

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۲، ص ۱۷۹-۲۰۰

آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

احسان زمانزاده، ناصررضا ارقامی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۸/۱۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۱۲/۱۸

چکیده: در این مقاله، ابتدا به معرفی دوبرآوردگر جدید آنتروپی می‌پردازیم. برآوردگرهای جدید بر مبنای تصحیح برآوردگر کوریا (۱۹۹۵) در نقاط ابتدایی و انتهایی و اعمال وزن‌های متفاوت نسبت به آن برآوردگر معرفی می‌شوند. سپس به مقایسه برآوردگرهای جدید آنتروپی با برآوردگرهای آنتروپی معرفی شده توسط واسیچک (۱۹۷۶) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) می‌پردازیم. آنگاه آزمون نیکویی برازش فرضیه‌های نرمال بودن و نمایی بودن را بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی معرفی کرده و توان آن را با آزمون‌های مبتنی بر برآوردگرهای واسیچک (۱۹۷۶) و کوریا (۱۹۹۵) و آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) برای آزمون‌های نرمال بودن مقایسه می‌کنیم. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگرهای پیشنهادی عملکرد نسبتاً خوبی نسبت به سایر برآوردگرها در برآورد آنتروپی و آزمون نیکویی برازش دارند.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی، برآورد آنتروپی، آزمون نیکویی برازش، اطلاع کولبک لایبلر

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان زمانزاده، ehsanzamanzadeh@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲G۱۰ و ۶۲G۳۰

۱ مقدمه

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(X)$ با تابع چگالی مطلقاً پیوسته $f(x)$ باشد. شانون (۱۹۴۸) آنتروپی این متغیر تصادفی را به صورت

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx, \quad (1)$$

تعریف کرد. از آنجا که مفهوم آنتروپی کاربردهای فراوانی در مباحث آماری نظیر نظریه اطلاع و آزمون‌های نیکویی برازش دارد، مساله برآورد $H(f)$ بر مبنای مشاهدات x_1, \dots, x_n توسط محققین زیادی از جمله احمد و لین (۱۹۷۶)، واسیچک (۱۹۷۶)، مک (۱۹۸۸)، دادویچ و ون‌درمولن (۱۹۸۷)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردگرها، برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) به واسطه سادگی در محاسبات و دقت بالای آن، بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. واسیچک (۱۹۷۶) نشان داد که می‌توان رابطه (۱) را با تغییر متغیر $F(x) = p$ به صورت

$$H(f) = \int_0^1 \log\left(\frac{d}{dp} F^{-1}(p)\right) dp \quad (2)$$

نوشت. آنگاه وی با جایگزینی تابع توزیع F با تابع توزیع تجربی F_n و استفاده از عملگر تفاضل به‌جای عملگر مشتق، برآورد آنتروپی خود را به صورت زیر معرفی کرد.

فرض کنید x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از توزیع F باشند، در این صورت برآورد آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) عبارت است از

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{c_i} (x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right), \quad (3)$$

که در آن $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ آماره‌های مرتب، $c_i = 2m$ و m یک عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است. ضمناً به‌ازای $i < 1$ ، $x_{(i)} = x_{(1)}$ و به‌ازای $i > n$ ، $x_{(i)} = x_{(n)}$ ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برآوردگر خود را بر مبنای اصلاح ضرایب برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) در نقاط انتهایی (c_i ها وقتی که $i \leq m$ و $i \geq n - m + 1$) به

صورت

$$HE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{c_i} (x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right) \quad (4)$$

معرفی کردند، که در آن

$$c_i = \begin{cases} m+i-1 & 1 \leq i \leq m \\ 2m & m+1 \leq i \leq n-m \\ m+n-i & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

و برای $1 < i < n$ و به ازای $i > n$ $x_{(i)} = x_{(n)}$ است. مطالعات شبیه‌سازی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) نشان می‌داد که برآوردگر پیشنهادی آن‌ها اریبی و میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. کوریا (۱۹۹۵) برآوردگر دیگری برای آنتروپی پیشنهاد داد که میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر معرفی شده توسط واسیچک (۱۹۷۶) داشت. وی توجه کرد که می‌توان رابطه (۳) را به صورت

$$HV_{mn} = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\frac{i+m}{n} - \frac{i-m}{n}}{x_{(i+m)} - x_{(i-m)}}\right) \quad (5)$$

بازنویسی کرد. اما عبارت داخل لگاریتم در رابطه (۵) در واقع شیب خطی است که نقاط $(\hat{F}(X_{(i+m)}), X_{(i+m)})$ و $(\hat{F}(X_{(i-m)}), X_{(i-m)})$ را به یکدیگر متصل می‌کند. او پیشنهاد داد که این شیب را با استفاده از رگرسیون خطی موضعی برحسب $\{X_{(i-m)}, \dots, X_{(i+m)}\}$ و استفاده از تمام $2m+1$ نقطه بجای دو نقطه برآورد کنیم. لذا با در نظر گرفتن رابطه

$$F(x_{(j)}) = \alpha + \beta x_j + \epsilon \quad (6)$$

و برآورد β با روش کمترین توان‌های دوم، برآوردگر خود را به صورت

$$HC_{mn} = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \log(b_i), \quad (7)$$

پیشنهاد کرد، که در آن

$$b_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (x_{(j)} - \bar{x}_{(i)}) \left(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\right)}{\sum_{j=i-m}^{i+m} (x_{(j)} - \bar{x}_{(i)})^2}$$

و

$$\bar{x}_{(i)} = \sum_{j=i-m}^{i+m} \frac{x_{(j)}}{2m+1}$$

و m یک عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ ، $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ آماره‌های مرتب و برای $1 < j < n$ ، $x_{(j)} = x_{(1)}$ و به ازای $j > n$ ، $x_{(j)} = x_{(n)}$ می‌باشد.

برآورد آنتروپی در به دست آوردن آماره آزمون نیکویی برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیچک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزونو و اوتا (۱۹۸۹) و علیزاده نوقابی و علیزاده نوقابی (۱۳۸۷)، برای توزیع یکنواخت بوسیله دادویچ و ون‌درمولن (۱۹۸۱) و برای توزیع نمایی بوسیله ابراهیمی و حبیب‌الله (۱۹۹۲) مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای داده‌های سانسور شده نوع-دو (پارک، ۲۰۰۵) و داده‌های سانسور فزاینده نوع-دو (بالاکریشانان و همکاران (۲۰۰۷) و یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸) و تقارن توزیع (حبیبی‌راد و ارقامی، ۱۳۸۶) نیز مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی در مقالات فوق نشان می‌دهد که آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی عموماً از توان بالاتری در مقایسه با سایر آزمون‌های نیکویی برخوردارند. به عنوان مثال، واسیچک (۱۹۷۶) به مقایسه آزمون نیکویی برازش نرمال بودن توزیع جامعه بر مبنای آنتروپی با سایر آزمون‌ها (کلموگروف-اسمیرنوف^۱، کرامرسون میسز^۲، کوپر^۳، واتسون^۴، اندرسون-دارلینگ^۵ و شاپیرو-ویلک^۶) پرداخت و نشان داد که آزمون پیشنهادی وی عملکرد خوبی نسبت به این آزمون‌ها دارد. از این رو آزمون‌های پیشنهاد شده در این مقاله نه با آزمون‌های فوق‌الذکر بلکه فقط با آزمون واسیچک (۱۹۷۶) مقایسه شده است. معذالک با توجه به اینکه اجماع عمومی بر این است که در بین آزمون‌های فوق‌الذکر آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) بهتر از بقیه است. توان‌های مربوط به آزمون اخیر الذکر به نتایج شبیه‌سازی اضافه گردیده است.

^۱ Kolmogorov-Smirnov

^۲ Cramer-Von Mises

^۳ Kuiper

^۴ Watson

^۵ Anderson-Darling

^۶ Shapiro-Wilk

در بخش دوم این مقاله به معرفی برآوردگرهای جدید آنتروپی که در واقع اصلاح برآوردگر معرفی شده توسط کوریا (۱۹۹۵) است، می‌پردازیم سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت-کارلو به مقایسه برآوردگرهای پیشنهادی با برآوردگرهای پیشنهاد شده توسط واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) خواهیم پرداخت. در بخش ۳، آزمون نیکویی برازش را برای فرضیه‌های نمایشی بودن و نرمال بودن توزیع جامعه بر اساس برآوردگرهای جدید آنتروپی معرفی خواهیم کرد و به مقایسه توان این آزمون‌ها با آزمون‌های پیشنهادی توسط واسیچک (۱۹۷۶) و کوریا (۱۹۹۵) و آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) در مورد نرمال خواهیم پرداخت. نتایج شبیه‌سازی حکایت از رضایت‌بخش بودن عملکرد برآوردگرهای جدید آنتروپی به منظور برآورد و آزمون نیکویی برازش دارد. بحث و نتیجه‌گیری نهایی در بخش ۴ آورده شده است.

۲ برآوردگرهای جدید آنتروپی

واضح است که مقدار b_i در رابطه (۷) (وقتی $i \leq m$ یا $i \geq n - m + 1$ است) تقریب مناسبی برای شیب خط نمی‌باشد، زیرا در این نقاط بیش از یک بار از مقدار $x_{(1)}$ یا $x_{(n)}$ استفاده شده است. لذا برآورد اول آنتروپی خود را بر مبنای اصلاح این ضرایب به صورت

$$HZ \lambda_{mn} = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \log(b_i^*) \quad (۸)$$

ارائه می‌دهیم، که در آن

$$b_i^* = \frac{\sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)} (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)}) (\hat{F}(j) - \tilde{F}(i))}{\sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)} (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)})^2}, i = 1, \dots, n,$$

$$k_1(i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq m \\ i - m & i \geq m + 1 \end{cases}, \quad k_2(i) = \begin{cases} i + m & 1 \leq i \leq n - m \\ n & i \geq n - m + 1 \end{cases},$$

$$\tilde{x}_{(i)} = \sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)} \frac{x_{(j)}}{k_2(i) - k_1(i) + 1}, \quad \tilde{F}(i) = \sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)} \frac{\hat{F}(j)}{k_2(i) - k_1(i) + 1},$$

۱۸۴ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

\hat{F} تابع توزیع تجربی و $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ آماره‌های مرتب هستند. به سادگی می‌توان نشان داد رابطه

$$b_i^* = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{i+m} (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)}) (\frac{j}{n} - \frac{m+i+1}{n})}{\sum_{j=1}^{i+m} (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)})^2} & 1 \leq i \leq m \\ b_i & m+1 \leq i \leq n-m \\ \frac{\sum_{j=i-m}^n (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)}) (\frac{j}{n} - \frac{n+i-m}{n})}{\sum_{j=i-m}^n (x_{(j)} - \tilde{x}_{(i)})^2} & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

برقرار است. دومین برآوردگر ارایه شده در این مقاله بر مبنای این ایده است که چون در برآوردگر کوریا (۱۹۹۵) برای بدست آوردن همه b_i ها از تعداد مساوی مشاهده استفاده شده است، در برآورد آنتروپی، همه b_i ها از وزن‌های مساوی $w_i = \frac{1}{n}$ برخوردارند. اما در محاسبه HZ وقتی $1 \leq i \leq m$ یا $n-m+1 \leq i \leq n$ از مشاهدات کمتری برای بدست آوردن b_i^* استفاده شده است. لذا منطقی به نظر می‌رسد که وزن‌های کمتری به این مقادیر در برآورد آنتروپی اختصاص دهیم. بر این اساس، برآوردگر دوم آنتروپی خود را به صورت

$$HZ_{mn} = - \sum_{i=1}^n w_i \log(b_i^*) \quad (9)$$

معرفی می‌کنیم، که در آن

$$w_i = \frac{\hat{F}(x_{(i+m)}) - \hat{F}(x_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n \hat{F}(x_{(i+m)}) - \hat{F}(x_{(i-m)})}, i = 1, \dots, n$$

و \hat{F} تابع توزیع تجربی و $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ آماره‌های مرتب هستند.

توجیه انتخاب وزن‌های فوق به این صورت است که هنگام تقریب یک انتگرال به یک مجموع از رابطه $\int_0^1 \log(\frac{d}{dp} F^{-1}(p)) dp \approx \sum_{i=1}^n \log(\frac{d}{dp} F^{-1}(p_i)) \Delta p_i$ استفاده می‌کنیم، لذا در رابطه (۸) به جای ضرایب مساوی $\frac{1}{n}$ از آن‌ها همان مقادیر w_i در بالا حاصل می‌گردد. به سادگی می‌توان نشان داد

$$w_i = \begin{cases} \frac{i+m-1}{m(n-m-1)} & 1 \leq i \leq m \\ \frac{1}{n-m-1} & m+1 \leq i \leq n-m \\ \frac{n-i+m}{m(n-m-1)} & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

قضیه زیر را که بیان می‌کند "مقیاس متغیر تصادفی X تاثیری در دقت برآوردگر آنتروپی $HZ1_{mn}$ و $HZ2_{mn}$ ندارد" می‌توان به سادگی مشابه ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) ثابت کرد.

قضیه ۱: فرض کنید X_1, \dots, X_n یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با آنتروپی $H^X(f)$ و به ازای $i = 1, \dots, k, k > 0$ قرار دهیم $Y_i = kX_i$. همچنین فرض کنید $HZ1_{mn}^X, HZ2_{mn}^X, HZ1_{mn}^Y$ و $HZ2_{mn}^Y$ به ترتیب برآوردگرهای آنتروپی $H^X(f)$ و $H^Y(g)$ باشند، که در آن g تابع چگالی احتمال $Y = kX$ است. در این صورت روابط زیر برقرار است.

(الف)

$$E(HZ1_{mn}^Y) = E(HZ1_{mn}^X) + \log(k) \quad \text{و} \quad E(HZ2_{mn}^Y) = E(HZ2_{mn}^X) + \log(k)$$

(ب)

$$Var(HZ1_{mn}^Y) = MSE(HZ1_{mn}^Y) \quad \text{و} \quad Var(HZ2_{mn}^Y) = Var(HZ2_{mn}^Y)$$

(ج)

$$MSE(HZ1_{mn}^Y) = MSE(HZ1_{mn}^X) \quad \text{و} \quad MSE(HZ2_{mn}^Y) = MSE(HZ2_{mn}^X)$$

اکنون در یک مطالعه شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای پیشنهادی و برآوردگرهای معرفی شده توسط واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵)، بر حسب جذرمیانگین توان دوم خطا و اریبی، مورد مقایسه قرار می‌گیرد. برای این منظور به ازای $n = 10, 20, 30$ و مقادیر مختلف m تعداد $10,000$ نمونه با اندازه n تولید و مقدار اریبی و جذرمیانگین توان دوم خطای آن‌ها برای سه توزیع نرمال استاندارد، نمایی با میانگین ۱ و یکنواخت (۱، ۰) محاسبه شده است و نتایج در جداول ۱ تا ۳ ارائه شده‌اند.

همان‌طور که در جدول‌های ۱ تا ۳ ملاحظه می‌شود، برآوردگر پیشنهادی اول ($HZ1$) عموماً اریبی کمتری نسبت به برآوردگر پیشنهادی دوم ($HZ2$) دارد، درحالی‌که $RMSE$ های آن‌ها کم و بیش برابر هستند. ضمناً ملاحظه می‌شود که $HZ1$ چه از نظر اریبی و چه از نظر $RMSE$ به ازای m های کوچک ($m \leq \frac{n}{4}$)

۱۸۶ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

جدول ۱: آریبی و جذرمیانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی توزیع نرمال استاندارد. جذرمیانگین توان دوم خطا

n	m	HV_{mn}	HE_{mn}	HC_{mn}	HZ_{mn}	HV_{mn}	HE_{mn}	HC_{mn}	HZ_{mn}	HV_{mn}	HE_{mn}	HC_{mn}	HZ_{mn}	HV_{mn}	HE_{mn}	HC_{mn}	HZ_{mn}	
۱۰	۱	-۰/۰۵۹۶۷	-۰/۰۴۵۸۰	-۰/۰۴۵۸۳	-۰/۰۳۷۷۲	-۰/۰۳۹۴۳	-۰/۰۳۷۷۲	-۰/۰۳۹۴۳	-۰/۰۳۹۴۳	۰/۰۴۹۶۴	۰/۰۵۵۸۰	۰/۰۵۵۶۷	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۴۹۱۸	۰/۰۵۵۶۷	۰/۰۵۵۶۷	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۴۹۱۸
	۲	-۰/۰۵۲۵۵	-۰/۰۳۹۴۳	-۰/۰۳۵۵۹	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۵۹۱	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۵۹۱	-۰/۰۳۵۹۱	۰/۰۵۵۸۰	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲
	۳	-۰/۰۵۵۵۷	-۰/۰۲۹۹۵	-۰/۰۳۷۷۱	-۰/۰۲۱۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲
	۴	-۰/۰۶۱۱۶	-۰/۰۳۰۵۸	-۰/۰۴۲۹۰	-۰/۰۲۲۴۹	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲
	۵	-۰/۰۶۶۹۸	-۰/۰۲۹۲۰	-۰/۰۴۷۱۳	-۰/۰۲۲۸۳	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	-۰/۰۳۳۲۵	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۳	۰/۰۴۹۴۱	۰/۰۳۷۷۲
۲۰	۱	-۰/۰۴۳۵۱	-۰/۰۳۶۵۸	-۰/۰۳۱۴۴	-۰/۰۲۷۳۸	-۰/۰۳۰۳۰	-۰/۰۲۷۳۸	-۰/۰۳۰۳۰	-۰/۰۳۰۳۰	۰/۰۴۸۱۵	۰/۰۴۲۱۱	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۴۳۰	۰/۰۳۶۱۷	۰/۰۴۲۱۱	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۴۳۰	۰/۰۳۶۱۷
	۲	-۰/۰۳۲۴۱	-۰/۰۲۲۶۰	-۰/۰۱۸۵۳	-۰/۰۱۲۲۲	-۰/۰۱۶۷۹	-۰/۰۱۲۲۲	-۰/۰۱۶۷۹	-۰/۰۱۶۷۹	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۲۶۰۹	۰/۰۲۲۱۷	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۲۶۰۹	۰/۰۲۲۱۷	۰/۰۳۲۱۵
	۳	-۰/۰۳۱۱۹	-۰/۰۱۸۴۸	-۰/۰۱۷۷۴	-۰/۰۰۹۴۸	-۰/۰۱۴۲۷	-۰/۰۰۹۴۸	-۰/۰۱۴۲۷	-۰/۰۱۴۲۷	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۲۶۰۹	۰/۰۲۵۷۴	۰/۰۲۵۳۰	۰/۰۲۵۳۰	۰/۰۲۵۳۰	۰/۰۲۵۳۰	۰/۰۲۵۳۰	۰/۰۲۵۳۰
	۴	-۰/۰۳۲۷۹	-۰/۰۱۶۹۵	-۰/۰۱۹۲۵	-۰/۰۰۸۴۷	-۰/۰۱۳۶۲	-۰/۰۰۸۴۷	-۰/۰۱۳۶۲	-۰/۰۱۳۶۲	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۲۶۰۹	۰/۰۲۶۶۴	۰/۰۲۶۰۵	۰/۰۲۶۰۵	۰/۰۲۶۰۵	۰/۰۲۶۰۵	۰/۰۲۶۰۵	۰/۰۲۶۰۵
	۵	-۰/۰۳۳۹۹	-۰/۰۱۶۱۰	-۰/۰۲۱۱۴	-۰/۰۰۸۲۸	-۰/۰۱۲۱۲	-۰/۰۰۸۲۸	-۰/۰۱۲۱۲	-۰/۰۱۲۱۲	۰/۰۳۲۱۵	۰/۰۲۶۰۹	۰/۰۲۷۸۴	۰/۰۲۷۰۰	۰/۰۲۷۰۰	۰/۰۲۷۰۰	۰/۰۲۷۰۰	۰/۰۲۷۰۰	۰/۰۲۷۰۰
۳۰	۱	-۰/۰۳۷۸۳	-۰/۰۱۵۸۸	-۰/۰۲۳۴۱	-۰/۰۰۸۵۸	-۰/۰۱۲۷۸	-۰/۰۰۸۵۸	-۰/۰۱۲۷۸	-۰/۰۱۲۷۸	۰/۰۴۱۹۲	۰/۰۳۴۰۵	۰/۰۲۹۱۷	۰/۰۲۵۷۶	۰/۰۲۹۱۷	۰/۰۳۴۰۵	۰/۰۲۹۱۷	۰/۰۲۵۷۶	۰/۰۲۹۱۷
	۲	-۰/۰۴۰۷۵	-۰/۰۱۵۷۵	-۰/۰۲۵۳۴	-۰/۰۰۸۷۸	-۰/۰۱۱۴۴	-۰/۰۰۸۷۸	-۰/۰۱۱۴۴	-۰/۰۱۱۴۴	۰/۰۴۲۵۲	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۱۶۰	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۳۱۶۰	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۱۶۰	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۳۱۶۰
	۳	-۰/۰۴۳۴۵	-۰/۰۱۵۲۹	-۰/۰۲۷۶۵	-۰/۰۰۸۵۸	-۰/۰۱۱۴۵	-۰/۰۰۸۵۸	-۰/۰۱۱۴۵	-۰/۰۱۱۴۵	۰/۰۴۳۹۶	۰/۰۳۳۵۴	۰/۰۳۲۰۷	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۳۲۰۷	۰/۰۳۳۵۴	۰/۰۳۲۰۷	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۳۲۰۷
	۴	-۰/۰۴۴۸۵	-۰/۰۱۵۷۲	-۰/۰۳۰۴۰	-۰/۰۰۹۳۲	-۰/۰۱۱۳۹	-۰/۰۰۹۳۲	-۰/۰۱۱۳۹	-۰/۰۱۱۳۹	۰/۰۵۰۱۶	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۵۴۱	۰/۰۳۱۱۸	۰/۰۳۵۴۱	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۵۴۱	۰/۰۳۱۱۸	۰/۰۳۵۴۱
	۵	-۰/۰۴۹۹۱	-۰/۰۱۵۷۲	-۰/۰۳۲۸۶	-۰/۰۰۹۷۴	-۰/۰۱۱۱۶	-۰/۰۰۹۷۴	-۰/۰۱۱۱۶	-۰/۰۱۱۱۶	۰/۰۵۳۱۰	۰/۰۳۳۹۹	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۱۵۶	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۳۹۹	۰/۰۳۷۶۲	۰/۰۳۱۵۶	۰/۰۳۷۶۲
۱۰۰	۱	-۰/۰۳۷۴۸	-۰/۰۳۲۸۶	-۰/۰۲۶۰۶	-۰/۰۲۳۳۶	-۰/۰۲۶۳۳	-۰/۰۲۳۳۶	-۰/۰۲۶۳۳	-۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۴۰۹۲	۰/۰۳۶۸۴	۰/۰۳۰۶۹	۰/۰۲۸۴۴	۰/۰۳۰۶۹	۰/۰۳۶۸۴	۰/۰۳۰۶۹	۰/۰۲۸۴۴	۰/۰۳۰۶۹
	۲	-۰/۰۳۵۵۶	-۰/۰۱۹۳۲	-۰/۰۱۳۰۲	-۰/۰۰۸۹۳	-۰/۰۱۳۳۶	-۰/۰۰۸۹۳	-۰/۰۱۳۳۶	-۰/۰۱۳۳۶	۰/۰۴۹۸۴	۰/۰۴۴۰	۰/۰۳۹۰	۰/۰۳۶۰	۰/۰۳۹۰	۰/۰۴۴۰	۰/۰۳۹۰	۰/۰۳۶۰	۰/۰۳۹۰
	۳	-۰/۰۳۳۶۶	-۰/۰۱۵۱۲	-۰/۰۱۱۰	-۰/۰۰۵۶۰	-۰/۰۱۱۱۷	-۰/۰۰۵۶۰	-۰/۰۱۱۱۷	-۰/۰۱۱۱۷	۰/۰۴۷۶۴	۰/۰۳۸۰	۰/۰۳۴۹۱	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۴۹۱	۰/۰۳۸۰	۰/۰۳۴۹۱	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۴۹۱
	۴	-۰/۰۳۳۶۹	-۰/۰۱۲۱۳	-۰/۰۱۲۱۱	-۰/۰۰۵۵۵	-۰/۰۱۰۵۵	-۰/۰۰۵۵۵	-۰/۰۱۰۵۵	-۰/۰۱۰۵۵	۰/۰۴۷۳۳	۰/۰۳۷۴۹	۰/۰۳۸۹۶	۰/۰۳۵۶	۰/۰۳۸۹۶	۰/۰۳۷۴۹	۰/۰۳۸۹۶	۰/۰۳۵۶	۰/۰۳۸۹۶
	۵	-۰/۰۳۲۶۹	-۰/۰۱۱۰	-۰/۰۱۲۸۳	-۰/۰۰۴۲۹	-۰/۰۰۹۹۸	-۰/۰۰۴۲۹	-۰/۰۰۹۹۸	-۰/۰۰۹۹۸	۰/۰۴۸۲۶	۰/۰۳۵۵۸	۰/۰۳۹۴۷	۰/۰۳۵۸	۰/۰۳۹۴۷	۰/۰۳۵۵۸	۰/۰۳۹۴۷	۰/۰۳۵۸	۰/۰۳۹۴۷
۲۰۰	۱	-۰/۰۳۷۰۷	-۰/۰۱۰۴۰	-۰/۰۱۲۹۳	-۰/۰۰۳۹۱	-۰/۰۰۹۳۳	-۰/۰۰۳۹۱	-۰/۰۰۹۳۳	-۰/۰۰۹۳۳	۰/۰۴۰۷۶	۰/۰۳۸۰۷	۰/۰۳۰۲۰	۰/۰۲۸۱۸	۰/۰۳۰۲۰	۰/۰۳۸۰۷	۰/۰۳۰۲۰	۰/۰۲۸۱۸	۰/۰۳۰۲۰
	۲	-۰/۰۳۰۱۵	-۰/۰۰۹۱۹	-۰/۰۱۶۱۳	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۵۵	۰/۰۳۲۰۲	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴
	۳	-۰/۰۳۰۱۵	-۰/۰۰۹۱۹	-۰/۰۱۶۱۳	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۵۵	۰/۰۳۲۰۲	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴
	۴	-۰/۰۳۰۱۵	-۰/۰۰۹۱۹	-۰/۰۱۶۱۳	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۵۵	۰/۰۳۲۰۲	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴
	۵	-۰/۰۳۰۱۵	-۰/۰۰۹۱۹	-۰/۰۱۶۱۳	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۱۳	-۰/۰۰۳۵۵	-۰/۰۰۳۵۵	۰/۰۳۲۰۲	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۳۱۵۷	۰/۰۲۱۹۴	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۱۹۴
۳۰۰	۱	-۰/۰۳۳۸۸	۰/۰۰۹۰۴	-۰/۰۱۹۸۵	-۰/۰۰۲۴۳	-۰/۰۰۶۶۹	-۰/۰۰۲۴۳	-۰/۰۰۶۶۹	-۰/۰۰۶۶۹	۰/۰۳۲۰۲	۰/۰۳۱۳۲	۰/۰۲۳۹۱	۰/۰۲۸۸	۰/۰۳۱۳۲	۰/۰۳۱۳۲	۰/۰۲۳۹۱	۰/۰۲۸۸	۰/۰۳۱۳۲
	۲	-۰/۰۳۵۷۹	-۰/۰۰۸۹۱	-۰/۰۲۱۱۸	-۰/۰۰۲۳۳	-۰/۰۰۶۵۰	-۰/۰۰۲۳۳	-۰/۰۰۶۵۰	-۰/۰۰۶۵۰	۰/۰۳۸۸۲	۰/۰۳۷۶۶	۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۳۷۶۶	۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۲۶۳۳	۰/۰۲۶۳۳
	۳	-۰/۰۳۸۱۱	-۰/۰۰۹۱۸	-۰/۰۲۲۹۵	-۰/۰۰۲۶۹	-۰/۰۰۵۷۸	-۰/۰۰۲۶۹	-۰/۰۰۵۷۸	-۰/۰۰۵۷۸	۰/۰۴۱۰۳	۰/۰۳۷۷۷	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۳۷۷۷	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹
	۴	-۰/۰۴۰۰۱	-۰/۰۰۹۰۴	-۰/۰۲۴۳۶	-۰/۰۰۲۶۹	-۰/۰۰۵۲۰	-۰/۰۰۲۶۹	-۰/۰۰۵۲۰	-۰/۰۰۵۲۰	۰/۰۴۲۷۳	۰/۰۳۷۵۲	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۳۷۵۲	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹	۰/۰۲۷۶۹
	۵	-۰/۰۴۲۵۳	-۰/۰۰۹۵۲	-۰/۰۲۶۴۴	-۰/۰۰۳۴۳	-۰/۰۰۵۳۸	-۰/۰۰۳۴۳	-۰/۰۰۵۳۸	-۰/۰۰۵۳۸	۰/۰۴۵۱۲	۰/۰۳۷۸۰	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۳۷۸۰	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۲۸۰۶	۰/۰۲۸۰۶

جدول ۲: آریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنزروی توزیع نمایی با میانگین ۱.

n	m	جذر میانگین توان دوم خطا									
		HV _{mn}	HE _{mn}	HC _{mn}	HZ _{mn}	HZ _{mn}	HV _{mn}	HE _{mn}	HC _{mn}	HZ _{mn}	HZ _{mn}
۱۰	۱	-۰/۰۵۳۱۶	-۰/۰۳۹۳۰	-۰/۰۳۹۱۳	-۰/۰۳۱۰۲	-۰/۰۳۰۵۷	۰/۰۵۵۹	۰/۰۴۹۶	۰/۰۴۹۱۳	۰/۰۴۹۱۳	۰/۰۴۷۸
	۲	-۰/۰۴۴۸۸	-۰/۰۲۵۲۶	-۰/۰۲۷۱۶	-۰/۰۱۵۱۳	-۰/۰۱۵۷۴	۰/۰۵۸۳۱	۰/۰۴۹۹۹	۰/۰۴۰۴۰	۰/۰۴۰۴۰	۰/۰۳۷۸۸
	۳	-۰/۰۴۳۴۵	-۰/۰۱۷۸۳	-۰/۰۲۴۰۴	-۰/۰/۰۸۱۶	-۰/۰/۰۸۴۶	۰/۰۵۶۹۸	۰/۰۴۰۹۴	۰/۰۳۸۳۳	۰/۰۳۸۳۳	۰/۰۳۷۸۴
	۴	-۰/۰۴۶۶۰	-۰/۰۱۴۹۱	-۰/۰۲۵۴۳	-۰/۰/۰۵۸۳	-۰/۰/۰۵۱۴	۰/۰۵۹۱۹	۰/۰۳۹۴۳	۰/۰۳۵۱۹	۰/۰۳۵۱۹	۰/۰۳۷۹۵
	۵	-۰/۰۴۶۶۱	-۰/۰/۰۸۸۳	-۰/۰۳۳۰۹	-۰/۰/۰۰۰۰۱	-۰/۰/۰۱۴۱	۰/۰۶۰۲۰	۰/۰۳۹۱۱	۰/۰۴۵۵۱	۰/۰۳۹۶۳	۰/۰۴۰۱۸
۲۰	۱	-۰/۰۴۱۳۲	-۰/۰۳۳۳۹	-۰/۰۲۹۲۵	-۰/۰۲۵۱۹	-۰/۰۲۶۳۰	۰/۰۸۹۸۸	۰/۰۳۳۰	۰/۰۳۹۲۶	۰/۰۳۹۲۶	۰/۰۳۶۸۰
	۲	-۰/۰۳۰۳۷	-۰/۰۲۰۵۶	-۰/۰۱۶۱۲	-۰/۰۱۰۰۲	-۰/۰۱۲۴۹	۰/۰۹۶۹	۰/۰۳۲۸۰	۰/۰۳۰۲۹	۰/۰۲۷۵۶	۰/۰۲۸۲۵
	۳	-۰/۰۲۵۴۴	-۰/۰۱۲۵۳	-۰/۰۱۱۱۷	-۰/۰/۰۳۱۳	-۰/۰/۰۵۸۸	۰/۰۳۹۴	۰/۰۲۷۱۲	۰/۰۲۶۲۳	۰/۰۲۴۵۲	۰/۰۲۴۶۲
	۴	-۰/۰۲۵۷۹	-۰/۰/۰۹۹۵	-۰/۰۱۱۲۲	-۰/۰/۰۱۴۵	-۰/۰/۰۳۶۶	۰/۰۳۵۴۴	۰/۰۲۶۲۶	۰/۰۲۷۱۱	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۴۵۷
	۵	-۰/۰۲۶۴۳	-۰/۰/۰۷۵۴	-۰/۰۱۱۳۶	-۰/۰/۰۰۵۵	-۰/۰/۰۱۸۸	۰/۰۳۶۱۸	۰/۰۲۵۸۲	۰/۰۲۷۵۷	۰/۰۲۵۲۸	۰/۰۲۴۶۷
۳۰	۱	-۰/۰۲۶۲۸	-۰/۰/۰۴۳۴	-۰/۰۱۰۳۹	۰/۰/۰۳۶۱	-۰/۰/۰۱۵۹	۰/۰۳۵۴۸	۰/۰۲۴۳۳	۰/۰۲۶۵۵	۰/۰۲۴۶۶	۰/۰۲۴۱۰
	۲	-۰/۰۲۵۹۵	-۰/۰/۰۰۹۵	-۰/۰/۰۹۱۴	۰/۰/۰۶۵۶	۰/۰/۰۵۲۲	۰/۰۳۵۷۱	۰/۰۲۴۵۴	۰/۰۲۶۹۹	۰/۰۲۶۳۸	۰/۰۲۵۶۶
	۳	-۰/۰۲۶۶۵	-۰/۰/۰۰۱۸۱	-۰/۰/۰۸۱۹	۰/۰/۰۹۳۹	۰/۰/۰۸۷۷	۰/۰۳۵۷۱	۰/۰۲۴۶۷	۰/۰۲۶۳۶	۰/۰۲۷۱۳	۰/۰۲۶۵۲
	۴	-۰/۰۲۸۴۲	-۰/۰/۰۰۳۷۰	-۰/۰/۰۹۲۷	۰/۰/۰۱۵۶	۰/۰/۰۵۲۲	۰/۰۳۸۵۱	۰/۰۲۶۱۳	۰/۰۲۸۵۵	۰/۰۲۹۳۰	۰/۰۲۹۳۶
	۵	-۰/۰۲۸۳۸	۰/۰/۰۵۸۰	-۰/۰/۰۹۹۳	۰/۰/۰۱۳۳	۰/۰/۰۴۲۹	۰/۰۳۸۱۱	۰/۰۲۶۰۸	۰/۰۲۷۵۹	۰/۰۲۹۹۷	۰/۰۳۰۶۷
۴۰	۱	-۰/۰۳۷۱۵	-۰/۰۳۲۵۳	-۰/۰۲۵۷۲	۰/۰۲۳۰۲	-۰/۰۲۴۲۷	۰/۰۴۲۹۴	۰/۰۳۰۱	۰/۰۳۳۴۳	۰/۰۳۱۶۰	۰/۰۳۲۰۹
	۲	-۰/۰۳۳۶۳	-۰/۰۱۷۰۹	-۰/۰۱۰۷۱	۰/۰/۰۶۶۶	-۰/۰/۰۹۰۹	۰/۰۳۰۷۲	۰/۰۲۶۰۲	۰/۰۲۳۹۹	۰/۰۲۰۷۷	۰/۰۲۱۴۴
	۳	-۰/۰۲۰۳۶	-۰/۰۱۱۸۲	-۰/۰/۰۸۰۸	۰/۰/۰۲۷۱	-۰/۰/۰۵۷۲	۰/۰۲۸۵۴	۰/۰۲۳۳۳	۰/۰۲۱۷۱	۰/۰۲۰۳۶	۰/۰۲۰۶۸
	۴	-۰/۰۱۹۳۷	-۰/۰/۰۸۸۱	-۰/۰/۰۳۰	۰/۰/۰۰۶۸	-۰/۰/۰۳۷۰	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۱۶۷	۰/۰۲۱۳۳	۰/۰۲۰۱۰	۰/۰۱۹۹۹
	۵	-۰/۰۱۹۷۹	-۰/۰/۰۸۱۹	-۰/۰/۰۶۹	۰/۰/۰۰۲۵	-۰/۰/۰۳۰۴	۰/۰۲۷۵	۰/۰۲۰۷۴	۰/۰۲۱۴	۰/۰۱۹۸۲	۰/۰۱۹۶۸
۵۰	۱	-۰/۰۱۸۸۰	-۰/۰/۰۴۱۷	-۰/۰/۰۶۵۱	۰/۰/۰۲۷۷	-۰/۰/۰۰۴۸	۰/۰۲۶۶۴	۰/۰۱۹۳۳	۰/۰۲۰۲۵	۰/۰۱۹۴۳	۰/۰۱۸۸۰
	۲	-۰/۰۱۹۰۶	۰/۰/۰۳۹	-۰/۰/۰۶۰۹	۰/۰/۰۶۵۲	۰/۰/۰۱۲۹	۰/۰۲۷۳۶	۰/۰۱۹۴۶	۰/۰۲۰۷۴	۰/۰۲۰۴۶	۰/۰۱۹۵۲
	۳	-۰/۰۱۸۶۷	۰/۰/۰۰۰۳	-۰/۰/۰۵۱۰	۰/۰/۰۶۲۴	۰/۰/۰۳۸۱	۰/۰۲۷۶۸	۰/۰۲۰۴۳	۰/۰۲۱۴۱	۰/۰۲۱۹۸	۰/۰۲۰۷۸
	۴	-۰/۰۲۰۷۰	۰/۰/۰۲۰۹	-۰/۰/۰۵۶۷	۰/۰/۰۸۸۸	۰/۰/۰۶۶۱	۰/۰۲۸۷۲	۰/۰۲۰۰۱	۰/۰۲۱۲۲	۰/۰۲۱۵۵	۰/۰۲۱۱۹
	۵	-۰/۰۲۰۷۰	۰/۰/۰۴۱۳	-۰/۰/۰۴۹۷	۰/۰/۰۸۵	۰/۰/۰۹۱۳	۰/۰۲۹۴۲	۰/۰۲۱۰	۰/۰۲۲۱۱	۰/۰۲۲۵۲	۰/۰۲۲۳۱
۶۰	۱	-۰/۰۲۰۳۹	۰/۰/۰۶۴۸	-۰/۰/۰۳۷۹	۰/۰/۰۳۲۸	۰/۰/۰۲۱۱	۰/۰۲۹۴۷	۰/۰۲۲۴	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۵۶۲	۰/۰۲۵۰۵
	۲	-۰/۰۲۰۷۹	۰/۰/۰۸۱۲	-۰/۰/۰۳۳۴	۰/۰/۰۴۹۸	۰/۰/۰۴۵	۰/۰۳۰۳۱	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۷۱۹	
	۳	-۰/۰۲۵۵۰	۰/۰/۰۱۴۶	-۰/۰/۰۲۱۷	۰/۰/۰۳۳۱	۰/۰/۰۷۴۵	۰/۰۳۲۷	۰/۰۲۳۳۷	۰/۰۲۳۳۷	۰/۰۲۸۰۷	
	۴	-۰/۰۲۱۶۰	۰/۰/۰۱۴۱	-۰/۰/۰۲۴۸	۰/۰/۰۳۳۲	۰/۰/۰۸۲۵	۰/۰۳۱۴	۰/۰۲۵۰	۰/۰۲۴۸	۰/۰۳۰۴۹	
	۵	-۰/۰۲۱۶۰	۰/۰/۰۱۴۱	-۰/۰/۰۲۴۸	۰/۰/۰۳۳۲	۰/۰/۰۸۲۵	۰/۰۳۱۴	۰/۰۲۵۰	۰/۰۲۴۸	۰/۰۳۰۴۹	

جدول ۳: آریبی و جذرمیانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی توزیع یکنواخت (۱، ۰).

n	m	آریبی					جذرمیانگین توان دوم خطا					
		HE _{mn}	HC _{mn}	HZ _{mn}	HZ _{2mn}	HE _{mn}	HC _{mn}	HZ _{mn}	HZ _{2mn}	HZ _{3mn}	HZ _{4mn}	
۱۰	۱	-۰/۵۱۰۵	-۰/۳۷۱۷	-۰/۳۹۰۷	-۰/۵۳۳۹	۰/۵۶۱۸	۰/۳۳۹۷	۰/۳۲۸۱	۰/۳۷۱۷	۰/۳۲۵۸	۰/۳۲۵۸	
	۲	-۰/۴۰۹۹	-۰/۲۱۲۸	-۰/۱۱۲۲	-۰/۱۰۲۹	۰/۴۴۸۹	۰/۲۱۱۴	۰/۲۰۱۱	۰/۲۱۸۷	۰/۲۰۳۱	۰/۲۰۳۱	
	۳	-۰/۳۲۷۱	-۰/۱۷۰۹	-۰/۰۹۶۷	-۰/۰۸۷۹	۰/۳۵۹۴	۰/۲۴۰۵	۰/۲۴۹۰	۰/۲۹۰۸	۰/۱۹۰۷	۰/۱۹۰۷	
	۴	-۰/۲۶۸۸	-۰/۱۵۱۹	-۰/۰۸۹۹	-۰/۰۸۱۹	۰/۲۹۸۳	۰/۲۲۲۷	۰/۲۲۲۷	۰/۱۸۶۷	۰/۱۸۶۲	۰/۱۸۶۲	
	۵	-۰/۲۰۳۸	-۰/۱۲۵۹	-۰/۰۷۶۷	-۰/۰۷۳۳	۰/۲۵۲۲	۰/۲۰۵۳	۰/۲۳۸۵	۰/۱۷۵۱	۰/۱۷۴۷	۰/۱۷۴۷	
	۶	-۰/۱۶۳۳	-۰/۱۰۳۰	-۰/۰۶۳۴	-۰/۰۶۶۲	۰/۲۱۹۰	۰/۲۵۲۵	۰/۳۰۸۱	۰/۲۷۲۵	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۹۸	
	۷	-۰/۱۲۵۵	-۰/۰۸۱۹	-۰/۰۵۲۶	-۰/۰۵۳۳	۰/۱۸۵۸	۰/۲۵۱۴	۰/۱۴۹۰	۰/۰۹۹۵	۰/۰۹۹۵	۰/۰۹۹۵	
	۸	-۰/۰۹۶۷	-۰/۰۶۳۴	-۰/۰۳۵۴	-۰/۰۳۵۴	۰/۱۵۲۳	۰/۲۳۳۶	۰/۱۵۵۳	۰/۰۹۳۸	۰/۰۹۲۸	۰/۰۹۲۸	
	۹	-۰/۰۷۳۳	-۰/۰۴۶۷	-۰/۰۲۳۳	-۰/۰۲۶۹	۰/۱۲۵۹	۰/۲۱۱۷	۰/۱۶۲۷	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۴۷	
	۱۰	-۰/۰۵۳۳	-۰/۰۳۳۳	-۰/۰۱۳۳	-۰/۰۱۳۳	۰/۱۰۲۹	۰/۱۰۵۲	۰/۲۰۷۹	۰/۰۸۲۹	۰/۰۸۲۹	۰/۰۸۲۹	
	۲۰	۱	-۰/۳۵۲۵	-۰/۲۳۷۸	-۰/۱۰۷	-۰/۱۹۸۱	۰/۳۶۸۵	۰/۳۳۴۵	۰/۲۵۹۵	۰/۲۳۴۹	۰/۲۲۰۵	۰/۲۲۰۵
		۲	-۰/۲۷۷۰	-۰/۱۶۱۷	-۰/۰۶۲۸	-۰/۰۵۵۰	۰/۲۴۰۲	۰/۱۷۹۶	۰/۱۲۷۴	۰/۰۹۹۶	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۱۰
		۳	-۰/۲۰۰۱	-۰/۱۱۴۷	-۰/۰۴۳۸	-۰/۰۳۷۷	۰/۲۱۱۵	۰/۱۳۳۶	۰/۱۰۸۷	۰/۰۷۶۵	۰/۰۷۲۵	۰/۰۷۲۵
		۴	-۰/۱۹۷۰	-۰/۰۹۱۳	-۰/۰۲۴۴	-۰/۰۲۰۹	۰/۲۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۰۶۳	۰/۰۶۶۱	۰/۰۶۶۴	۰/۰۶۶۴
		۵	-۰/۱۴۷۰	-۰/۰۷۸۸	-۰/۰۱۹۴	-۰/۰۱۹۴	۰/۲۱۳۵	۰/۰۹۹۴	۰/۱۱۳۷	۰/۰۶۴۳	۰/۰۶۵۰	۰/۰۶۵۰
۶		-۰/۱۱۳۳	-۰/۰۶۶۰	-۰/۰۱۸۶	-۰/۰۱۵۰	۰/۲۱۹۸	۰/۰۸۷۰	۰/۱۱۸۲	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۱۷	۰/۰۶۱۷	
۷		-۰/۰۸۲۵	-۰/۰۵۹۲	-۰/۰۱۸۵	-۰/۰۱۴۶	۰/۲۲۲۶	۰/۰۸۰۹	۰/۱۲۶۹	۰/۰۵۴۴	۰/۰۶۱۱	۰/۰۶۱۱	
۸		-۰/۰۶۴۶	-۰/۰۵۷۵	-۰/۰۲۱۰	-۰/۰۲۱۰	۰/۲۵۰۸	۰/۰۷۹۷	۰/۱۳۹۹	۰/۰۵۴۹	۰/۰۶۲۳	۰/۰۶۲۳	
۹		-۰/۰۴۶۰	-۰/۰۵۲۵	-۰/۰۲۰۰	-۰/۰۱۸۱	۰/۲۶۶۰	۰/۰۷۶۷	۰/۱۴۹۹	۰/۰۵۴۳	۰/۰۶۴۶	۰/۰۶۴۶	
۱۰		-۰/۰۳۷۹	-۰/۰۵۱۵	-۰/۰۱۵۶	-۰/۰۱۵۶	۰/۲۸۵۳	۰/۰۷۳۳	۰/۱۶۲۱	۰/۰۵۹۸	۰/۰۶۴۶	۰/۰۶۴۶	
۱۱		-۰/۰۲۹۳	-۰/۰۴۶۸	-۰/۰۱۸۷	-۰/۰۱۶۴	۰/۲۹۹۱	۰/۰۷۱۸	۰/۱۶۸۶	۰/۰۵۹۴	۰/۰۶۴۴	۰/۰۶۴۴	
۱۲		-۰/۰۲۱۵	-۰/۰۴۲۸	-۰/۰۱۷۲	-۰/۰۱۷۲	۰/۳۲۱۳	۰/۰۶۶۳	۰/۱۸۲۵	۰/۰۵۸۹	۰/۰۶۵۸	۰/۰۶۵۸	
۱۳		-۰/۰۱۴۹	-۰/۰۳۸۳	-۰/۰۱۶۸	-۰/۰۱۶۸	۰/۳۳۷۸	۰/۰۶۱۱	۰/۱۹۲۸	۰/۰۵۶۷	۰/۰۶۶۸	۰/۰۶۶۸	
۱۴		-۰/۰۱۰۳	-۰/۰۳۳۵	-۰/۰۱۶۳	-۰/۰۱۵۰	۰/۳۵۲۳	۰/۰۵۷۵	۰/۱۹۹۱	۰/۰۵۷۵	۰/۰۶۱۶	۰/۰۶۱۶	
۱۵		-۰/۰۰۷۰	-۰/۰۳۱۸	-۰/۰۱۵۰	-۰/۰۱۵۰	۰/۳۶۶۶	۰/۰۵۲۵	۰/۲۱۶۵	۰/۰۵۹۰	۰/۰۶۱۷	۰/۰۶۱۷	

تحت هر سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت و به ازای هر سه حجم نمونه $20, 10$ و 30 از HE ، HV و HCO بهتر است. با توجه به اینکه اولاً شرط $m \leq \frac{n}{2}$ فقط در مورد توزیع نمایی لازم است و ثانیاً جداول نشان می‌دهد که m بهینه کمتر از $\frac{n}{2}$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم $HZ1$ به طور یکنواخت از همه برآوردهای مورد بررسی از نظر اریبی و $RMSE$ بهتر است.

فرض کنید که مشاهدات x_1, \dots, x_n داده شده اند، نحوه انتخاب m ($m \leq \frac{n}{2}$) که به ازای آن بهترین برآورد آنتروپی حاصل گردد، هنوز به عنوان مسأله‌ای باز مطرح است. ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) رابطه $m = \lceil \sqrt{n} + 0.5 \rceil$ را برای انتخاب m هنگامی که n داده شده است، پیشنهاد دادند، که در آن $[\cdot]$ علامت جزء صحیح است. همان‌طور که از جداول ۱ تا ۳ مشخص است، برآوردهای پیشنهادی به ازای این مقدار m نیز عملکردی بهتر نسبت به سایر برآوردها دارند.

۳ آزمون‌های نیکویی برازش

در این بخش به معرفی آزمون‌های نیکویی برازش برای فرضیه‌های نمایی بودن و نرمال بودن توزیع جامعه بر اساس برآوردهای جدید آنتروپی معرفی شده می‌پردازیم. از آنجا که رابطه

$$HE_{mn} = HV_{mn} + \frac{1}{n} [m \log(2m) + \log\left(\frac{(m-1)!}{(2m-1)!}\right)],$$

میان برآوردهای واسیچک (۱۹۷۶) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برقرار است، توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای این دو برآوردها دقیقاً یکسان می‌باشد. لذا در این مقاله توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای برآوردهای جدید را تنها با آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای برآوردها واسیچک (۱۹۷۶) و برآوردها کوریا (۱۹۹۵) مقایسه می‌کنیم.

۱۹۰ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

۱.۳ آزمون نمایی بودن

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیعی با تابع چگالی مطلقاً پیوسته f باشد. می‌خواهیم فرضیه $f^\circ = f$ را در مقابل نقیض آن آزمون کنیم، که در آن $f^\circ(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ و θ مقداری مثبت و نامعلوم است. فاصله نامتقارن کولبک-لایبلر f از f° عبارت است از

$$\begin{aligned} D(f^\circ, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta) \ln\left(\frac{f(x, \theta)}{f^\circ(x, \theta)}\right) dx \\ &= -H(X) + \ln(\theta) + \frac{1}{\theta} E_f(X). \end{aligned}$$

به سادگی به کمک مشتق‌گیری معلوم می‌شود که

$$D_{\inf} = -H(X) + \ln E_f(X) + 1,$$

بدیهی است که $D_{\inf} = \inf_{\theta} D(f, f^\circ) = 0$ اگر و تنها اگر H درست باشد. لذا می‌توان آماره آزمون را به صورت‌های

$$TZ_1 = 1 + \ln(\bar{X}) - HZ_1, \quad TZ_2 = 1 + \ln(\bar{X}) - HZ_2$$

پیشنهاد کرد، که بر مبنای آن‌ها فرضیه صفر را به ازای مقادیر بزرگ TZ_1 و TZ_2 رد می‌کنیم. توزیع این آماره‌ها به روش تحلیلی قابل محاسبه نمی‌باشد، بنابراین برای بدست آوردن نقاط بحرانی آزمون‌ها از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده می‌کنیم. قابل ذکر است که نقاط بحرانی به خاطر اینکه آماره آزمون نسبت به تبدیلات مقیاسی ناورد می‌باشد، به پارامتر مجهول بستگی ندارد. نقاط بحرانی به این صورت محاسبه می‌شود، که ابتدا از توزیع نمایی با میانگین یک، نمونه‌ای به حجم n تولید و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم و این کار را ۱۰,۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. مقدار بحرانی آزمون با استفاده از چندک $1 - \alpha$ م توزیع تجربی آماره آزمون بدست می‌آید. جداول ۴ و ۵ حاوی نتایج ۱۰,۰۰۰ دفعه شبیه‌سازی (حجم نمونه ۱۰ و ۲۰) است که برای بدست آوردن توان آزمون‌های پیشنهادی و توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) و کوریا (۱۹۹۵) در

سطح معنی داری $\alpha = 0/05$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. آماره‌های آزمون بر مبنای برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) و کوریا (۱۹۹۵) به صورت زیر است.

$$TV = 1 + \ln(\bar{X}) - HV_{mn}, \quad TC = 1 + \ln(\bar{X}) - HC_{mn}.$$

در حالت کلی در آزمون‌های مبتنی بر آنترویی مقدار بهینه m علاوه بر حجم نمونه به توزیع فرضیه مقابل نیز بستگی دارد و نمی‌توان، در حجم نمونه ثابت n مقدار m را به قسمی تعیین کرد که توان آزمون به ازای تمام توزیع‌های جانشین ماکسیمم شود. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) به ازای حجم نمونه n مقداری از m را پیشنهاد دادند که آزمون مربوطه دارای توان نسبتاً خوبی به ازای تمام توزیع‌های جانشین است. این مطلب برای آزمون‌های پیشنهادی ما نیز صادق می‌باشد لذا ما نیز مقدار m را برابر ۳ و ۴ به ترتیب برای حجم نمونه ۱۰ و ۲۰ در نظر می‌گیریم. در مقایسه توان‌ها از توزیع‌های زیر به عنوان فرضیه جانشین استفاده شده‌است.

الف) توزیع وایبل با تابع چگالی

$$f(x; \lambda; \beta) = \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} \exp(-(\lambda x)^\beta), \beta > 0, \lambda > 0, x \geq 0$$

ب) توزیع گاما با تابع چگالی

$$f(x; \lambda; \beta) = \frac{\lambda^\beta x^{\beta-1} \exp(-\lambda x)}{\Gamma(\beta)}, \beta > 0, \lambda > 0, x \geq 0$$

ج) توزیع لگ‌نرمال با تابع چگالی

$$f(x; \nu; \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x) - \nu)^2\right), -\infty \leq \nu \leq \infty, \sigma > 0, x > 0$$

در این مقاله مقادیر سیاه در جدول‌ها نشان‌دهنده آن است که توان آزمون، در حجم نمونه در نظر گرفته شده و تحت توزیع جانشین از توان سایر آزمون‌های بر مبنای آنترویی بیشتر است.

از آنجا که برای بدست آوردن نقاط بحرانی آزمون‌ها از توزیع نمایی با میانگین یک داده تولید کردیم، در تمامی توزیع‌های بالا پارامترهای توزیع طوری انتخاب شده‌اند که امید ریاضی متغیر تصادفی برابر یک شود. بنابراین برای توزیع وایبل

۱۹۲ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

گرفته می‌شود. البته واضح است که همه آزمون‌های معرفی شده آزمون‌هایی دقیق می‌باشند و نقاط بحرانی این آزمون‌ها به مقدار پارامتر λ توزیع نمایی بستگی ندارند، یعنی اگر از توزیع نمایی با میانگینی غیر از یک، داده تولید شود و مقادیر بحرانی آزمون‌ها را محاسبه کنیم مقادیر بحرانی تغییری نمی‌کنند.

ما در اینجا از فرضیه‌های جاننشینی استفاده کردیم که ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) از آن‌ها برای مقایسه توان آزمون خود با آزمون‌های دیگر استفاده کرده‌اند. البته می‌توان فرضیه‌های جاننشینی را در نظر گرفت که میانگین توزیع جانشین یک نباشد. مجدداً تاکید می‌شود که در توزیع‌های گاما، وایبل و لگ‌نرمال تنها پارامتر شکل در توان آزمون موثر و پارامتر مقیاس در توان آزمون تاثیری ندارد.

جدول ۴: توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای آنتروپی، $\alpha = 0.05$ و $n = 10$

Alternatives	TV	TC	TZ ₁	TZ ₂
Gamma(2, 2)	0.3255	0.3325	0.3194	0.3500
Gamma(3, 3)	0.6345	0.6360	0.6162	0.6693
Gamma(4, 4)	0.8274	0.8300	0.8114	0.8580
Weibull(2, 1/gamma(1 + 1/2))	0.6904	0.7020	0.6826	0.7333
Weibull(3, 1/gamma(1 + 1/3))	0.9825	0.9831	0.9776	0.9888
Weibull(4, 1/gamma(1 + 1/4))	0.9998	0.9998	0.9997	0.9999
Lognormal(-4/5, 3)	0.2041	0.1418	0.1379	0.1330
Lognormal(-4/5, 2)	0.5910	0.5018	0.4993	0.5176
Lognormal(-8, 4)	0.8155	0.7573	0.7579	0.8176

جدول ۵: توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای آنتروپی، $\alpha = 0.05$ و $n = 20$

Alternatives	TV	TC	TZ ₁	TZ ₂
Gamma(2, 2)	0.5046	0.4971	0.4776	0.5788
Gamma(3, 3)	0.8900	0.8776	0.8587	0.9281
Gamma(4, 4)	0.9835	0.9776	0.9706	0.9917
Weibull(2, 1/gamma(1 + 1/2))	0.9333	0.9296	0.9185	0.9611
Weibull(3, 1/gamma(1 + 1/3))	0.9999	0.9999	0.9998	1
Weibull(4, 1/gamma(1 + 1/4))	1	1	1	1
Lognormal(-4/5, 3)	0.6549	0.5830	0.5781	0.6122
Lognormal(-4/5, 2)	0.9673	0.9489	0.9492	0.9488
Lognormal(-8, 4)	0.9996	0.9951	0.9952	0.9939

همان‌طور که در جداول ۴ و ۵ ملاحظه می‌شود، هیچ کدام از آزمون‌ها به طور کامل بر دیگری تسلط ندارد. به این معنی که هیچ کدام به ازای هر سه توزیع

جانشین توان بیشتری ندارد، اما آزمون‌های مبتنی بر برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) و $TZ2$ در توزیع‌های جانشین مختلف دارای ماکسیمم توان هستند. همچنین ملاحظه می‌شود که در یکی از سه توزیع جانشین (توزیع لگ‌نرمال) توان آزمون مبتنی بر TV و در دو توزیع وایبل و گاما توان آزمون بر مبنای $TZ2$ بیشتر است. آزمون مبتنی بر $TZ2$ ، در بیشتر موارد توان بهتری نسبت به سایر آزمون‌ها دارد.

۲.۳ آزمون نرمال بودن

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیعی با تابع چگالی مطلقاً پیوسته f باشد. می‌خواهیم فرضیه $H_0: f = f^\circ$ را در مقابل نقیض آن آزمون کنیم، که در آن $f^\circ(x; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ و μ و $\sigma > 0$ مقادیر نامعلوم هستند. بنابراین فرضیه‌ای در نظریه اطلاع (شانون، ۱۹۴۸) توزیع نرمال دارای بیشترین مقدار آنتروپی در رده توزیع‌های با واریانس معلوم σ^2 است. واسیچک (۱۹۷۶) بر مبنای این خاصیت توزیع نرمال، آماره آزمون خود را برای فرضیه نرمال بودن به صورت

$$TV_{mn} = \frac{\exp(HV_{mn})}{S_x},$$

معرفی کرد، که در آن S_x انحراف معیار نمونه است. مشابه واسیچک (۱۹۷۶) می‌توان بر مبنای دیگر برآوردهای آنتروپی آماره‌های

$$TC_{mn} = \frac{\exp(HC_{mn})}{S_x}, \quad TZ1_{mn} = \frac{\exp(HZ1_{mn})}{S_x}, \quad TZ2_{mn} = \frac{\exp(HZ2_{mn})}{S_x}.$$

را برای آزمون فرضیه نرمال بودن پیشنهاد داد، که فرضیه صفر به ازای مقادیر کوچک آماره‌های فوق رد می‌شود. ناوردا بودن این آماره‌ها نسبت به تبدیلات مکانی و مقیاسی واضح است. توزیع این آماره‌ها نیز به روش تحلیلی قابل محاسبه نمی‌باشد، بنابراین برای بدست آوردن نقاط بحرانی آزمون‌ها از روش شبیه سازی مونت کارلو استفاده می‌کنیم. بدین صورت که ابتدا از توزیع نرمال استاندارد، نمونه‌ای به حجم n تولید و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم و این کار را ۱۰,۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. مقدار بحرانی آزمون را با استفاده از چندک α ام توزیع

۱۹۴ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردهای جدید آنتروپی

تجربی آماره آزمون بدست می‌آوریم. به منظور مقایسه توان این آزمون‌ها با یکدیگر، شبیه‌سازی مونت-کارلو با ۱۰,۰۰۰ بار تکرار، برای حجم نمونه $n = 10, 20$ تحت ۲۰ توزیع در فرضیه مقابل انجام می‌شود. در اینجا نیز همانند آزمون نمایی بودن، مقدار بهینه m علاوه بر حجم نمونه به توزیع جانشین نیز بستگی دارد، واسیچک (۱۹۷۶) به ازای مقادیر مختلف n مقادیری از m را پیشنهاد داد که آزمون مربوطه دارای توان نسبتاً خوبی به ازای تمام توزیع‌های جانشین است. این مطلب برای آزمون‌های پیشنهادی ما نیز صادق می‌باشد لذا ما نیز مقدار m را برابر ۲ و ۳ به ترتیب برای $n = 10$ و $n = 20$ در نظر می‌گیریم. توزیع‌های جانشین مورد بررسی را بنابر شکل و تکیه‌گاه‌شان می‌توان به ۴ گروه مختلف تقسیم کرد. این تقسیم‌بندی می‌تواند دیدگاه بهتری نسبت به رفتار آزمون ارائه دهد. این سبک تقسیم‌بندی برای مقایسه توان آزمون‌های نرمال‌بودن برای نخستین بار توسط استبان و همکاران (۲۰۰۱) انجام شد.

گروه I: خانواده توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, \infty)$

- توزیع t استیودنت با یک درجه آزادی (کوشی استاندارد)
- توزیع t استیودنت با سه درجه آزادی
- توزیع لوژستیک استاندارد
- توزیع نمایی دوگانه استاندارد

گروه II: خانواده توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, \infty)$

- توزیع گامبل با پارامترهای $\alpha = 0$ (مکان) و $\beta = 1$ (مقیاس)
- توزیع نرمال چوله با پارامترهای $\mu = 0$ (مکان)، $\sigma = 1$ (مقیاس) و $\alpha = 2$ (شکل)
- توزیع نمایی دوگانه چوله (ترکیب توزیع نمایی با میانگین $\beta = 2$ و قرینه توزیع نمایی با میانگین $\alpha = 1$)

گروه III: خانواده توزیع‌های با تکیه‌گاه $(0, \infty)$

- توزیع نمایی با میانگین ۱
- توزیع گاما با پارامترهای $\beta = 1$ (مقیاس) و $\alpha = 2$ (شکل)
- توزیع گاما با پارامترهای $\beta = 1$ (مقیاس) و $\alpha = \frac{1}{2}$ (شکل)
- توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ (مقیاس) و $\sigma = 1$ (شکل)
- توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ (مقیاس) و $\sigma = 2$ (شکل)
- توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ (مقیاس) و $\sigma = \frac{1}{2}$ (شکل)
- توزیع وایبل با پارامترهای $\beta = 1$ (مقیاس) و $\alpha = \frac{1}{2}$ (شکل)
- توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $\beta = 1$ (مقیاس) و $\alpha = 2$ (شکل)

گروه IV: خانواده توزیع‌های با تکیه‌گاه $(0, 1)$

- توزیع یکنواخت $(0, 1)$
- توزیع بتا $(2, 2)$
- توزیع بتا $(0/5, 0/5)$
- توزیع بتا $(3, 1/5)$
- توزیع بتا $(2, 1)$

جداول ۶ تا ۹ نتایج شبیه‌سازی را نشان می‌دهند. مجدداً متذکر می‌شویم که در این جداول مقادیر سیاه نشان دهنده این است که در حجم نمونه و توزیع جانشین مربوطه، توان آزمون مربوطه نسبت به دیگر آزمون‌های بر مبنای آنتروپی بیشتر است. همان‌طور که در این جداول ملاحظه می‌شود، آماره آزمون مبتنی بر TZ_{mn} در همه گروه‌های توزیع‌های مورد بررسی بجز گروه IV دارای بیشترین توان نسبت به سایر آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی است و مقدار اختلاف توان‌ها نیز قابل توجه

۱۹۶ آزمون نیکویی برآزش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

جدول ۶: توان آزمون‌های نرمال بودن بر مبنای آنتروپی و آزمون شاپیرو-ویلک تحت خانواده‌های توزیع‌های جانشین گروه I و $\alpha = 0/05$.

Alternatives	n	TV	TC	TZ ₁	TZ ₂	SW
t_1	10	0/4231	0/4029	0/3952	0/5086	0/5961
	20	0/8360	0/6194	0/6766	0/8121	0/8561
t_2	10	0/0958	0/0885	0/0867	0/1339	0/1893
	20	0/1577	0/1289	0/1213	0/2238	0/3365
Double exponential(0, 1)	10	0/0706	0/0638	0/0613	0/1034	0/1539
	20	0/0891	0/0697	0/0651	0/1665	0/2602
Logistic(0, 1)	10	0/0572	0/0541	0/0546	0/0647	0/0808
	20	0/0503	0/0461	0/0442	0/0738	0/1099

جدول ۷: توان آزمون‌های نرمال بودن بر مبنای آنتروپی و آزمون شاپیرو-ویلک تحت خانواده‌های توزیع‌های جانشین گروه II و $\alpha = 0/05$.

Alternatives	n	TV	TC	TZ ₁	TZ ₂	SW
Gumbel(0, 1)	10	0/1036	0/0994	0/0975	0/1283	0/1523
	20	0/1921	0/1851	0/1772	0/2471	0/3036
Skew Normal(0, 1, 2)	10	0/0624	0/0638	0/0627	0/0693	0/0710
	20	0/0669	0/0667	0/0660	0/0808	0/1035
Skew Double Exponential(1, 2)	10	0/1244	0/1173	0/1151	0/1684	0/2218
	20	0/2159	0/1923	0/1811	0/3053	0/4044

جدول ۸: توان آزمون‌های نرمال بودن بر مبنای آنتروپی و آزمون شاپیرو-ویلک تحت خانواده‌های توزیع‌های جانشین گروه III و $\alpha = 0/05$.

Alternatives	n	TV	TC	TZ ₁	TZ ₂	SW
Exponential(1)	10	0/4279	0/4250	0/4245	0/4766	0/4417
	20	0/8477	0/8384	0/8330	0/8640	0/8313
Gamma(2)	10	0/1928	0/1903	0/1880	0/2325	0/2469*
	20	0/4400	0/4325	0/4222	0/5039	0/5345*
Gamma($\frac{1}{2}$)	10	0/8933	0/8803	0/8846	0/8011	0/8289
	20	0/9907	0/9910	0/9904	0/9913	0/8948
Lognormal(0, 1)	10	0/5749	0/5698	0/5666	0/6245	0/6062
	20	0/9238	0/9181	0/9145	0/9368	0/9299
Lognormal(0, 2)	10	0/9415	0/9376	0/9389	0/9459	0/9192
	20	0/9998	0/9997	0/9997	0/9998	0/9993
Lognormal(0, $\frac{1}{2}$)	10	0/1743	0/1676	0/1667	0/2150	0/2496*
	20	0/4028	0/3932	0/3782	0/4755	0/5242*
Weibull($\frac{1}{2}$)	10	0/9329	0/9281	0/9292	0/9329	0/8963
	20	0/9996	0/99996	0/9996	0/9996	0/9989
Weibull(2)	10	0/0815	0/0972	0/0802	0/0815	0/0849*
	20	0/1248	0/1285	0/1268	0/1444	0/1504*

جدول ۹: توان آزمون‌های نرمال بودن بر مبنای آنتروپی و آزمون شاپیرو-ویلک تحت خانواده‌های توزیع‌های جانشین گروه IV و $\alpha = 0/05$.

Alternatives	n	TV	TC	TZ_1	TZ_2	SW
$Uniform(0, 1)$	۱۰	۰/۱۷۶۶	۰/۱۷۴۴	۰/۱۸۱۰	۰/۱۳۳۶	۰/۰۸۱۹
	۲۰	۰/۴۰۸۶	۰/۴۱۸۳	۰/۴۳۱۵	۰/۳۳۲۶	۰/۱۹۵۰
$Beta(2, 2)$	۱۰	۰/۰۸۱۲	۰/۰۸۴۵	۰/۰۸۵۹	۰/۰۶۴۳	۰/۰۴۱۹
	۲۰	۰/۱۲۲۸	۰/۱۳۳۲	۰/۱۳۵۴	۰/۰۹۸۹	۰/۰۵۲۸
$Beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	۱۰	۰/۵۲۰۴	۰/۵۱۰۸	۰/۵۲۴۶	۰/۴۴۴۷	۰/۲۹۱۴
	۲۰	۰/۹۰۸۹	۰/۹۰۰۶	۰/۹۱۲۹	۰/۸۵۵۱	۰/۷۱۶۲
$Beta(3, \frac{1}{2})$	۱۰	۰/۱۰۶۶	۰/۱۰۵۵	۰/۱۰۶۸	۰/۰۹۹۵	۰/۰۸۶۸
	۲۰	۰/۲۲۳۱	۰/۲۲۸۳	۰/۲۲۶۹	۰/۲۱۹۱	۰/۱۶۸۱
$Beta(2, 1)$	۱۰	۰/۱۷۷۹	۰/۱۷۸۲	۰/۱۸۴۲	۰/۱۶۹۱	۰/۱۲۸۹
	۲۰	۰/۴۲۳۳	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۱۳	۰/۴۱۱۷	۰/۳۰۳۷

است. اما در خانواده توزیع‌های گروه IV از آزمون مبتنی بر TZ_1 توان بیشتری نسبت به سایر آزمون‌های بر مبنای آنتروپی دارد، اما اختلاف توان آن باتوان آزمون مبتنی بر TV قابل ملاحظه نیست. از طرفی مشاهده می‌شود که گرچه آزمون مبتنی بر TZ_2 در مقایسه با آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) در گروه‌های III و IV به استثنای مواردی که با ستاره مشخص شده‌اند، از توان بیشتری برخوردار است ولی در گروه‌های I و II توان کمتری دارد (در مورد حجم نمونه‌های بررسی شده). این عدم کارایی از سه جهت جبران می‌شود، نخست اینکه انجام این آزمون بسیار ساده‌تر از آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) است، که به جداول زیادی نیاز دارد. دوم اینکه آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) به ازای حجم نمونه‌های بیش از ۲۰ تقریبی است و ضرایب لازم برای محاسبه آماره آزمون برای هر حجم نمونه تغییر می‌کنند. سوم اینکه توان آزمون نرمال بودن توزیع جامعه، در گروه I (از توزیع‌های جانشین) خیلی اهمیت ندارد، زیرا اکثر روش‌های آماری مبتنی بر توزیع نرمال، نسبت به توزیع‌های متقارن بسیار استوار هستند و مادام که توزیع داده‌ها متقارن باشد، ولو اینکه نرمال نباشد، دقت روش‌های آماری از اعتبار ساقط نخواهد شد. ضمناً متذکر می‌شویم که در مورد بیش از نیمی از ۲۰ توزیع جانشین آزمون مبتنی بر TZ_2 توان‌تر از آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) است.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دو برآوردگر جدید آنتروپی مبتنی بر اصلاح ضرایب و تخصیص وزن‌های متفاوت از برآوردگر کوریا (۱۹۹۵) اراپه گردید، سپس در مطالعه شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای پیشنهادی با برآوردگرهای واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) مقایسه شد. نتایج بیانگر آن است که برآوردگر پیشنهادی اول به طور یکنواخت (یعنی به ازای هر سه توزیع بررسی شده و هر سه حجم نمونه ۲۰، ۱۰ و ۳۰ و به ازای $m \leq \frac{2}{3}$) عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردگرهای آنتروپی دارد. مقایسه آزمون نیکویی برازش برای فرضیه‌های نرمال بودن و نمایی بودن توزیع جامعه بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی و برآوردگرهای واسیچک (۱۹۷۶) و کوریا (۱۹۹۵) و شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) در مورد نرمال، بیانگر آن است که در آزمون فرضیه نمایی بودن توزیع، توان آزمون مبتنی بر TZ_2 در بیشتر موارد از توان دیگر آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی بیشتر است. در آزمون فرضیه نرمال بودن توزیع، تنها هنگامی که تکیه‌گاه توزیع متغیر تصادفی تحت فرضیه جانشین (۱، ۰) است، آزمون مبتنی بر TZ_1 دارای بیشترین توان و در غیر این صورت آزمون مبتنی بر TZ_2 دارای ماکسیمم توان در میان سایر آزمون‌های بر مبنای آنتروپی است. توان آزمون نرمال بودن مبتنی بر TZ_2 حداقل به خوبی توان آزمون شاپیرو-ویلک (۱۹۶۵) می‌باشد. قدر مسلم این است که هیچ‌یک دیگری را تحت تسلط ندارد. ولی ساده‌تر بودن آزمون‌های بر مبنای آنتروپی امتیازی بر آزمون‌های معرفی شده محسوب می‌شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث اصلاحات سازنده در این مقاله شده کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند. در ضمن از حمایت مالی قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز قدردانی و تشکر می‌شود.

مراجع

حبیبی‌راد، آ.، ارقامی، ن. ر.، (۱۳۸۶)، آزمون متقارن توزیع بر اساس آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۱، شماره ۲، ۱۲۰-۱۰۹.

علیزاده نوقابی، ه.، علیزاده نوقابی، ر.، (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برآزش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۱، ۹۷-۱۱۳.

Ahmad, I. A. and Lin, P. E (1976), A Nonparametric Estimation of the Entropy of the Absolutely Continuous Distributions, *IEEE Transaction on Information Theory*, IT-22, 327-375.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), A Test for Normality Based on Kullback-Leibler Information, *The American Statistician*, **43**, 20-23.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type-II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.

Corea, J. C., (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.

Dudewicz, E. S. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Ebrahimi, N. and Habibullah, M.,(1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B* **54**, 739-748.

۲۰۰ آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی

- Ebrahimi, N. ,Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Probability and Statistics Letter*, **20**, 225-234.
- Esteban, M. D. ,Castellanos, M. E., Morales, D. and Vajda I., (2001), Monte Carlo Comparison of Four Normality Tests Using Different Entropy Estimates, *Communications in Statistics-Simulation and computation*, **30**, 761-285.
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information With the Type II Censored Data, *IEEE Transaction On Reliability*, **54**, 22-26.
- Shanon, C. E.(1948), Mathematical Theory of Communications, *Bell Sysyem Technical Journal*, **27**, 379-423; 623-656.
- Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1965), An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Sample), *Biometrika*, **52**, 591-611.
- Mack, S. P. (1988), A Comparative Study of Entropy Estimators and Entropy-Based Goodness of-fit Test, *Ph.D. Dissertation, Univeristy of California, Riverside*.
- Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Jouranl of Royal Statistical Society, Ser. B*, **38**, 730-737.
- Wieczorkowski, P., and Grzegorzewsky, P. (1999), Entropy Estimators Improvements and Comparisons, *Communication in Statistics-Computation and Simulation*, **28**, 541-567.
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Tyoe II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics-Computation and Simulation*, **37**, 1479-1499.