مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۲، ص ۲۰۱-۲۱۱

# آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی

**ملیحه عباس‌نژاد، مرضیه شکوری**

**گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد**

**تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۱۲/۲۰**

**چکیده :** آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای آنتروپی اولین بار توسط ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) به کمک برآورد اطلاع کولبک-لایبلر معرفی شد. ما در این مقاله ابتدا اطلاع رنی را به روشی همانند روش به کار گرفته شده توسط کوریا (۱۹۹۵) برای برآورد آنتروپی شانون، برآورد نموده و سپس از آن به عنوان آماره آزمون نمایی بودن توزیع استفاده می‌کنیم. درادامه توان آزمون پیشنهادی را با چند آزمون دیگر به کمک شبیه‌سازی مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش ارائه شده نسبت به برخی از آزمون های معروف توان بالاتری دارد.

**واژه‌های کلیدی** : آ نتروپی، اطلاع کولبک-لایبلر، اطلاع رنی، آزمون نمایی بودن.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ملیحه عباس‌نژاد، ma_abbasnejad@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲G۱۰، ۹۴A۱۷

## ۱ مقدمه

بسیاری از تحلیل‌های آماری، از قبیل آزمون‌های طول عمر، بر مبنای نمایی بودن مشاهدات پایه‌ریزی شده‌اند. از این رو آزمون نمایی بودن همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. برای مثال $X$ را می‌توان طول عمر یک قطعه تولیدی در نظر گرفت. آزمون فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0 : f(x) = f_0(x,\theta) \\ \\ H_1 : f(x) \neq f_0(x,\theta) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $f_0(x,\theta) = \theta\exp(-\theta x)\ x > 0,\ \theta > 0$ تابع چگالی احتمال توزیع نمایی با پارامتر $\theta$ است. محققین زیادی از جمله لی لی فورس (۱۹۶۹)، ون سوست (۱۹۶۹)، فینکل اشتاین و شیفر (۱۹۷۱)، استی فنز (۱۹۷۴) و هریس (۱۹۷۶) آماره‌های متفاوتی را برای آزمون فرضیه‌های فوق معرفی نمودند. برای اولین بار ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) از برآورد اطلاع کولبک–لایبلر به عنوان آماره‌ی آزمون برای انجام آزمون فرضیه $H_0$ در مقابل $H_1$ استفاده نمودند. برای انتخاب بین دو فرضیه $H_0$ و $H_1$ می‌توان از فاصله کولبک–لایبلر برای تشخیص بین دو تابع $f(x)$ و $f_0(x)$ استفاده نمود که به صورت

$$D(f,f_0) = \int_0^{+\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{f_0(x)}dx \tag{1}$$

تعریف می شود. همانطور که می دانیم $D(f,f_0)$ یک فاصله نامتقارن بین $f$ و $f_0$ است. مقدار $D(f,f_0)$ تحت فرضیه صفر برابر صفر بوده و مقادیر بزرگ $D(f,f_0)$ از فرضیه $H_1$ پشتیبانی می‌کنند. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲)، با فرض اینکه میانگین $X$ متناهی باشد، آماره آزمون را به صورت

$$D(f,f_0) = -H(f) - \log(\theta) + 1$$

بیان نمودند، که در آن $H(f) = -\int_0^{+\infty} f(x)\log f(x)dx$ آنتروپی شانون توزیع $f$ است. سپس از برآورد آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) برای برآورد آماره آزمون استفاده


[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

نموده و نشان دادند که آزمون ارائه شده بر مبنای اطلاع کولبک-لایبلر توان‌های بالاتری در مقایسه با سایر آزمون‌های موجود دارد. آزمون‌های نیکویی برازش متعددی بر مبنای برآورد اطلاع کولبک-لایبلر و آنتروپی شانون معرفی شده است. برای مثال، چوی و همکاران (۲۰۰۴) از برآورد آنتروپی ون - ایس (۱۹۹۲) و برآورد آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) در برآورد اطلاع کولبک - لایبلر استفاده نمودند. تافر (۲۰۰۲) ابتدا با استفاده از یک تبدیل توزیع نمایی را به توزیع یکنواخت تبدیل نموده وآنگاه برآورد آنتروپی شانون توزیع یکنواخت را از روش کوریا و واسیچک به عنوان آماره آزمون به کار گرفت. پارک و پارک (۲۰۰۳) از برآورد تعدیل یافته آنتروپی که توسط ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) ارائه شده بود، کمک گرفته و آماره‌ای برای آزمون نمایی بودن و نرمال بودن توزیع معرفی کردند. یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸) نیز با معرفی برآوردی جدید از تابع توزیع، آنتروپی شانون را برآورد نموده و از آن برای آزمون نمایی بودن و نرمال بودن توزیع استفاده نمودند. همچنین علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷) آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر آنتروپی برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت را با سایر آزمونهای موجود مقایسه نمودند. آزمون نمایی بودن توزیع بر مبنای برآورد اطلاع کولبک-لایبلر، برای داده‌های سانسور شده نوع-دو توسط پارک (۲۰۰۵) و برای داده‌های سانسور فزاینده نوع-دو توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) ارائه شد. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) نیز از برآورد آنتروپی شانون آماره‌های مرتب برای آزمون متقارن بودن توزیع کمک گرفتند.

در بخش دوم مقاله، تعریف فاصله رنی بیان می‌شود. سپس یک آزمون نمایی بودن توزیع بر مبنای آن ارائه شده و در بخش سوم توان آزمون پیشنهادی با چند آزمون دیگر مقایسه می‌گردد. در ادامه، آزمون جدیدی بر اساس آماره ارائه شده در بخش دوم معرفی و توان آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

## ۲ آماره آزمون

فاصله دیگری که می‌توان به منظور انتخاب بین $H_0$ و $H_1$ استفاده نمود، فاصله رنی مرتبه $s$ بین $f(x)$ و $f_0(x)$ است که به صورت

$$D_s(f,f_0) = \frac{1}{s-1}\log\int_0^{+\infty} f(x)\left[\frac{f(x)}{f_0(x)}\right]^{s-1}dx \quad s>0, s\neq 1 \tag{۲}$$

تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که $\lim_{s\to 1} D_s(f,f_0) = D(f,f_0)$ (رنی، ۱۹۶۱).

از آنجا که مقدار $D_s(f,f_0)$ نیز همانند اطلاع کولبک-لایبلر تحت فرضیه صفر، صفر است و مقادیر بزرگ آن از فرضیه $H_1$ پشتیبانی می کنند، طبیعی است که از فاصله رنی بین $f$ و $f_0$ به عنوان آماره آزمون فرضیه $H_0$ در مقابل $H_1$ استفاده نمود. بنا بر رابطه (۲) فاصله رنی بین دو توزیع $f(x)$ و $f_0(x)$ به صورت

$$\begin{aligned} D_s(f,f_0) &= \frac{1}{s-1}\log\int_0^{+\infty} f(x)\left[\frac{f(x)}{\theta\exp(-\theta x)}\right]^{s-1}dx \\ &= -\log\theta + \frac{1}{s-1}\log\int_0^{+\infty} f^s(x)e^{\theta(s-1)x}dx \end{aligned}$$

است، که با تغییر متغیر $F(x)=p$ به صورت

$$D_s(f,f_0) = \frac{1}{s-1}\log\int_0^{1}\left[\frac{d}{dp}F^{-1}(p)\right]^{1-s}e^{\theta(s-1)F^{-1}(p)}dp \tag{۳}$$

حاصل می‌شود. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی $n$تایی از توزیع $F$ باشند. همانند روش واسیچک برای برآورد آنتروپی شانون، با استفاده از تابع توزیع تجربی $F_n$ به جای تابع توزیع $F$ و عملگر تفاضل به جای عملگر دیفرانسیل، مشتق $F^{-1}(p)$ به وسیله $\frac{n}{2m}(X_{i+m:n}-X_{i-m:n})$ برای $\frac{i-1}{n}<p<\frac{i}{n}$، $i=m+1, m+2,\ldots,n-m$ برآورد می‌شود، که در آن $X_{i:n}$ آماره مرتب $i$ام و $m$ یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از $n/2$ است. همچنین اگر $p\leq\frac{m}{n}$ یا $p>\frac{n-m}{n}$ در این صورت از تفاضل های یکطرفه $X_{i+m:n}-X_{1:n}$ یا $X_{n:n}-X_{i-m:n}$ به جای تفاضل $X_{i+m:n}-X_{i-m:n}$ استفاده می‌شود. بنابراین


[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

برآورد رابطه (۳) عبارت است از

$$D_{sv}=\log(\bar{X})+\frac{1}{s-1}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\frac{\frac{2m}{n}\exp(\frac{X_{i:n}}{\bar{X}})}{X_{i+m:n}-X_{i-m:n}}]^{(s-1)}$$

که در آن برای $i<1$ ، $X_{i:n}=X_{1:n}$ و برای $X_{i:n}=X_{n:n}, i>n$ است. بدیهی است که فرضیه $H_0$ به نفع $H_1$ برای مقادیر بزرگ $D_{sv}$ رد می‌شود. این برآورد توسط عباس‌نژاد (۱۳۸۶) به عنوان آماره آزمون نمایی بودن مورد استفاده قرار گرفت و نشان داده شد که به ازای $s=$ ۰/۲ آزمون در بسیاری از حالات توان‌های بالاتری نسبت به آماره ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) دارد.

در این مقاله از روشی که توسط کوریا (۱۹۹۵) برای برآورد آنتروپی معرفی شد، استفاده نموده و $D_s(f,f_0)$ را به صورت

$$D_{sc}=\log(\bar{X})+\frac{1}{s-1}\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b_i\exp(\frac{X_{i:n}}{\bar{X}}))^{s-1}\right]$$

برآورد می کنیم، که در آن

$$b_i=\frac{\sum_{j=i-m}^{i+m}(X_{j:n}-\bar{X}_{i:n})(j-i)}{(n\sum_{j=i-m}^{i+m})(X_{j:n}-\bar{X}_{i:n})^2},\qquad \bar{X}_{i:n}=\frac{1}{2m+1}\sum_{j=i-m}^{i+m}X_{j:n}$$

مقادیر بزرگ $D_{sv}$ از $H_1$ پشتیبانی می‌کنند، بنابراین فرضیه $H_0$ را به نفع $H_1$ در سطح معنی‌داری $\alpha$ رد می‌کنیم اگر $D_{sc}\geq d_{sc}(\alpha)$، که در آن مقدار بحرانی $d_{sc}(\alpha)$ به وسیله چندک $\alpha$ام از توزیع آماره $D_{sc}$ تحت فرضیه $H_0$ محاسبه می‌شود.

جدول ۱: مقادیر بحرانی آزمون $D_{sc}$ به ازای مقادیر مختلف $s$ و $\alpha=$ ۰/۰۵

| | مقدار $s$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | ۰/۲ | ۰/۵ | ۰/۹ | ۱/۵ | ۲ |
| ۱۰ | ۰/۳۳۰۵ (۲) | ۰/۳۸۰۸ (۲) | ۰/۴۶۷۴ (۳) | ۰/۶۱۵۴ (۴) | ۰/۸۳۰۷ (۴) |
| ۱۵ | ۰/۱۹۲۲ (۲) | ۰/۲۳۹۷ (۲) | ۰/۳۱۶۲ (۳) | ۰/۴۵۴۵ (۵) | ۰/۷۰۸۴ (۵) |
| ۲۰ | ۰/۱۲۷۰ (۲) | ۰/۱۷۵۲ (۳) | ۰/۲۳۶۶ (۳) | ۰/۳۷۵۳ (۷) | ۰/۶۲۰۸ (۴) |
| ۲۵ | ۰/۰۸۴۳ (۲) | ۰/۱۳۰۷ (۳) | ۰/۱۹۰۶ (۴) | ۰/۳۱۹۶ (۶) | ۰/۵۶۴۰ (۴) |
| ۳۰ | ۰/۰۵۷۴ (۲) | ۰/۱۰۴۴ (۲) | ۰/۱۶۰۴ (۵) | ۰/۲۸۰۹ (۵) | ۰/۵۱۸۱ (۴) |
| ۵۰ | ۰/۰۰۶۲ (۲) | ۰/۰۴۸۴ (۳) | ۰/۰۹۶۴ (۶) | ۰/۱۹۳۳ (۶) | ۰/۳۹۹۵ (۴) |

از آنجا که توزیع $D_{sc}$ تحت فرضیه $H_0$ پیچیده است، برای محاسبه مقادیر بحرانی از روش مونت کارلو استفاده می‌کنیم. برای این منظور به ازای مقادیر


[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

مختلف $s$ و هر مقدار $m < \frac{n}{2}$، ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی به حجم $n$ از توزیع نمایی استاندارد تولید نموده و چندک $\alpha$ام به عنوان مقدار بحرانی تعیین می‌شود. مقادیر بحرانی به ازای مقادیر مختلف $s$ در جدول ۱ ارائه شده‌اند، که مقدار داخل پرانتز نشان دهنده مقدار $m$ای است که مقدار بحرانی به ازای آن کمترین است. در بخش بعدی که توان آزمون را به تفصیل مورد مطالعه قرار خواهیم داد، مشاهده می‌شود که مقادیر معینی برای $m$ و $s$ تعیین نمی‌شود.

## ۳ توان آزمون

برای محاسبه توان آزمون پیشنهادی و مقایسه آن با آزمونهای قبلی، توزیع‌های جانشین زیر در نظر گرفته شده‌اند.

- توزیع گاما با پارامترهای شکل ۲ و ۳.
- توزیع وایبل با پارامترهای شکل ۰/۵ و ۰/۸ و ۲.
- توزیع بتا با پارامترهای (۱ و ۱) و (۲ و ۱) و (۱ و ۲) و (۱ و ۰/۵).
- توزیع لگ نرمال با پارامترهای شکل ۰/۶ و ۱ و ۱/۲.
- توزیع کی دو با درجات آزادی ۱ و ۲ و ۳.

در جدول ۲ توان آزمون پیشنهادی $D_{sc}$، آزمون ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) $KL_{mn}$ و توان آزمون مبتنی بر اطلاع رنی، عباس‌نژاد (۱۳۸۶) $D_{sv}$ به ازای $\alpha = ۰/۰۵$ و $n = ۱۰, ۲۰, ۵۰$ ارائه شده‌اند. مقادیر داخل پرانتز به ترتیب نشان دهنده مقادیر $s$ و $m$ای هستند که توان آزمون پیشنهادی به ازای آنها ماکسیمم شده است. از جدول ۲ مشاهده می‌شود که آماره ارائه شده در بیشتر موارد توان‌های بالاتری نسبت به آزمون‌های $KL_{mn}$ و $D_{sv}$ دارد.

همانطور که پیشتر گفته شد متأسفانه معیار دقیقی برای تعیین مقادیر بهینه $m$ و $s$ وجود ندارد و به طور کلی این مقادیر به فرضیه جانشین بستگی دارند. مطالعات مختلف مربوط به توان آزمون نشان می دهند که مقادیری از $m$ و $s$ که کوچکترین مقادیر بحرانی را تولید می‌کنند، منجر به آزمون‌های با توان بیشتر می‌شوند. علاوه بر این بر اساس شبیه‌سازی‌های انجام شده توان آزمون پیشنهادی به ازای مقادیر بزرگ


[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

جدول ۲: مقایسه توان‌ها برای $n =$ ۱۰, ۲۰, ۵۰ و $\alpha =$ ۰/۰۵.

| نام توزیع | $n$ | آماره آزمون | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $D_{sc}$ | $D_{sv}$ | $KL_{mn}$ |
| *Weibull*(۰/۵, ۱) | ۱۰ | ۰/۵۴۱۶ (۲,۳) | ۰ | ۰/۱۰۵۰ |
| | ۲۰ | ۰/۸۹۵۵ (۲,۳) | ۰ | ۰/۵۳۵۹ |
| | ۵۰ | ۰/۹۹۹۱ (۲,۴) | ۰ | ۰/۹۷۶۸ |
| *Weibull*(۰/۸, ۱) | ۱۰ | ۰/۱۲۴۳ (۲,۴) | ۰/۰۰۱۲ | ۰/۰۱۵۹ |
| | ۲۰ | ۰/۲۲۰۸ (۲,۴) | ۰/۰۰۴۵ | ۰/۰۲۹۹ |
| | ۵۰ | ۰/۴۱۰۰ (۲,۴) | ۰/۰۱۰۷ | ۰/۱۰۵۳ |
| *Weibull*(۲, ۱) | ۱۰ | ۰/۷۶۷۲ (۰/۵,۴) | ۰/۷۴۹۵ | ۰/۶۹۸۷ |
| | ۲۰ | ۰/۹۷۳۵ (۰/۲,۹) | ۰/۹۷۴۳ | ۰/۹۲۹۸ |
| | ۵۰ | ۰/۹۹۹۷ (۰/۹,۵) | ۱ | ۰/۹۹۹۹ |
| *Gamma*(۲, ۱) | ۱۰ | ۰/۳۸۴۶ (۰/۲,۴) | ۰/۳۵۶۳ | ۰/۳۲۰۳ |
| | ۲۰ | ۰/۶۰۴۸ (۰/۲,۷) | ۰/۶۳۴۷ | ۰/۵۰۶۲ |
| | ۵۰ | ۰/۸۳۸۷ (۰/۵,۴) | ۰/۸۸۹۶ | ۰/۸۳۱۶ |
| *Gamma*(۳, ۱) | ۱۰ | ۰/۶۹۵۰ (۰/۵,۳) | ۰/۶۷۷۹ | ۰/۵۹۸۷ |
| | ۲۰ | ۰/۹۲۲۲ (۰/۲,۵) | ۰/۹۴۸۷ | ۰/۸۸۵۹ |
| | ۵۰ | ۰/۹۹۷۹ (۰/۹,۴) | ۰/۹۹۸۳ | ۰/۹۹۸۶ |
| *Lnorm*(۰, ۰/۶) | ۱۰ | ۰/۶۴۳۰ (۰/۲,۱) | ۰/۶۸۹۵ | ۰/۶۱۱۶ |
| | ۲۰ | ۰/۹۰۲۵ (۰/۲,۱) | ۰/۸۹۹۴ | ۰/۹۰۳۳ |
| | ۵۰ | ۰/۹۹۸۴ (۰/۵,۱) | ۰/۹۷۷۹ | ۰/۹۹۹۴ |
| *Lnorm*(۰, ۱) | ۱۰ | ۰/۱۳۴۷ (۲,۴) | ۰/۰۸۹۴ | ۰/۰۸۸۴ |
| | ۲۰ | ۰/۲۳۱۰ (۱/۵,۴) | ۰/۱۲۰۴ | ۰/۱۵۳۸ |
| | ۵۰ | ۰/۵۲۵۳ (۱/۵,۸) | ۰/۱۴۳۴ | ۰/۳۵۵۵ |
| *Lnorm*(۰, ۱/۲) | ۱۰ | ۰/۲۱۴۹ (۲,۳) | ۰/۰۱۳۰ | ۰/۰۴۸۷ |
| | ۲۰ | ۰/۴۱۰۷ (۲,۵) | ۰/۰۲۲۴ | ۰/۱۱۲۵ |
| | ۵۰ | ۰/۶۹۷۳ (۲,۵) | ۰/۰۳۲۴ | ۰/۳۸۲۹ |
| *Chisq*(۱) | ۱۰ | ۰/۲۴۵۶ (۲,۲) | ۰ | ۰/۰۱۷۶ |
| | ۲۰ | ۰/۵۱۲۳ (۲,۳) | ۰ | ۰/۱۲۰۱ |
| | ۵۰ | ۰/۸۸۱۱ (۲,۳) | ۰ | ۰/۵۷۸۶ |
| *Chisq*(۲) | ۱۰ | ۰/۰۵۲۳ (۰/۲,۴) | ۰/۰۴۵۷ | ۰/۰۴۵۹ |
| | ۲۰ | ۰/۰۵۲۵ (۰/۲,۵) | ۰/۰۴۹۲ | ۰/۰۴۹۸ |
| | ۵۰ | ۰/۰۵۶۱ (۰/۲,۳) | ۰/۰۵۶۸ | ۰/۰۵۲۳ |
| *Chisq*(۳) | ۱۰ | ۰/۱۹۰۹ (۰/۲,۲) | ۰/۱۹۹۱ | ۰/۱۸۰۲ |
| | ۲۰ | ۰/۳۰۵۹ (۰/۲,۷) | ۰/۳۱۲۳ | ۰/۲۲۵۹ |
| | ۵۰ | ۰/۴۵۰۱ (۰/۲,۷) | ۰/۵۲۱۹ | ۰/۴۰۸۷ |
| *Beta*(۱, ۲) | ۱۰ | ۰/۲۱۸۱ (۰/۹,۴) | ۰/۱۹۴۶ | ۰/۱۹۱۸ |
| | ۲۰ | ۰/۴۷۰۷ (۰/۲,۹) | ۰/۳۶۸۳ | ۰/۳۳۸۲ |
| | ۵۰ | ۰/۸۹۹۱ (۰/۵,۱۲) | ۰/۸۵۰۳ | ۰/۷۷۵۱ |
| *Beta*(۲, ۱) | ۱۰ | ۰/۹۸۴۴ (۱/۵,۴) | ۰/۹۷۹۵ | ۰/۹۸۵۷ |
| | ۲۰ | ۱ (۰/۹,۹) | ۱ | ۱ |
| | ۵۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| *Beta*(۰/۵, ۱) | ۱۰ | ۰/۱۴۷۳ (۱/۵,۱) | ۰/۰۲۹۵ | ۰/۰۵۰۱ |
| | ۲۰ | ۰/۵۰۴۷ (۲,۳) | ۰/۰۲۵۳ | ۰/۱۸۲۲ |
| | ۵۰ | ۰/۷۸۶۵ (۱/۵,۴) | ۰/۱۷۷۰ | ۰/۸۱۰۵ |
| *Beta*(۱, ۱) | ۱۰ | ۰/۵۲۴۴ (۰/۹,۴) | ۰/۴۴۵۹ | ۰/۵۱۱۵ |
| | ۲۰ | ۰/۹۰۸۷ (۰/۹,۷) | ۰/۸۲۱۳ | ۰/۸۶۹۷ |
| | ۵۰ | ۱ (۰/۹,۸) | ۱ | ۱ |



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

$s$ با افزایش $s$ به سرعت کاهش می‌یابد و تنها در نزدیکی ۱ $= s$ آزمون عملکرد مناسبی دارد. بر همین اساس آماره

$$MD_{sc} = min_{s\in\{۰/۲,۰/۵,۰/۹,۱/۵,۲\}} min_{۱\leq m<\frac{n}{۲}} D_{sc}$$

را برای آزمون نمایی بودن پیشنهاد می‌کنیم. فرضیه $H_۰$ به ازای مقادیر بزرگ $MD_{sc}$ رد می‌شود. مقادیر بحرانی این آماره در جدول ۳ داده شده اند. توان‌های این آزمون در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: مقادیر بحرانی آزمون $MD_{sc}$.

| | $\alpha$ | |
|---|---|---|
| $n$ | ۰/۰۵ | ۰/۰۱ |
| ۱۰ | ۰/۵۶۹۱ | ۰/۷۷۸۰ |
| ۱۵ | ۰/۴۰۷۲ | ۰/۵۹۴۲ |
| ۲۰ | ۰/۳۲۱۶ | ۰/۴۴۵۶ |
| ۲۵ | ۰/۲۶۵۶ | ۰/۳۷۸۱ |
| ۳۰ | ۰/۲۳۸۸ | ۰/۳۱۸۵ |
| ۵۰ | ۰/۱۶۲۲ | ۰/۲۳۸۷ |

از مقایسه جدول‌های ۲ و ۴ ملاحظه می‌شود که آزمون مبتنی بر آماره جدید در مقایسه با آماره $D_{sc}$ توان پایین‌تری دارد، اما در بسیاری از موارد نسبت به آزمون‌های مبتنی بر آماره‌های $KL_{mn}$ و $D_{sv}$ توان بالاتری دارد. از سویی دیگر، این آزمون نسبت به آزمون‌های قبلی دارای این مزیت است که نیازی به تعیین مقادیر بهینه $m$ و $s$ ندارد.

## بحث و نتیجه‌گیری

به طور کلی می توان گفت که استفاده از اطلاع رنی به عنوان آماره آزمون در مقایسه با اطلاع کولبک-لایبلر، به علت دارا بودن پارامتر $s$ این امکان را فراهم می‌سازد تا با انتخاب مناسبی از $s$ (نزدیک به ۱) آزمون‌هایی با توان بیشتر به دست آوریم. البته لازم به ذکر است که نمی‌توان شرایطی را تعیین نمود که تحت آنها آزمون پیشنهادی همواره نسبت به آزمون‌های مورد مقایسه بهتر عمل کند.



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

جدول ۴: توان آزمون $MD_{sc}$ به ازای $\alpha =$۰/۰۵.

| توزیع | $n$ | | |
|---|---|---|---|
| | ۱۰ | ۲۰ | ۵۰ |
| $Weibull$(۰/۵, ۱) | ۰/۳۴۷۶ | ۰/۶۸۶۱ | ۰/۹۶۰۴ |
| $Weibull$(۰/۸, ۱) | ۰/۰۵۸۱ | ۰/۱۱۷۱ | ۰/۲۷۱۱ |
| $Weibull$(۲, ۱) | ۰/۵۷۱۱ | ۰/۸۶۴۸ | ۰/۹۹۶۹ |
| $Gamma$(۲, ۱) | ۰/۲۴۴۸ | ۰/۳۸۱۷ | ۰/۶۲۶۴ |
| $Gamma$(۳, ۱) | ۰/۵۴۳۴ | ۰/۷۸۰۲ | ۰/۹۷۵۸ |
| $Lnorm$(۰, ۰/۶) | ۰/۵۰۹۵ | ۰/۸۱۸۱ | ۰/۹۲۹۳ |
| $Lnorm$(۰, ۱) | ۰/۱۳۲۶ | ۰/۲۴۸۴ | ۰/۳۶۴۹ |
| $Lnorm$(۰, ۱/۲) | ۰/۱۴۶۲ | ۰/۳۴۲۵ | ۰/۴۷۷۵ |
| $Chisq$(۱) | ۰/۱۰۴۳ | ۰/۲۲۸۴ | ۰/۶۲۶۵ |
| $Chisq$(۲) | ۰/۰۴۹۰ | ۰/۰۵۰۲ | ۰/۰۵۲۲ |
| $Chisq$(۳) | ۰/۱۳۳۶ | ۰/۱۵۹۹ | ۰/۱۹۶۸ |
| $Beta$(۱, ۲) | ۰/۱۶۹۴ | ۰/۲۸۱۴ | ۰/۶۳۶۶ |
| $Beta$(۲, ۱) | ۰/۹۷۶۵ | ۰/۹۹۹۹ | ۱ |
| $Beta$(۰/۵, ۱) | ۰/۰۵۹۶ | ۰/۱۱۱۰ | ۰/۷۰۰۵ |
| $Beta$(۱, ۱) | ۰/۵۱۱۹ | ۰/۸۶۲۷ | ۰/۹۹۸۶ |

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزندهٔ داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارئه بهتر این مقاله شد کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

## مراجع

حبیبی راد، آ.، ارقامی، ن. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر مبنای آنتروپی ، مجله علوم آماری، جلد **۱**، شماره ۲، ۱۲۰–۱۰۹.

عباس نژاد، م. (۱۳۸۶)، توسعه بعضی از نتایج آنتروپی شانون و اطلاع کولبک–لایبلر به آنتروپی و اطلاع رنی، رساله دکتری، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد.

علیزاده نوقابی، ه.، علیزاده نوقابی، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها، مجله علوم آماری، جلد **۲**، شماره ۱، ۱۱۳–۹۷.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.

Choi, B., Kim, K. and Song, S. H. (2004), Goodness of Fit Test for Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Communication in Statistics, Simulation and Computation*, **33(2)**, 525-536.

Correa, J. C. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **24**, 2439-2450.

Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, **54**, 739-748.

Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics & Probability Letters*, **20**, 225-234.

Finkelstein, J. and Schafer, R. E. (1971), Imported Goodness of Fit Tests, *Biometrika*, **58**, 641-645.

Henze, N. and Meintains, S. G. (2005), Recent and Classical Tests for Exponentiality: A Partial Review with Comparisons, *Metrika*, **61**, 29-45.

Harriss, C. M. (1976), A Note on Testing for Exponentiality, *Naval Research Logistics Q.*, **28**, 169-175.

Lilliefors, H. W. (1969), On the Kolmogorov Test for the Exponential Distribution with Mean Unknown, *Journal of American Statistical Association*, **64**, 387-389.



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]

Park, S. and Park, D. (2003), Correcting Moments for Goodness of Fit Tests Based on two Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 685-694.

Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **54**, 22-26.

Stephens, M. A. (1974), EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, *Journal of American Statistical Association*, **69**, 730-737.

Taufer, E. (2002), On Entropy Based Tests for Exponentiality, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **31**, 189-200.

Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by a Class of Statistic Based on Spacings, *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 61-72.

Van-Soset, J. (1969), Some Goodness of Fit Tests for the Exponential Distribution, *Statistica Neerlandica*, **23**, 41-51.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, **38**, 54-59.

Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499.



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.5.1 ]