation Space Random Fields with an Application to fMRI Data*. *Annals of Statistics*, **31**, 1732-1771.

فریدروحانی، شفیع هولقی ..... ۱۳۷.

Siegmund, D. O., and Worsley, K. J. (1995), *Testing for Signal with Unknown Location and Scale in a Stationary Gaussian Random Field*. Annals of Statistics, **23**, 608-639.

Woolrich, M., Behrens, T., Beckmann, C., Jenkinson, M., and Smith, S. (2004), *Multivariate Linear Modeling for fMRI Group Analysis Using Bayesian Inference*. NeuroImage, **21**, 1732-1747.

Worsley, K. J. (1994), *Local Maxima and the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of  $\chi^2$ ,  $F$  and  $t$  Fields*. Classical and Bayesian Inference in Neuroimaging: Theory. NeuroImage, **16**, 465-483.

Worsley, K. J. (2001), *Testing for Signals with Unknown Location and Scale in a  $\chi^2$  Random Field, with an Application to fMRI*. Advances in Applied Probability, **33**, 773-799.

Worsley, K. J., Evans, A., Marrett, S. and Neelin, P. (1992), *A Three Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain*. Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, **12**, 900-918.

Worsley, K. J. and Friston, K. J. (1995), *Analysis of fMRI Time-series Revisited-again*. Neuroimage, **2**, 173-181.