

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۲، ص ۲۰۱-۲۱۱

## آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی

ملیحه عباس نژاد، مرضیه شکوری

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۱۲/۲۰

**چکیده:** آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای آنتروپی اولین بار توسط ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) به کمک برآورد اطلاع کولبک-لایبلر معرفی شد. ما در این مقاله ابتدا اطلاع رنی را به روشی همانند روش به کار گرفته شده توسط کوریا (۱۹۹۵) برای برآورد آنتروپی شانون، برآورد نموده و سپس از آن به عنوان آماره آزمون نمایی بودن توزیع استفاده می‌کنیم. در ادامه توان آزمون پیشنهادی را با چند آزمون دیگر به کمک شبیه‌سازی مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش ارائه شده نسبت به برخی از آزمون‌های معروف توان بالاتری دارد.

**واژه‌های کلیدی:** آنتروپی، اطلاع کولبک-لایبلر، اطلاع رنی، آزمون نمایی بودن.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ملیحه عباس نژاد، ma\_abbasnejad@yahoo.com  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲G۱۰، ۹۴A۱۷

بسیاری از تحلیل‌های آماری، از قبیل آزمون‌های طول عمر، بر مبنای نمایی بودن مشاهدات پایه‌ریزی شده‌اند. از این رو آزمون نمایی بودن همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی با تابع توزیع  $F(x)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد. برای مثال  $X$  را می‌توان طول عمر یک قطعه تولیدی در نظر گرفت. آزمون فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0 : f(x) = f_0(x, \theta) \\ H_1 : f(x) \neq f_0(x, \theta) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $x > 0, \theta > 0$   $f_0(x, \theta) = \theta \exp(-\theta x)$  تابع چگالی احتمال توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  است. محققین زیادی از جمله لی لی فورس (۱۹۶۹)، ون سوست (۱۹۶۹)، فینکل اشتاین و شیفر (۱۹۷۱)، استی فنز (۱۹۷۴) و هریس (۱۹۷۶) آماره‌های متفاوتی را برای آزمون فرضیه‌های فوق معرفی نمودند. برای اولین بار ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) از برآورد اطلاع کولبک-لایبلر به عنوان آماره‌ی آزمون برای انجام آزمون فرضیه  $H_0$  در مقابل  $H_1$  استفاده نمودند. برای انتخاب بین دو فرضیه  $H_0$  و  $H_1$  می‌توان از فاصله کولبک-لایبلر برای تشخیص بین دو تابع  $f(x)$  و  $f_0(x)$  استفاده نمود که به صورت

$$D(f, f_0) = \int_0^{+\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{f_0(x)} dx \quad (1)$$

تعریف می‌شود. همانطور که می‌دانیم  $D(f, f_0)$  یک فاصله نامتقارن بین  $f$  و  $f_0$  است. مقدار  $D(f, f_0)$  تحت فرضیه صفر برابر صفر بوده و مقادیر بزرگ  $D(f, f_0)$  از فرضیه  $H_1$  پشتیبانی می‌کنند. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲)، با فرض اینکه میانگین  $X$  متناهی باشد، آماره آزمون را به صورت

$$D(f, f_0) = -H(f) - \log(\theta) + 1$$

بیان نمودند، که در آن  $H(f) = -\int_0^{+\infty} f(x) \log f(x) dx$  آنترنپی شانون توزیع  $f$  است. سپس از برآورد آنترنپی واسیچک (۱۹۷۶) برای برآورد آماره آزمون استفاده

نموده و نشان دادند که آزمون ارائه شده بر مبنای اطلاع کولبک-لایبیلر توان‌های بالاتری در مقایسه با سایر آزمون‌های موجود دارد. آزمون‌های نیکویی برازش متعددی بر مبنای برآورد اطلاع کولبک-لایبیلر و آنتروپی شانون معرفی شده است. برای مثال، چوی و همکاران (۲۰۰۴) از برآورد آنتروپی ون - ایس (۱۹۹۲) و برآورد آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) در برآورد اطلاع کولبک - لایبیلر استفاده نمودند. تافر (۲۰۰۲) ابتدا با استفاده از یک تبدیل توزیع نمایی را به توزیع یکنواخت تبدیل نموده و آنگاه برآورد آنتروپی شانون توزیع یکنواخت را از روش کوریا و واسیچک به عنوان آماره آزمون به کار گرفت. پارک و پارک (۲۰۰۳) از برآورد تعدیل یافته آنتروپی که توسط ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) ارائه شده بود، کمک گرفته و آماره‌ای برای آزمون نمایی بودن و نرمال بودن توزیع معرفی کردند. یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸) نیز با معرفی برآوردی جدید از تابع توزیع، آنتروپی شانون را برآورد نموده و از آن برای آزمون نمایی بودن و نرمال بودن توزیع استفاده نمودند. همچنین علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷) آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر آنتروپی برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت را با سایر آزمون‌های موجود مقایسه نمودند. آزمون نمایی بودن توزیع بر مبنای برآورد اطلاع کولبک-لایبیلر، برای داده‌های سانسور شده نوع-دو توسط پارک (۲۰۰۵) و برای داده‌های سانسور فزاینده نوع-دو توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) ارائه شد. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) نیز از برآورد آنتروپی شانون آماره‌های مرتب برای آزمون متقارن بودن توزیع کمک گرفتند.

در بخش دوم مقاله، تعریف فاصله رنی بیان می‌شود. سپس یک آزمون نمایی بودن توزیع بر مبنای آن ارائه شده و در بخش سوم توان آزمون پیشنهادی با چند آزمون دیگر مقایسه می‌گردد. در ادامه، آزمون جدیدی بر اساس آماره ارائه شده در بخش دوم معرفی و توان آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

## ۲ آماره آزمون

فاصله دیگری که می توان به منظور انتخاب بین  $H_0$  و  $H_1$  استفاده نمود، فاصله رنی مرتبه  $s$  بین  $f(x)$  و  $f_0(x)$  است که به صورت

$$D_s(f, f_0) = \frac{1}{s-1} \log \int_0^{+\infty} f(x) \left[ \frac{f(x)}{f_0(x)} \right]^{s-1} dx \quad s > 0, s \neq 1 \quad (2)$$

تعریف می شود. به راحتی می توان نشان داد که  $\lim_{s \rightarrow 1} D_s(f, f_0) = D(f, f_0)$  (رنی، ۱۹۶۱).

از آنجا که مقدار  $D_s(f, f_0)$  نیز همانند اطلاع کولبک-لایبلر تحت فرضیه صفر، صفر است و مقادیر بزرگ آن از فرضیه  $H_1$  پشتیبانی می کنند، طبیعی است که از فاصله رنی بین  $f$  و  $f_0$  به عنوان آماره آزمون فرضیه  $H_0$  در مقابل  $H_1$  استفاده نمود. بنا بر رابطه (۲) فاصله رنی بین دو توزیع  $f(x)$  و  $f_0(x)$  به صورت

$$\begin{aligned} D_s(f, f_0) &= \frac{1}{s-1} \log \int_0^{+\infty} f(x) \left[ \frac{f(x)}{\theta \exp(-\theta x)} \right]^{s-1} dx \\ &= -\log \theta + \frac{1}{s-1} \log \int_0^{+\infty} f^s(x) e^{\theta(s-1)x} dx \end{aligned}$$

است، که با تغییر متغیر  $F(x) = p$  به صورت

$$D_s(f, f_0) = \frac{1}{s-1} \log \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right]^{1-s} e^{\theta(s-1)F^{-1}(p)} dp \quad (3)$$

حاصل می شود. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $F$  باشند. همانند روش واسیچک برای برآورد آنتروپی شانون، با استفاده از تابع توزیع تجربی  $F_n$  به جای تابع توزیع  $F$  و عملگر تفاضل به جای عملگر دیفرانسیل، مشتق  $F^{-1}(p)$  به وسیله  $\frac{n}{2m}(X_{i+m:n} - X_{i-m:n})$  برای  $\frac{i-1}{n} < p < \frac{i}{n}$   $i = m+1, m+2, \dots, n-m$  برآورد می شود، که در آن  $X_{i:n}$  آماره مرتب  $i$ ام و  $m$  یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از  $n/2$  است. همچنین اگر  $p \leq \frac{m}{n}$  یا  $p > \frac{n-m}{n}$  در این صورت از تفاضل های یکطرفه  $X_{i+m:n} - X_{1:n}$  یا  $X_{n:n} - X_{i-m:n}$  به جای تفاضل  $X_{i+m:n} - X_{i-m:n}$  استفاده می شود. بنابراین

برآورد رابطه (۳) عبارت است از

$$D_{sv} = \log(\bar{X}) + \frac{1}{s-1} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\frac{1}{n} \exp\left(\frac{X_{i:n}}{\bar{X}}\right)}{X_{i+m:n} - X_{i-m:n}} \right]^{(s-1)}$$

که در آن برای  $X_{i:n} = X_{1:n}, i < 1$  و برای  $X_{i:n} = X_{n:n}, i > n$  است. بدیهی است که فرضیه  $H_0$  به نفع  $H_1$  برای مقادیر بزرگ  $D_{sv}$  رد می‌شود. این برآورد توسط عباس‌نژاد (۱۳۸۶) به عنوان آماره آزمون نمایی بودن مورد استفاده قرار گرفت و نشان داده شد که به ازای  $s = 0.2$  آزمون در بسیاری از حالات توان‌های بالاتری نسبت به آماره ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) دارد.

در این مقاله از روشی که توسط کوریا (۱۹۹۵) برای برآورد آنتروپی معرفی شد، استفاده نموده و  $D_s(f, f_0)$  را به صورت

$$D_{sc} = \log(\bar{X}) + \frac{1}{s-1} \log \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i \exp\left(\frac{X_{i:n}}{\bar{X}}\right))^{s-1} \right]$$

برآورد می‌کنیم، که در آن

$$b_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{j:n} - \bar{X}_{i:n})(j-i)}{(n \sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{j:n} - \bar{X}_{i:n})^2)}, \quad \bar{X}_{i:n} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=i-m}^{i+m} X_{j:n}$$

مقادیر بزرگ  $D_{sv}$  از  $H_1$  پشتیبانی می‌کنند، بنابراین فرضیه  $H_0$  را به نفع  $H_1$  در سطح معنی‌داری  $\alpha$  رد می‌کنیم اگر  $D_{sc} \geq d_{sc}(\alpha)$  که در آن مقدار بحرانی  $d_{sc}(\alpha)$  به وسیله چندک  $\alpha$  ام از توزیع آماره  $D_{sc}$  تحت فرضیه  $H_0$  محاسبه می‌شود.

جدول ۱: مقادیر بحرانی آزمون  $D_{sc}$  به ازای مقادیر مختلف  $s$  و  $\alpha = 0.05$

n	مقدار s				
	0.2	0.5	0.9	1.5	2
10	0.3305 (2)	0.3108 (2)	0.4674 (3)	0.6154 (4)	0.8307 (4)
15	0.1922 (2)	0.2397 (2)	0.3162 (3)	0.4545 (5)	0.7084 (5)
20	0.1270 (2)	0.1752 (3)	0.2366 (3)	0.3753 (7)	0.6208 (4)
25	0.0843 (2)	0.1307 (3)	0.1906 (4)	0.3196 (6)	0.5640 (4)
30	0.0574 (2)	0.1044 (2)	0.1604 (5)	0.2809 (5)	0.5181 (4)
50	0.0062 (2)	0.0484 (3)	0.0964 (6)	0.1933 (6)	0.3995 (4)

از آنجا که توزیع  $D_{sc}$  تحت فرضیه  $H_0$  پیچیده است، برای محاسبه مقادیر بحرانی از روش مونت کارلو استفاده می‌کنیم. برای این منظور به ازای مقادیر

۲۰۶ ..... آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی

مختلف  $s$  و هر مقدار  $m < \frac{n}{4}$ ،  $10000$  نمونه تصادفی به حجم  $n$  از توزیع نمایی استاندارد تولید نموده و چندک  $\alpha$  م به عنوان مقدار بحرانی تعیین می‌شود. مقادیر بحرانی به ازای مقادیر مختلف  $s$  در جدول ۱ ارائه شده‌اند، که مقدار داخل پرانتز نشان دهنده مقدار  $m$  ای است که مقدار بحرانی به ازای آن کمترین است. در بخش بعدی که توان آزمون را به تفصیل مورد مطالعه قرار خواهیم داد، مشاهده می‌شود که مقادیر معینی برای  $m$  و  $s$  تعیین نمی‌شود.

### ۳ توان آزمون

برای محاسبه توان آزمون پیشنهادی و مقایسه آن با آزمونهای قبلی، توزیع‌های جانشین زیر در نظر گرفته شده‌اند.

- توزیع گاما با پارامترهای شکل ۲ و ۳.
- توزیع وایبل با پارامترهای شکل ۵/۰ و ۸/۰ و ۲.
- توزیع بتا با پارامترهای (۱ و ۱) و (۲ و ۱) و (۱ و ۲) و (۱ و ۵/۰).
- توزیع لگ نرمال با پارامترهای شکل ۶/۰ و ۱ و ۱/۲.
- توزیع کی دو با درجات آزادی ۱ و ۲ و ۳.

در جدول ۲ توان آزمون پیشنهادی  $D_{sc}$ ، آزمون ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲)  $KL_{mn}$  و توان آزمون مبتنی بر اطلاع رنی، عباس‌نژاد (۱۳۸۶)  $D_{sv}$  به ازای  $\alpha = 0/05$  و  $n = 10, 20, 50$  ارائه شده‌اند. مقادیر داخل پرانتز به ترتیب نشان دهنده مقادیر  $s$  و  $m$  ای هستند که توان آزمون پیشنهادی به ازای آنها ماکسیمم شده است. از جدول ۲ مشاهده می‌شود که آماره ارائه شده در بیشتر موارد توان‌های بالاتری نسبت به آزمون‌های  $KL_{mn}$  و  $D_{sv}$  دارد.

همانطور که پیشتر گفته شد متأسفانه معیار دقیقی برای تعیین مقادیر بهینه  $m$  و  $s$  وجود ندارد و به طور کلی این مقادیر به فرضیه جانشین بستگی دارند. مطالعات مختلف مربوط به توان آزمون نشان می‌دهند که مقادیری از  $m$  و  $s$  که کوچکترین مقادیر بحرانی را تولید می‌کنند، منجر به آزمون‌های با توان بیشتر می‌شوند. علاوه بر این بر اساس شبیه‌سازی‌های انجام شده توان آزمون پیشنهادی به ازای مقادیر بزرگ

جدول ۲: مقایسه توان‌ها برای  $n = 10, 20, 50$  و  $\alpha = 0.05$

نام توزیع	n	آماره آزمون		
		$D_{sc}$	$D_{sv}$	$KL_{mn}$
Weibull(0/5, 1)	10	0/5416 (2,3)	0	0/1050
	20	0/1955 (2,3)	0	0/5359
	50	0/9991 (2,4)	0	0/9768
Weibull(0/8, 1)	10	0/1243 (2,4)	0/0012	0/0159
	20	0/2208 (2,4)	0/0045	0/0299
	50	0/4100 (2,4)	0/0107	0/1053
Weibull(2, 1)	10	0/7672 (0/5, 4)	0/7495	0/6987
	20	0/9735 (0/2, 9)	0/9743	0/9298
	50	0/9997 (0/9, 5)	1	0/9999
Gamma(2, 1)	10	0/3146 (0/2, 4)	0/3563	0/3203
	20	0/6048 (0/2, 7)	0/6347	0/5062
	50	0/8387 (0/5, 4)	0/8196	0/8316
Gamma(3, 1)	10	0/6950 (0/5, 3)	0/6779	0/5987
	20	0/9222 (0/2, 5)	0/9487	0/8859
	50	0/9979 (0/9, 4)	0/9983	0/9986
Lnorm(0, 0/6)	10	0/6430 (0/2, 1)	0/6195	0/6116
	20	0/9025 (0/2, 1)	0/8994	0/9033
	50	0/9984 (0/5, 1)	0/9779	0/9994
Lnorm(0, 1)	10	0/1347 (2, 4)	0/0894	0/0814
	20	0/2310 (1/5, 4)	0/1204	0/1538
	50	0/5253 (1/5, 8)	0/1434	0/3555
Lnorm(0, 1/2)	10	0/2149 (2, 3)	0/0130	0/0487
	20	0/4107 (2, 5)	0/0224	0/1125
	50	0/6913 (2, 5)	0/0324	0/3829
Chisq(1)	10	0/2456 (2, 2)	0	0/0176
	20	0/5123 (2, 3)	0	0/1201
	50	0/8811 (2, 3)	0	0/5786
Chisq(2)	10	0/0523 (0/2, 4)	0/0457	0/0459
	20	0/0525 (0/2, 5)	0/0492	0/0498
	50	0/0561 (0/2, 3)	0/0568	0/0523
Chisq(3)	10	0/1909 (0/2, 2)	0/1991	0/1802
	20	0/3059 (0/2, 7)	0/3123	0/2259
	50	0/4501 (0/2, 7)	0/5219	0/4087
Beta(1, 2)	10	0/2181 (0/9, 4)	0/1946	0/1918
	20	0/4707 (0/2, 9)	0/3683	0/3382
	50	0/8991 (0/5, 12)	0/8503	0/8751
Beta(2, 1)	10	0/9144 (1/5, 4)	0/9795	0/9857
	20	1 (0/9, 9)	1	1
	50	1	1	1
Beta(0/5, 1)	10	0/1473 (1/5, 1)	0/0295	0/0501
	20	0/5047 (2, 3)	0/0253	0/1822
	50	0/7865 (1/5, 4)	0/1770	0/8105
Beta(1, 1)	10	0/5244 (0/9, 4)	0/4459	0/5115
	20	0/9087 (0/9, 7)	0/8213	0/8697
	50	1 (0/9, 8)	1	1

۲۰۸ ..... آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی

$s$  با افزایش  $s$  به سرعت کاهش می‌یابد و تنها در نزدیکی  $s = 1$  آزمون عملکرد مناسبی دارد. بر همین اساس آماره

$$MD_{sc} = \min_{s \in \{0.2, 0.5, 0.9, 1.5, 2\}} \min_{1 \leq m < \frac{n}{2}} D_{sc}$$

را برای آزمون نمایی بودن پیشنهاد می‌کنیم. فرضیه  $H_0$  به ازای مقادیر بزرگ  $MD_{sc}$  رد می‌شود. مقادیر بحرانی این آماره در جدول ۳ داده شده‌اند. توان‌های این آزمون در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: مقادیر بحرانی آزمون  $MD_{sc}$ .

$n$	$\alpha$	
	۰/۰۵	۰/۰۱
۱۰	۰/۵۶۹۱	۰/۷۷۸۰
۱۵	۰/۴۰۷۲	۰/۵۹۴۲
۲۰	۰/۳۲۱۶	۰/۴۴۵۶
۲۵	۰/۲۶۵۶	۰/۳۷۸۱
۳۰	۰/۲۳۳۸	۰/۳۱۸۵
۵۰	۰/۱۶۲۲	۰/۲۳۸۷

از مقایسه جدول‌های ۲ و ۴ ملاحظه می‌شود که آزمون مبتنی بر آماره جدید در مقایسه با آماره  $D_{sc}$  توان پایین‌تری دارد، اما در بسیاری از موارد نسبت به آزمون‌های مبتنی بر آماره‌های  $KLmn$  و  $D_{sv}$  توان بالاتری دارد. از سویی دیگر، این آزمون نسبت به آزمون‌های قبلی دارای این مزیت است که نیازی به تعیین مقادیر بهینه  $m$  و  $s$  ندارد.

### بحث و نتیجه‌گیری

به طور کلی می‌توان گفت که استفاده از اطلاع رنی به عنوان آماره آزمون در مقایسه با اطلاع کولبک-لایبلر، به علت دارا بودن پارامتر  $s$  این امکان را فراهم می‌سازد تا با انتخاب مناسبی از  $s$  (نزدیک به ۱) آزمون‌هایی با توان بیشتر به دست آوریم. البته لازم به ذکر است که نمی‌توان شرایطی را تعیین نمود که تحت آنها آزمون پیشنهادی همواره نسبت به آزمون‌های مورد مقایسه بهتر عمل کند.

جدول ۴: توان آزمون  $MD_{sc}$  به ازای  $\alpha = 0/05$

توزیع	n		
	۱۰	۲۰	۵۰
Weibull(۰/۵, ۱)	۰/۳۴۷۶	۰/۶۸۶۱	۰/۹۶۰۴
Weibull(۰/۸, ۱)	۰/۰۵۸۱	۰/۱۱۷۱	۰/۲۷۱۱
Weibull(۲, ۱)	۰/۵۷۱۱	۰/۸۶۴۸	۰/۹۹۶۹
Gamma(۲, ۱)	۰/۲۴۴۸	۰/۳۸۱۷	۰/۶۲۶۴
Gamma(۳, ۱)	۰/۵۴۳۴	۰/۷۸۰۲	۰/۹۷۵۸
Lnorm(۰, ۰/۶)	۰/۵۰۹۵	۰/۸۱۸۱	۰/۹۲۹۳
Lnorm(۰, ۱)	۰/۱۳۲۶	۰/۲۴۸۴	۰/۳۶۴۹
Lnorm(۰, ۱/۲)	۰/۱۴۶۲	۰/۳۴۲۵	۰/۴۷۷۵
Chisq(۱)	۰/۱۰۴۳	۰/۲۲۸۴	۰/۶۲۶۵
Chisq(۲)	۰/۰۴۹۰	۰/۰۵۰۲	۰/۰۵۲۲
Chisq(۳)	۰/۱۳۳۶	۰/۱۵۹۹	۰/۱۹۶۸
Beta(۱, ۲)	۰/۱۶۹۴	۰/۲۸۱۴	۰/۶۳۶۶
Beta(۲, ۱)	۰/۹۷۶۵	۰/۹۹۹۹	۱
Beta(۰/۵, ۱)	۰/۰۵۹۶	۰/۱۱۱۰	۰/۷۰۰۵
Beta(۱, ۱)	۰/۵۱۱۹	۰/۸۶۲۷	۰/۹۹۸۶

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزنده داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارئه بهتر این مقاله شد کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

### مراجع

حبیبی راد، آ.، ارقامی، ن. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر مبنای آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۱، شماره ۲، ۱۰۹-۱۲۰.

عباس نژاد، م. (۱۳۸۶)، توسعه بعضی از نتایج آنتروپی شاننون و اطلاع کولبک-لایبلر به آنتروپی و اطلاع رنی، رساله دکتری، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد.

علیزاده نوقابی، ه.، علیزاده نوقابی، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۱، ۹۷-۱۱۳.

- Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.
- Choi, B., Kim, K. and Song, S. H. (2004), Goodness of Fit Test for Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Communication in Statistics, Simulation and Computation*, **33(2)**, 525-536.
- Correa, J. C. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **24**, 2439-2450.
- Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, **54**, 739-748.
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics & Probability Letters*, **20**, 225-234.
- Finkelstein, J. and Schafer, R. E. (1971), Imported Goodness of Fit Tests, *Biometrika*, **58**, 641-645.
- Henze, N. and Meintains, S. G. (2005), Recent and Classical Tests for Exponentiality: A Partial Review with Comparisons, *Metrika*, **61**, 29-45.
- Harriss, C. M. (1976), A Note on Testing for Exponentiality, *Naval Research Logistics Q.*, **28**, 169-175.
- Lilliefors, H. W. (1969), On the Kolmogorov Test for the Exponential Distribution with Mean Unknown, *Journal of American Statistical Association*, **64**, 387-389.

- Park, S. and Park, D. (2003), Correcting Moments for Goodness of Fit Tests Based on two Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 685-694.
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **54**, 22-26.
- Stephens, M. A. (1974), EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, *Journal of American Statistical Association*, **69**, 730-737.
- Taufer, E. (2002), On Entropy Based Tests for Exponentiality, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **31**, 189-200.
- Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by a Class of Statistic Based on Spacings, *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 61-72.
- Van-Soset, J. (1969), Some Goodness of Fit Tests for the Exponential Distribution, *Statistica Neerlandica*, **23**, 41-51.
- Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, **38**, 54-59.
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499.