مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶

جلد ۱، شماره ۲، ص ۱۰۹-۱۲۰

آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی

آرزو حبیبی راد، ناصررضا ارقامی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۸/۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۲/۲۷

چکیده : برآورد آنتروپی (آنتروپی نمونه‌ای) برای اولین بار توسط واسیکک (۱۹۷۶) معرفی شد. ما نیز در این مقاله ابتدا برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی را که گسترشی از برآورد آنتروپی است بیان می‌کنیم و سپس آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی را در مقابل تعدادی از توزیع‌های نامتقارن (چوله [۱]) ارائه می‌دهیم و در ادامه توان آزمون پیشنهادی را با چند آزمون دیگر با کمک شبیه‌سازی مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی نسبت به روش پارک (۱۹۹۹) از توان بیشتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی : آ نتروپی، برآورد آنتروپی، آزمون متقارن بودن توزیع.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: آرزو حبیبی راد، habibi@math.um.ac.ir

۱ Skewed

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

۱ مقدمه

آنتروپی تابع توزیع F با تابع چگالی احتمال f به صورت زیر تعریف می‌شود (شانون، ۱۹۴۸)

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx.$$

با تغییر متغیر $F(x)=p$ در رابطه فوق داریم

$$H(f) = \int_{0}^{1} \log\left(\frac{d}{dp}F^{-1}(p)\right)dp. \qquad (1)$$

در سال ۱۹۷۶ برآوردی برای رابطه (۱) توسط واسیکک معرفی شد. برای این منظور فرض کنید $n \geq 3$ و $x_1, x_2, \cdots, x_n$، یک نمونه nتایی از توزیع F باشد و همچنین فرض کنید به جای تابع توزیع F از تابع توزیع تجربی F_n و به جای عملگر دیفرانسیل از عملگر تفاضل استفاده شود. در این صورت برآورد مشتق $F^{-1}(p)$ بوسیله $\frac{n}{2w}(x_{(i+w)}-x_{(i-w)})$ برای $(i-1)/n < p \leq i/n$، $i = w+1, w+2, \cdots, n-w$ برآورد می‌شود، که در آن $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ و w یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از $n/2$ می‌باشد. همچنین اگر $p \leq w/n$ یا $p > (n-w)/n$ در این صورت به ترتیب از تفاضل‌های یک طرفه $x_{(i+w)} - x_{(1)}$ یا $x_{(n)} - x_{(i-w)}$ به جای تفاضل $x_{(i+w)} - x_{(i-w)}$ استفاده می‌شود. این برآورد عبارت است از

$$H_{wn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{2w}(x_{(i+w)}-x_{(i-w)})\right), \qquad (2)$$

که در آن برای $i<1$، $x_{(i)} = x_{(1)}$ و برای $i>n$، $x_{(i)} = x_{(n)}$.

برآورد آنتروپی (آنتروپی نمونه‌ای) در به دست آوردن آماره آزمون نیکویی-برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیکک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزونو و اوتا (۱۹۸۹)، برای توزیع یکنواخت بوسیله دادویچ و ون در مولن (۱۹۸۱) و برای توزیع نمایی بوسیله ابراهیمی و حبیب الله (۱۹۹۲) مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای

داده‌های سانسور شده نوع-دو (پارک، ۲۰۰۵) و داده‌های سانسور فزاینده نوع-دو (بالاکریشنان و همکاران، ۲۰۰۷) نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

ابتدا در بخش دوم برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی را که گسترشی از برآورد آنتروپی است بیان می‌کنیم و سپس در بخش سوم، آزمون متقارن بودن توزیع براساس $k = ۲$ آماره مرتب را ارائه و توان آزمون پیشنهادی با چند آزمون دیگر (جدول ۲) مقایسه می‌کنیم (پارک، ۱۹۹۹). در بخش چهارم، آزمون معرفی شده در بخش سوم را برای مقادیر مختلف k تعمیم داده و در انتها با کمک شبیه‌سازی (جداول ۳ تا ۶) نشان می‌دهیم که توان آزمون برای مقادیر مختلف k متفاوت است.

۲ برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F(x)$ و تابع احتمال $f(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $X_{r:k}$، آماره ترتیبی rام با تابع توزیع $F_{r:k}(x)$ از یک زیرنمونه[۲] تصادفی k-تایی $(k = ۱, ۲, \cdots)$ باشد که با روش باجایگذاری از نمونه اصلی گرفته شده است.

لم ۱ : اگر $E_{۱:k}$ و $E_{k:k}$ به ترتیب آنتروپی اولین و kامین آماره ترتیبی از یک زیر نمونه kتایی باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} E_{۱:k} &= ۱ - \frac{۱}{k} - \log k - \int_{-\infty}^{\infty} \log f(x) dF_{۱:k}(x), \\ E_{k:k} &= ۱ - \frac{۱}{k} - \log k - \int_{-\infty}^{\infty} \log f(x) dF_{k:k}(x). \end{aligned}$$

برهان با کمک تعریف آنتروپی، به آسانی ثابت می‌شود.□

برای محاسبه برآورد آنتروپی $E_{۱:k}$، بنا به رابطه (۱) داریم

$$E_{۱:k} = ۱ - \frac{۱}{k} - \log k + \int_{۰}^{۱} \log \left(\frac{d}{dp} F^{-۱}(p) \right) k(۱-p)^{k-۱} dp,$$

۲ Sub-sample

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

سپس بر اساس برآورد واسیکک، رابطه (۲)، برآورد آنتروپی $X_{1:k}$ براساس زیر نمونه kتایی از نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\widehat{E}_{1:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{2w}(x_{i+w:n} - x_{i-w:n})\right) k(1 - \frac{i}{n+1})^{k-1},$$

و بطور مشابه، برآورد آنتروپی $X_{k:k}$ براساس زیر نمونه kتایی از نمونه‌ای به اندازه n برابر است

$$\widehat{E}_{k:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{2w}(x_{i+w:n} - x_{i-w:n})\right) k(\frac{i}{n+1})^{k-1}.$$

فرع: برآورد آنتروپی اولین و kامین آماره ترتیبی را می‌توان به صورت

$$const. + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{2w}(x_{i+w:n} - x_{i-w:n})\right) J_k(u_i), \qquad (۳)$$

نشان داد، که در آن $u_i = \frac{i}{n+1}$ و J تابعی یکنواخت از $\frac{i}{n+1}$ است.

۳ آزمون متقارن بودن توزیع

با کمک لم زیر آزمون متقارن بودن توزیع را براساس برآورد آنتروپی دنبال می‌کنیم.

لم ۲ : (پارک، ۱۹۹۵) فرض کنید $D_k = E_{1:k} - E_{k:k}$. آنگاه برای $k = 1, 2, 3 \cdots$، $D_k = 0$، اگر و تنها اگر تابع f متقارن باشد.

بنابراین مقدار D_k معیار خوبی برای تشخیص متقارن بودن توزیع داده‌ها است، از این رو برای آزمون متقارن بودن توزیع در مقابل توزیع‌های نامتقارن (چوله) می‌توان از D_k به عنوان آماره آزمون استفاده کرد. در ادامه آماره آزمون D_k را با کمک رابطه (۲)، به صورت

$$\widehat{D}(J, n, w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{n}{2w}(x_{i+w:n} - x_{i-w:n})\right) J_k(u_i), \qquad (۴)$$

برآورد می‌کنیم، که در آن $J_k(u_i)$ تابعی پیوسته و کراندار است و $J(u) = -J(1-u)$. پارک (۱۹۹۹) مقدار k را برابر ۲ اختیار کرده‌است، که در این

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

صورت $J(u) = ۲(۱-۲u)$ و آماره آزمون، برآوردی از $(E_{۱:۲}-E_{۲:۲})$ خواهد بود. مقادیر بحرانی آزمون $|\widehat{D}(۲(۱-۲u),n,w)|$، بر اساس روش مونت-کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه توسط پارک (۱۹۹۹) شبیه‌سازی شده، و نتایج آن در جدول ۱ ارائه شده است.

۱.۳ مقایسه توان آزمون‌ها

با توجه به آنکه هدف محاسبه توان آزمون متقارن بودن توزیع، براساس آماره آزمون $\widehat{D}(۲(۱-۲u),n,w)$ می‌باشد، ابتدا پارک (۱۹۹۹) مقدار بهینه w را که به ازای آن توان آزمون ماکسیمم می‌شود را مشخص نموده است. از این رو شبیه‌سازی را برای اندازه‌های مختلف تحت فرضیه مقابل انجام داده و مقداری از w که توان بیشتری را نشان می‌دهد معین کرده است. مقادیر توصیه شده در جدول ۱ در صورتیکه توزیع فرضیه مقابل نامتقارن باشد مشخص شده‌اند.

جدول ۱: مقادیر w متناظر با بیشترین توان آماره $\widehat{D}(۲(۱-۲u),n,w)$.

n	w
۱۰–۲۰	۳ ، ۴
۲۰–۵۰	۴ ، ۵
۵۰–۱۰۰	۵ ، ۶

با فرض $n = ۲۰$، توان آزمون در سطح $\alpha = ۰/۰۵$، در مقابل بعضی از توزیع‌های متقارن و نامتقارن، محاسبه و نتایج حاصل با توان آزمون‌های معروف مانند شاپیرو و ویلک (۱۹۶۵)، دیوید و جانسون (۱۹۵۶)، داکسوم و همکاران (۱۹۷۶) و اندرسون و دارلینگ (۱۹۵۴) در جدول ۲ مقایسه شده‌اند.

با مقایسه مقادیر جدول ۲ معلوم می‌شود که آزمون پیشنهادی با آماره $\widehat{D}(۲(۱-۲u),n,w)$ زمانی که توزیع فرضیه مقابل نامتقارن است (مانند خی-دو $(\chi^۲)$ با درجات آزادی ۱، ۲ و ۴) از بقیه آزمون‌ها بهتر عمل کرده‌است. اما در مورد توزیع‌های نظیر، خی-دو با درجه آزادی ۱۰، توزیع یکنواخت و کوشی، آزمون پیشنهادی توان کمتری را تنها در مقایسه با آزمون‌های شاپیرو-ویلک و اندرسون و دارلینگ نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

جدول ۲: توان آزمون‌ها($\times 100$) در سطح $\alpha = 0/05$ و $n = 20$.

آماره آزمون	$\chi^2(1)$	$\chi^2(2)$	$\chi^2(4)$	$\chi^2(10)$	یکنواخت	کوشی
شاپیرو-ویلک	۹۸/۶	۸۴/۵	۵۳/۱	۲۳/۹	۲۰/۲	۸۶/۷
دیوید و جانسون	۹۶/۰	۸۲/۶	۶۰/۴	۳۴/۳	۱/۳	۴۲/۶
داکسوم و دیگران	۹۰/۹	۷۵/۲	۵۴/۱	۳۰/۸	۰/۷	۴۲/۶
اندرسون و دارلینگ	۹۷/۴	۷۸/۰	۴۶/۳	۲۰/۱	۱۷/۰	۸۷/۸
$\widehat{D}(2(1-2u), 20, 3)$	۹۹/۵	۹۰/۴	۵۹/۳	۲۴/۲	۷/۲	۴۸/۳
$\widehat{D}(2(1-2u), 20, 4)$	۹۹/۴	۹۰/۰	۶۰/۱	۲۴/۸	۶/۵	۵۲/۰
$\widehat{D}(2(1-2u), 20, 5)$	۹۹/۳	۸۹/۵	۶۰/۲	۲۵/۶	۶/۱	۵۵/۲

۴ توسعه آزمون متقارن بودن توزیع

همانطور که در بخش ۳ به آن اشاره شد، مقدار آماره آزمون در رابطه (۴) فقط برای $k = 2$ محاسبه و بدنبال آن در بخش ۱.۳ توان آزمون مربوطه نیز تنها برای $k = 2$ محاسبه شده‌است. اما ما در این بخش بدنبال آن هستیم که توان آزمون را برای مقادیر مختلف k محاسبه نموده و مقداری از k را که توان آزمون را ماکسیمم می‌کند معرفی نماییم. به عنوان مثال در نمونه‌ای به اندازه $n = 10$ مقادیر k را برابر ۲، ۴ و در نمونه‌ای به اندازه $n = 20$ مقادیر k را برابر ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ فرض کرده و آماره آزمون پیشنهادی ($D_{k,r}$) را تفاضل آنتروپی مشاهدات ترتیبی که به یک فاصله از دو انتهای آماره‌های ترتیبی قرار دارند در نظر می‌گیریم، یعنی

$$D_{k,r} = E_{r:k} - E_{k-r+1:k}, \quad k = 1, 2, 3 \cdots, \ r = 1, 2, \cdots k-1.$$

با اثباتی مشابه لم ۲ (پارک، ۱۹۹۵) برای آماره آزمون فوق، از آن نیز می‌توان به عنوان آزمون متقارن بودن توزیع استفاده نمود، با این تفاوت که می توان توان آزمون را برای مقادیر مختلف k و همچنین r محاسبه و بر روی آن بحث کرد. حال آماره آزمون فوق را با کمک برآورد آنتروپی، رابطه (۲)، و همچنین روش پیشنهادی پارک

(۱۹۹۹) که در رابطه (۴) مشاهده می‌شود به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$\widehat{D}(J_{k,r},n,w)=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log\Big(\frac{n}{۲w}(x_{i+w:n}-x_{i-w:n})\Big)\,J_{k,r}(u_i), \qquad (۵)$$

که در آن $u=\frac{i}{n+۱}$ و

$$J_{k,r}(u_i)=\frac{k!}{(k-r)!(r-۱)!}\Big[(۱-u_i)^{k-r}u_i^{r-۱}-u_i^{k-r}(۱-u_i)^{r-۱}\Big].$$

در زیر با کمک رابطه (۵) مقادیر بحرانی آزمون $|\widehat{D}(J_{k,r},n,w)|$، را بر اساس روش مونت-کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی کرده، سپس توان آزمون در سطح $\alpha=۰/۰۵$ برای نمونه‌هایی به اندازه ۱۰ و ۲۰ برای مقادیر مختلف k، r و w در مقابل توزیع خی-دو ($\chi^۲$) با درجات آزادی ۱، ۴ و ۱۰، یکنواخت ($Unif.$)، گاما($Gam.$) با پارامتر شکل: ۰/۵، وایبول ($Wei.$) با پارامتر شکل: ۰/۵ و تی (t) با درجات آزادی ۱، ۴ و ۱۰ محاسبه شده‌است. نتایج به ترتیب در جداول ۳ تا ۶ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: توان آزمون(۱۰۰×) برای $n=۱۰$ و مقادیر متفاوت k، r و w

k	r	w	$\chi^۲(۱)$	$\chi^۲(۴)$	$\chi^۲(۱۰)$	Unif.	Gam.	Wei.	t(1)	t(4)	t(10)
۲	۱	۱	۷۸/۹۷	۱۸/۶۲	۹/۹۹	۶/۹۸	۷۹/۹۶	۴۱/۵۹	۲۹/۲۲	۷/۳۵	۵/۷۶
۲	۱	۲	۸۰/۱۳	۲۴/۰۴	۱۱/۲۵	۷/۲۳	۸۰/۶۲	۴۹/۶۴	۳۸/۴۵	۹/۵۱	۵/۹۵
۲	۱	۳	۸۰/۷۸	۲۳/۵۹	۱۱/۰۲	۶/۹۸	۸۱/۰۰	۴۹/۷۴	۴۳/۲۹	۱۱/۰۶	۶/۷۸
۲	۱	۴	۷۷/۵۳	۲۴/۰۲	۱۱/۵۷	۵/۸۷	۷۷/۶۸	۴۹/۷۸	۴۷/۷۴	۱۱/۵۲	۶/۹۶
۴	۱	۱	۷۸/۰۶	۱۸/۱۹	۹/۵۷	۵/۸۴	۷۸/۱۶	۴۰/۵۳	۲۹/۱۷	۶/۸۴	۵/۸۲
۴	۱	۲	۸۲/۱۱	۲۴/۱۱	۱۱/۴۵	۶/۳۸	۸۱/۸۹	۴۸/۵۵	۳۸/۸۴	۹/۶۱	۶/۳۷
۴	۱	۳	۸۰/۸۲	۲۵/۰۵	۱۱/۵۴	۶/۳۴	۸۳/۱۰	۴۹/۶۴	۴۳/۶۰	۱۰/۵۲	۶/۸۱
۴	۱	۴	۷۷/۵۶	۲۵/۹۷	۱۱/۸۰	۵/۶۹	۷۷/۱۰	۴۸/۷۵	۴۷/۹۹	۱۱/۷۷	۶/۷۵
۴	۲	۱	۸۰/۵۸	۲۱/۵۴	۹/۹۹	۷/۴۴	۸۱/۸۱	۴۴/۰۶	۳۰/۲۶	۷/۵۸	۵/۶۲
۴	۲	۲	۸۱/۲۶	۲۳/۸۷	۱۱/۷۸	۷/۱۵	۸۲/۳۸	۴۹/۶۴	۳۹/۱۸	۹/۱۴	۵/۹۷
۴	۲	۳	۸۲/۱۳	۲۶/۱۸	۱۲/۹۲	۶/۶۴	۸۶/۲۸	۵۲/۱۲	۴۵/۴۵	۱۰/۹۱	۶/۲۶
۴	۲	۴	۷۶/۵۱	۲۷/۹۰	۱۲/۲۳	۴/۸۶	۷۷/۱۵	۴۹/۲۰	۴۹/۹۷	۱۲/۷۷	۷/۲۴

۵ بحث و نتیجه‌گیری

برای انجام آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی، می‌توان به طریق زیر عمل کرد، بطوریکه در این روش آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی نسبت به روش پیشنهادی پارک (۱۹۹۹) از توان بیشتری برخوردار است.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

جدول ۴: توان آزمون(۱۰۰×) برای $n=$ ۲۰ و مقادیر متفاوت k، r و w.

k	r	w	$\chi^{۲}(۱)$	$\chi^{۲}(۴)$	$\chi^{۲}(۱۰)$	Unif.	Gam.	Wei.	t(1)	t(4)	t(10)
۲	۱	۱	۹۹/۲۲	۴۷/۹۶	۱۸/۵۸	۷/۱۸	۹۹/۲۷	۸۳/۶۴	۳۵/۶۰	۹/۲۶	۵/۸۸
۲	۱	۲	۹۹/۵۶	۵۵/۷۴	۲۲/۶۲	۷/۶۲	۹۹/۵۷	۸۸/۶۶	۴۳/۶۱	۱۰/۹۸	۶/۵۳
۲	۱	۳	۹۹/۵۸	۵۸/۴۶	۲۴/۱۸	۷/۶۰	۹۹/۵۷	۸۹/۱۷	۴۸/۲۴	۱۲/۳۳	۷/۱۸
۲	۱	۴	۹۹/۴۶	۶۰/۰۶	۲۵/۲۱	۷/۵۴	۹۹/۴۱	۸۸/۸۰	۵۱/۹۸	۱۳/۶۵	۷/۵۴
۲	۱	۵	۹۹/۳۶	۶۰/۰۲	۲۵/۶۶	۶/۷۸	۹۹/۲۹	۸۸/۶۶	۵۵/۲۹	۱۴/۷۹	۷/۵۲
۲	۱	۶	۹۹/۱۶	۵۹/۹۳	۲۵/۸۷	۵/۹۶	۹۹/۱۷	۸۸/۱۲	۵۸/۰۱	۱۶/۰۱	۸/۰۲
۲	۱	۷	۹۸/۹۳	۵۸/۸۱	۲۵/۸۸	۵/۲۰	۹۸/۹۰	۸۷/۴۶	۶۰/۱۰	۱۷/۰۲	۸/۳۹
۲	۱	۸	۹۸/۶۸	۵۰/۰۵	۲۶/۲۶	۴/۱۸	۹۸/۶۷	۸۶/۷۴	۶۲/۰۱	۱۸/۱۲	۸/۴۸
۲	۱	۹	۹۸/۲۹	۵۶/۶۸	۲۶/۴۶	۳/۱۴	۹۸/۱۶	۸۵/۵۴	۶۳/۹۲	۱۹/۰۷	۸/۷۱
۴	۱	۱	۹۹/۰۱	۴۸/۲۰	۱۷/۵۳	۷/۴۲	۹۸/۹۰	۸۳/۴۴	۳۵/۱۸	۹/۵۷	۶/۰۳
۴	۱	۲	۹۹/۳۷	۵۷/۴۵	۲۲/۴۶	۷/۴۶	۹۹/۴۲	۸۸/۳۳	۴۴/۰۴	۱۱/۸۱	۶/۸۱
۴	۱	۳	۹۹/۳۵	۵۹/۳۰	۲۴/۳۳	۷/۱۶	۹۹/۵۰	۸۹/۲۶	۴۸/۹۹	۱۳/۴۲	۷/۴۰
۴	۱	۴	۹۹/۲۸	۶۰/۸۱	۲۵/۳۸	۶/۸۵	۹۹/۳۵	۸۹/۲۰	۵۲/۶۵	۱۴/۶۹	۷/۶۳
۴	۱	۵	۹۹/۱۴	۶۰/۴۵	۲۶/۳۸	۶/۱۹	۹۹/۲۷	۸۸/۹۲	۵۵/۷۸	۱۵/۸۰	۷/۸۷
۴	۱	۶	۹۸/۹۲	۶۰/۱۵	۲۶/۸۶	۵/۶۰	۹۹/۰۸	۸۷/۸۹	۵۸/۰۴	۱۷/۲۶	۸/۱۳
۴	۱	۷	۹۸/۷۶	۵۹/۹۰	۲۶/۷۰	۵/۰۱	۹۸/۷۵	۸۶/۶۴	۶۰/۰۲	۱۷/۸۳	۸/۵۰
۴	۱	۸	۹۸/۵۸	۵۹/۴۳	۲۶/۵۲	۴/۲۱	۹۸/۴۱	۸۵/۷۱	۶۱/۸۷	۱۸/۶۵	۸/۹۹
۴	۱	۹	۹۸/۲۲	۵۸/۴۹	۲۶/۶۰	۳/۱۰	۹۸/۰۷	۸۴/۳۳	۶۳/۸۱	۱۹/۵۲	۹/۲۴
۴	۲	۱	۹۸/۵۹	۴۳/۸۵	۱۹/۱۳	۷/۵۱	۹۸/۴۰	۷۹/۹۹	۳۱/۴۹	۸/۷۲	۵/۸۹
۴	۲	۲	۹۹/۱۱	۵۲/۸۹	۲۲/۳۴	۸/۱۴	۹۹/۰۸	۸۶/۹۱	۳۹/۳۵	۱۰/۱۹	۶/۳۰
۴	۲	۳	۹۹/۱۶	۵۷/۳۹	۲۴/۳۳	۷/۹۰	۹۹/۲۲	۸۸/۲۳	۴۶/۱۷	۱۱/۷۶	۶/۷۷
۴	۲	۴	۹۹/۲۰	۵۸/۹۷	۲۶/۲۳	۷/۳۷	۹۹/۱۱	۸۸/۷۲	۵۱/۴۸	۱۴/۰۱	۷/۳۲
۴	۲	۵	۹۹/۱۱	۵۹/۰۶	۲۶/۷۸	۶/۴۸	۹۹/۰۱	۸۸/۷۸	۵۵/۹۳	۱۵/۶۹	۸/۰۵
۴	۲	۶	۹۸/۸۷	۵۸/۹۶	۲۶/۸۰	۵/۲۵	۹۸/۸۲	۸۸/۲۱	۵۹/۷۲	۱۷/۱۳	۸/۴۱
۴	۲	۷	۹۹/۵۸	۵۸/۱۱	۲۶/۶۸	۳/۹۹	۹۸/۵۱	۸۷/۳۹	۶۲/۱۴	۱۸/۴۱	۸/۹۰
۴	۲	۸	۹۸/۱۳	۵۶/۸۴	۲۶/۷۲	۲/۹۷	۹۸/۰۷	۸۵/۶۷	۶۴/۶۱	۱۹/۷۶	۹/۴۱
۴	۲	۹	۹۷/۵۹	۵۵/۲۵	۲۶/۱۶	۲/۰۹	۹۷/۳۹	۸۴/۱۸	۶۶/۳۴	۲۰/۸۲	۹/۷۰
۶	۱	۱	۹۸/۵۸	۴۲/۳۳	۱۵/۵۳	۶/۱۴	۹۸/۷۴	۸۱/۳۷	۳۳/۶۱	۹/۰۳	۵/۳۰
۶	۱	۲	۹۹/۳۲	۵۴/۰۳	۲۰/۳۰	۶/۵۴	۹۹/۳۷	۸۷/۶۵	۴۲/۷۳	۱۰/۸۱	۶/۴۹
۶	۱	۳	۹۹/۵۱	۵۸/۰۵	۲۲/۹۴	۶/۳۴	۹۹/۳۹	۸۹/۱۶	۴۸/۱۸	۱۲/۳۲	۶/۸۶
۶	۱	۴	۹۹/۳۷	۵۹/۹۳	۲۴/۵۸	۵/۹۶	۹۹/۳۲	۸۹/۴۳	۵۲/۳۴	۱۳/۸۷	۶/۹۹
۶	۱	۵	۹۹/۱۸	۶۰/۳۱	۲۵/۴۲	۵/۸۱	۹۹/۲۸	۸۹/۰۲	۵۵/۳۴	۱۵/۰۷	۷/۵۷
۶	۱	۶	۹۹/۰۴	۶۰/۴۳	۲۵/۴۹	۵/۳۸	۹۹/۱۲	۸۸/۳۴	۵۷/۸۶	۱۵/۹۶	۸/۰۰
۶	۱	۷	۹۸/۸۹	۵۹/۷۲	۲۶/۲۲	۵/۱۲	۹۸/۸۸	۸۷/۶۵	۵۹/۸۸	۱۶/۵۷	۸/۴۳
۶	۱	۸	۹۸/۵۳	۵۸/۹۵	۲۶/۶۶	۴/۶۰	۹۸/۵۵	۸۶/۸۸	۶۱/۹۶	۱۷/۳۸	۸/۴۷
۶	۱	۹	۹۸/۱۸	۵۸/۱۸	۲۶/۹۸	۳/۸۰	۹۸/۲۹	۸۶/۱۵	۶۳/۸۰	۱۸/۰۴	۸/۶۵
۶	۲	۱	۹۹/۰۹	۴۸/۲۹	۲۰/۷۴	۸/۰۶	۹۹/۱۷	۸۵/۵۹	۳۳/۳۱	۹/۱۳	۶/۱۶
۶	۲	۲	۹۹/۴۳	۵۵/۷۱	۲۵/۰۰	۸/۳۵	۹۹/۳۷	۸۹/۷۳	۴۱/۸۱	۱۰/۵۸	۶/۸۸
۶	۲	۳	۹۹/۴۰	۵۸/۳۹	۲۶/۱۲	۷/۶۸	۹۹/۲۷	۹۰/۶۳	۴۸/۰۸	۱۲/۴۱	۶/۸۷
۶	۲	۴	۹۹/۲۶	۵۹/۱۱	۲۶/۴۶	۷/۰۹	۹۹/۱۲	۹۰/۱۳	۵۲/۶۶	۱۳/۶۲	۷/۴۲
۶	۲	۵	۹۹/۰۴	۵۸/۷۹	۲۷/۳۰	۶/۰۹	۹۹/۰۱	۸۹/۶۷	۵۶/۲۷	۱۵/۳۰	۸/۰۷
۶	۲	۶	۹۸/۷۴	۵۹/۲۸	۲۷/۴۴	۵/۲۹	۹۸/۸۵	۸۸/۳۱	۵۹/۰۶	۱۷/۱۱	۸/۷۶
۶	۲	۷	۹۸/۳۷	۵۸/۵۳	۲۷/۳۵	۴/۲۳	۹۸/۵۷	۸۷/۶۸	۶۱/۷۱	۱۸/۵۰	۹/۲۵
۶	۲	۸	۹۸/۰۷	۵۷/۴۸	۲۷/۰۶	۳/۱۹	۹۸/۱۹	۸۶/۸۹	۶۳/۸۱	۲۰/۰۵	۹/۴۵
۶	۲	۹	۹۷/۷۱	۵۶/۲۵	۲۷/۰۵	۲/۲۹	۹۷/۷۶	۸۵/۴۶	۶۵/۴۴	۲۱/۲۷	۹/۵۴

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

جدول ۵: ادامه توان آزمون(۱۰۰×) برای $n = ۲۰$ و مقادیر متفاوت k، r و w.

k	r	w	$\chi^{۲}(۱)$	$\chi^{۲}(۴)$	$\chi^{۲}(۱۰)$	Unif.	Gam.	Wei.	t(1)	t(4)	t(10)
۶	۳	۱	۹۴/۸۶	۳۳/۵۵	۱۴/۳۴	۸/۲۵	۹۵/۵۵	۶۶/۶۲	۲۴/۵۶	۶/۶۱	۵/۷۲
۶	۳	۲	۹۷/۶۰	۴۳/۶۵	۱۸/۱۹	۹/۰۳	۹۷/۲۹	۷۷/۲۳	۳۲/۷۰	۷/۴۳	۵/۹۹
۶	۳	۳	۹۸/۶۳	۵۱/۰۷	۲۰/۹۴	۹/۵۸	۹۸/۳۱	۸۳/۹۵	۴۱/۴۳	۹/۴۹	۶/۶۹
۶	۳	۴	۹۸/۹۳	۵۷/۱۵	۲۴/۲۱	۹/۰۳	۹۸/۶۸	۸۷/۱۶	۴۹/۵۶	۱۲/۲۶	۶/۸۱
۶	۳	۵	۹۸/۸۹	۵۹/۸۷	۲۶/۱۰	۷/۳۴	۹۹/۴۲	۸۹/۸۳	۵۵/۸۹	۱۴/۷۳	۷/۶۹
۶	۳	۶	۹۸/۷۵	۶۰/۴۷	۲۷/۲۶	۵/۱۷	۹۸/۸۸	۸۸/۵۴	۶۰/۱۸	۱۷/۳۰	۸/۶۲
۶	۳	۷	۹۸/۵۰	۵۹/۶۹	۲۷/۶۷	۳/۷۵	۹۸/۳۹	۸۷/۸۴	۶۳/۴۴	۱۹/۰۷	۹/۴۸
۶	۳	۸	۹۸/۰۲	۵۷/۹۱	۲۶/۸۷	۲/۴۱	۹۸/۰۲	۸۵/۸۱	۶۵/۶۸	۲۰/۷۲	۹/۷۵
۶	۳	۹	۹۷/۱۳	۵۶/۳۷	۲۶/۳۷	۱/۴۲	۹۷/۲۰	۸۳/۲۸	۶۷/۲۰	۲۲/۱۲	۱۰/۲۵
۸	۱	۱	۹۷/۹۰	۳۷/۳۰	۱۴/۷۸	۶/۵۶	۹۷/۹۱	۷۵/۸۴	۳۲/۰۱	۹/۳۶	۵/۷۷
۸	۱	۲	۹۹/۲۳	۵۰/۴۳	۱۹/۹۴	۷/۰۸	۹۹/۱۵	۸۵/۷۷	۴۲/۹۳	۱۲/۲۶	۶/۵۶
۸	۱	۳	۹۹/۳۲	۵۵/۵۸	۲۲/۳۹	۶/۶۸	۹۹/۲۲	۸۸/۱۷	۴۸/۵۹	۱۳/۹۸	۷/۱۴
۸	۱	۴	۹۹/۲۷	۵۸/۴۶	۲۴/۰۱	۶/۵۷	۹۹/۲۲	۸۸/۹۳	۵۱/۸۵	۱۴/۷۵	۷/۸۴
۸	۱	۵	۹۹/۱۸	۵۹/۸۴	۲۵/۴۳	۶/۲۷	۹۹/۱۹	۸۹/۲۳	۵۴/۵۴	۱۵/۹۱	۸/۱۰
۸	۱	۶	۹۹/۰۸	۵۹/۵۲	۲۶/۱۴	۶/۲۲	۹۹/۰۸	۸۹/۰۲	۵۶/۸۲	۱۶/۷۳	۷/۹۰
۸	۱	۷	۹۸/۹۵	۵۹/۳۵	۲۶/۰۰	۵/۹۶	۹۸/۷۹	۸۸/۳۳	۵۸/۴۱	۱۷/۱۷	۸/۱۶
۸	۱	۸	۹۸/۷۱	۵۸/۱۵	۲۶/۲۳	۵/۳۸	۹۸/۵۰	۸۷/۲۵	۵۹/۹۷	۱۷/۷۲	۸/۱۶
۸	۱	۹	۹۸/۴۴	۵۷/۶۷	۲۶/۱۲	۴/۵۳	۹۸/۰۸	۸۶/۰۹	۶۱/۷۳	۱۸/۱۷	۸/۵۵
۸	۲	۱	۹۹/۲۵	۵۰/۸۷	۲۰/۷۳	۷/۶۳	۹۹/۴۴	۸۶/۱۸	۳۴/۷۷	۱۰/۰۱	۶/۳۹
۸	۲	۲	۹۹/۵۰	۵۷/۰۶	۲۵/۰۷	۸/۳۵	۹۹/۶۴	۸۹/۸۶	۴۲/۵۷	۱۱/۹۱	۷/۰۷
۸	۲	۳	۹۹/۳۹	۵۹/۸۸	۲۶/۶۶	۷/۷۳	۹۹/۵۵	۹۰/۰۹	۴۸/۳۱	۱۳/۴۸	۷/۳۳
۸	۲	۴	۹۹/۲۶	۶۰/۱۴	۲۷/۵۲	۶/۶۸	۹۹/۳۸	۸۹/۶۳	۵۲/۳۴	۱۵/۲۳	۷/۹۴
۸	۲	۵	۹۹/۱۸	۶۰/۱۷	۲۷/۷۳	۶/۰۶	۹۹/۱۹	۸۹/۰۴	۵۵/۵۶	۱۶/۶۸	۸/۳۹
۸	۲	۶	۹۹/۰۸	۵۹/۸۴	۲۸/۰۱	۵/۶۰	۹۸/۹۷	۸۸/۲۶	۵۸/۳۰	۱۷/۵۰	۸/۷۹
۸	۲	۷	۹۸/۸۵	۵۹/۲۸	۲۷/۷۹	۴/۸۰	۹۸/۷۵	۸۷/۰۶	۶۰/۶۰	۱۸/۴۹	۹/۰۷
۸	۲	۸	۹۸/۴۱	۵۸/۶۰	۲۸/۳۱	۳/۹۸	۹۸/۴۳	۸۶/۲۳	۶۲/۵۶	۱۹/۵۷	۹/۲۲
۸	۲	۹	۹۸/۳۴	۵۷/۹۸	۲۸/۱۹	۳/۰۹	۹۸/۰۷	۸۵/۱۷	۶۴/۵۹	۲۰/۵۸	۹/۷۲
۸	۳	۱	۹۷/۷۱	۳۹/۲۷	۱۷/۳۵	۷/۸۶	۹۷/۶۶	۷۵/۸۹	۲۷/۹۳	۷/۶۷	۵/۶۰
۸	۳	۲	۹۸/۷۲	۴۹/۴۲	۲۱/۹۰	۸/۸۳	۹۸/۹۲	۸۳/۳۸	۳۷/۱۲	۸/۴۹	۶/۰۴
۸	۳	۳	۹۹/۱۲	۵۵/۷۴	۲۵/۰۵	۸/۹۱	۹۹/۱۵	۸۷/۶۸	۴۵/۰۸	۱۰/۷۳	۶/۲۸
۸	۳	۴	۹۹/۰۷	۵۹/۰۰	۲۷/۰۵	۷/۹۲	۹۹/۲۶	۸۸/۹۱	۵۱/۹۰	۱۲/۸۷	۷/۳۱
۸	۳	۵	۹۸/۹۸	۶۰/۱۲	۲۸/۰۰	۶/۶۷	۹۹/۱۸	۸۸/۹۳	۵۶/۴۹	۱۵/۱۵	۸/۱۱
۸	۳	۶	۹۸/۷۸	۵۹/۵۷	۲۸/۵۲	۵/۲۲	۹۸/۹۹	۸۷/۹۲	۵۹/۹۲	۱۷/۱۰	۸/۷۰
۸	۳	۷	۹۸/۵۵	۵۸/۷۳	۲۸/۹۶	۳/۶۶	۹۸/۷۸	۸۶/۸۳	۶۲/۷۷	۱۸/۸۰	۹/۱۹
۸	۳	۸	۹۸/۳۱	۵۷/۶۶	۲۸/۸۲	۲/۴۳	۹۸/۳۱	۸۵/۶۳	۶۴/۸۸	۲۰/۳۳	۹/۷۶
۸	۳	۹	۹۷/۷۴	۵۶/۰۲	۲۷/۹۳	۱/۵۲	۹۷/۷۰	۸۳/۹۷	۶۶/۴۳	۲۱/۶۹	۱۰/۳۶
۸	۴	۱	۸۸/۲۶	۲۶/۱۵	۱۱/۳۲	۷/۶۳	۸۷/۹۹	۵۳/۰۸	۱۹/۱۷	۶/۰۲	۵/۷۱
۸	۴	۲	۹۴/۵۳	۳۵/۲۰	۱۵/۱۹	۸/۵۵	۹۳/۶۲	۶۶/۰۷	۲۶/۶۶	۶/۴۳	۵/۸۱
۸	۴	۳	۹۷/۲۷	۴۴/۷۵	۱۹/۴۶	۹/۲۸	۹۶/۸۴	۷۷/۳۷	۳۶/۲۹	۷/۳۵	۶/۳۷
۸	۴	۴	۹۸/۵۶	۵۴/۵۳	۲۴/۱۷	۸/۶۳	۹۸/۱۲	۸۴/۶۲	۴۷/۴۱	۱۰/۲۴	۷/۵۵
۸	۴	۵	۹۸/۹۱	۵۸/۶۴	۲۷/۴۰	۷/۲۵	۹۸/۵۳	۸۷/۸۵	۵۵/۳۵	۱۳/۷۵	۸/۰۰
۸	۴	۶	۹۸/۸۱	۶۰/۵۹	۲۷/۸۹	۵/۱۲	۹۸/۵۳	۸۸/۵۲	۶۰/۴۴	۱۷/۲۵	۸/۸۶
۸	۴	۷	۹۸/۴۱	۵۹/۹۲	۲۸/۳۹	۳/۳۷	۹۸/۲۶	۸۶/۴۸	۶۴/۲۱	۱۹/۹۰	۹/۶۶
۸	۴	۸	۹۷/۶۹	۵۷/۹۶	۲۷/۴۷	۱/۸۷	۹۷/۴۰	۸۴/۵۱	۶۶/۲۳	۲۱/۷۱	۱۰/۱۸
۸	۴	۹	۹۶/۵۱	۵۴/۹۷	۲۶/۳۹	۱/۰۳	۹۶/۲۰	۸۱/۴۸	۶۷/۴۲	۲۲/۴۷	۱۰/۷۸

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

جدول ۶: ادامه توان آزمون(۱۰۰×) برای ۲۰ = n و مقادیر متفاوت k، r و w.

k	r	w	$\chi^۲(۱)$	$\chi^۲(۴)$	$\chi^۲(۱۰)$	Unif.	Gam.	Wei.	t(1)	t(4)	t(10)
۱۰	۱	۱	۹۶/۹۱	۳۱/۸۴	۱۱/۷۰	۶/۰۱	۹۶/۷۸	۷۱/۹۶	۳۰/۴۴	۷/۵۴	۶/۰۳
۱۰	۱	۲	۹۸/۸۵	۴۶/۴۲	۱۸/۲۷	۶/۱۵	۹۸/۶۹	۸۳/۹۶	۴۱/۷۸	۱۰/۳۳	۶/۷۲
۱۰	۱	۳	۹۹/۱۵	۵۲/۸۹	۲۱/۱۶	۶/۲۶	۹۹/۰۹	۸۷/۴۸	۴۸/۲۵	۱۲/۴۷	۶/۹۴
۱۰	۱	۴	۹۹/۲۳	۵۶/۴۶	۲۳/۳۲	۶/۱۴	۹۹/۰۹	۸۹/۳۲	۵۲/۰۷	۱۳/۶۲	۷/۵۶
۱۰	۱	۵	۹۹/۳۲	۵۷/۹۰	۲۴/۵۹	۵/۹۳	۹۹/۱۲	۸۹/۳۴	۵۵/۲۸	۱۴/۶۲	۷/۹۸
۱۰	۱	۶	۹۹/۱۱	۵۸/۶۶	۲۴/۷۰	۵/۸۱	۹۹/۰۳	۸۹/۲۱	۵۶/۸۷	۱۵/۶۶	۷/۹۳
۱۰	۱	۷	۹۹/۰۲	۵۸/۵۹	۲۵/۷۶	۵/۷۰	۹۸/۷۵	۸۸/۴۶	۵۸/۵۷	۱۵/۸۶	۸/۱۴
۱۰	۱	۸	۹۸/۵۸	۵۸/۶۹	۲۵/۵۶	۵/۵۰	۹۸/۳۷	۸۷/۲۰	۵۹/۹۴	۱۶/۳۸	۸/۳۹
۱۰	۱	۹	۹۸/۳۴	۵۸/۶۹	۲۵/۳۰	۴/۵۱	۹۷/۹۲	۸۶/۴۴	۶۱/۳۵	۱۶/۹۴	۸/۶۶
۱۰	۲	۱	۹۹/۱۸	۴۹/۴۸	۱۹/۸۶	۷/۵۴	۹۹/۲۹	۸۵/۲۱	۳۴/۳۰	۹/۱۵	۵/۹۰
۱۰	۲	۲	۹۹/۴۹	۵۶/۷۸	۲۲/۴۹	۷/۷۹	۹۹/۴۴	۸۹/۲۷	۴۱/۹۵	۱۱/۱۷	۶/۳۹
۱۰	۲	۳	۹۹/۴۶	۵۹/۰۰	۲۴/۳۵	۷/۵۵	۹۹/۴۲	۹۰/۳۰	۴۷/۳۱	۱۳/۰۶	۷/۲۶
۱۰	۲	۴	۹۹/۳۸	۵۹/۵۵	۲۵/۴۹	۶/۹۶	۹۹/۴۵	۸۹/۶۱	۵۱/۱۳	۱۴/۴۰	۷/۶۶
۱۰	۲	۵	۹۹/۱۶	۵۹/۸۳	۲۵/۹۰	۶/۶۲	۹۹/۳۴	۸۹/۰۳	۵۴/۳۸	۱۵/۳۶	۸/۱۸
۱۰	۲	۶	۹۸/۹۸	۵۹/۴۶	۲۶/۲۶	۶/۱۳	۹۹/۲۵	۸۸/۳۸	۵۶/۵۷	۱۶/۲۸	۸/۳۵
۱۰	۲	۷	۹۸/۵۵	۵۹/۰۹	۲۶/۴۳	۵/۷۸	۹۹/۰۱	۸۷/۳۱	۵۸/۶۰	۱۷/۰۳	۸/۷۸
۱۰	۲	۸	۹۸/۲۲	۵۸/۱۲	۲۶/۷۳	۴/۸۸	۹۸/۶۸	۸۶/۴۰	۶۰/۲۵	۱۸/۱۱	۹/۱۵
۱۰	۲	۹	۹۷/۹۹	۵۷/۲۹	۲۶/۷۷	۳/۷۵	۹۸/۴۳	۸۵/۵۵	۶۲/۲۳	۱۸/۹۷	۹/۲۱
۱۰	۳	۱	۹۸/۷۱	۴۵/۹۲	۱۸/۹۴	۸/۰۷	۹۸/۷۱	۸۲/۷۵	۳۱/۵۱	۷/۹۹	۵/۷۱
۱۰	۳	۲	۹۹/۳۳	۵۵/۶۹	۲۳/۶۹	۸/۵۶	۹۹/۳۲	۸۸/۵۹	۴۰/۴۵	۱۰/۰۳	۶/۰۱
۱۰	۳	۳	۹۹/۴۲	۵۹/۳۱	۲۵/۸۷	۸/۰۶	۹۹/۳۸	۹۰/۴۲	۴۶/۲۸	۱۲/۳۴	۶/۳۴
۱۰	۳	۴	۹۹/۲۷	۶۰/۰۹	۲۶/۹۶	۶/۹۰	۹۹/۲۷	۸۹/۷۶	۵۱/۹۶	۱۴/۴۰	۷/۱۴
۱۰	۳	۵	۹۹/۱۸	۶۰/۱۴	۲۷/۱۹	۵/۹۶	۹۹/۱۱	۸۹/۱۲	۵۶/۰۶	۱۵/۹۸	۷/۶۱
۱۰	۳	۶	۹۹/۰۸	۵۹/۸۵	۲۷/۳۶	۴/۸۴	۹۸/۸۸	۸۸/۳۶	۵۹/۰۵	۱۷/۶۰	۷/۸۹
۱۰	۳	۷	۹۸/۹۵	۵۹/۲۵	۲۷/۶۳	۳/۹۰	۹۸/۵۷	۸۶/۹۸	۶۱/۲۴	۱۸/۷۹	۸/۳۱
۱۰	۳	۸	۹۸/۷۱	۵۸/۴۴	۲۷/۷۱	۲/۷۹	۹۸/۱۸	۸۶/۰۲	۶۳/۳۹	۱۹/۹۷	۸/۸۱
۱۰	۳	۹	۹۸/۴۴	۵۷/۲۱	۲۶/۹۴	۱/۹۲	۹۷/۷۶	۸۴/۷۸	۶۵/۳۷	۲۰/۸۶	۹/۵۱
۱۰	۴	۱	۹۴/۸۶	۳۱/۷۸	۱۴/۲۵	۷/۳۴	۹۴/۳۳	۶۳/۱۰	۲۲/۹۴	۶/۹۲	۵/۱۶
۱۰	۴	۲	۹۷/۳۸	۴۱/۱۳	۱۷/۲۳	۸/۶۸	۹۷/۴۱	۷۵/۸۵	۳۱/۸۱	۷/۷۱	۵/۴۷
۱۰	۴	۳	۹۸/۵۶	۴۹/۷۶	۲۰/۷۹	۹/۴۳	۹۸/۴۶	۸۲/۸۴	۴۱/۷۴	۱۰/۱۷	۵/۸۳
۱۰	۴	۴	۹۸/۹۷	۵۵/۶۸	۲۴/۷۶	۸/۶۱	۹۸/۸۲	۸۶/۸۷	۴۹/۹۲	۱۲/۴۰	۶/۳۹
۱۰	۴	۵	۹۹/۱۹	۵۸/۷۹	۲۶/۶۹	۷/۲۵	۹۸/۹۱	۸۸/۹۴	۵۶/۱۷	۱۴/۶۴	۷/۵۱
۱۰	۴	۶	۹۸/۷۷	۵۸/۹۶	۲۷/۷۹	۵/۴۸	۹۸/۷۸	۸۷/۹۶	۶۰/۷۷	۱۶/۹۱	۸/۰۶
۱۰	۴	۷	۹۸/۵۸	۵۸/۵۹	۲۷/۹۱	۳/۶۷	۹۸/۴۶	۸۶/۷۷	۶۳/۷۰	۱۸/۷۶	۸/۷۰
۱۰	۴	۸	۹۷/۸۹	۵۷/۰۴	۲۷/۷۸	۲/۳۳	۹۷/۹۹	۸۵/۲۵	۶۵/۸۶	۲۰/۷۶	۹/۷۳
۱۰	۴	۹	۹۶/۹۵	۴۵/۷۱	۲۷/۲۲	۱/۵۵	۹۷/۲۴	۸۲/۸۵	۶۷/۳۱	۲۱/۷۴	۱۰/۳۵
۱۰	۵	۱	۸۱/۷۰	۲۱/۲۴	۹/۸۸	۷/۴۴	۸۱/۴۷	۴۵/۸۳	۱۶/۹۸	۵/۷۸	۴/۸۴
۱۰	۵	۲	۸۹/۹۶	۲۸/۵۶	۱۲/۴۴	۸/۵۲	۸۹/۸۹	۵۷/۵۱	۲۲/۵۷	۶/۱۵	۵/۱۰
۱۰	۵	۳	۹۵/۲۲	۳۸/۲۴	۱۶/۵۳	۱۰/۷۶	۹۵/۰۹	۷۱/۳۵	۳۲/۵۰	۷/۲۰	۵/۴۴
۱۰	۵	۴	۹۷/۸۰	۶۰/۵۸	۳۱/۲۶	۱۱/۱۸	۹۷/۶۹	۹۱/۳۲	۵۴/۹۱	۱۹/۳۲	۶/۱۲
۱۰	۵	۵	۹۸/۴۴	۶۲/۳۸	۲۹/۳۰	۹/۶۴	۹۹/۷۴	۹۵/۹۸	۶۵/۲۷	۲۴/۳۳	۷/۳۱
۱۰	۵	۶	۹۸/۶۱	۵۹/۴۵	۲۷/۵۱	۵/۳۵	۹۸/۷۱	۸۹/۰۹	۶۹/۳۳	۲۰/۸۲	۸/۹۵
۱۰	۵	۷	۹۸/۲۲	۵۸/۲۸	۲۸/۰۲	۳/۳۱	۹۸/۳۶	۸۶/۰۶	۶۴/۸۷	۱۹/۵۰	۱۰/۰۸
۱۰	۵	۸	۹۷/۴۱	۵۵/۸۰	۲۷/۰۹	۱/۹۷	۹۷/۵۳	۸۳/۶۱	۶۷/۲۰	۲۱/۰۳	۱۰/۸۸
۱۰	۵	۹	۹۵/۹۰	۵۲/۲۶	۲۵/۸۰	۱/۲۳	۹۶/۰۹	۷۹/۹۶	۶۸/۶۱	۲۲/۰۷	۱۱/۴۵

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.1.0]

از مقایسه مقادیر جداول ۳ تا ۶ مشاهده می‌شود مقادیر مختلف k روی توان آزمون تأثیر داشته، و بطور کلی بیشترین توان برای اندازه نمونه $n = ۱۰$ (جدول ۳) مربوط به $k = ۴$ و برای اندازه نمونه $n = ۲۰$ (جداول ۴ تا ۶) مربوط به $k = ۱۰$ می‌باشد یعنی با افزایش k توان افزایش یافته است. همچنین مقادیر مختلف r نیز بر روی مقدار توان بی‌تأثیر نبوده بطوری که برای هر k با افزایش مقدار r توان نیز افزایش یافته‌است. از این رو در اندازه نمونه $n = ۱۰$ برای $k = ۴$ مقدار r برابر ۲، و در اندازه نمونه $n = ۲۰$ برای $k = ۱۰$ مقدار r برابر ۵ توصیه می‌شود. در مورد مقدار w نتایج گرفته شده مشابه جدول ۱ می‌باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده‌ی داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده در این مقاله شده کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند، در ضمن از حمایت مالی قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع

Anderson, T. W. and Darling, D. A., (1954), *A Test of Goodness of Fit*, Journal of American Statistcal Association, **49**, 765-769.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), *A Test for Normality Based on Kullback-Leibler Information* The American Statistician, **43**, 20-23.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), *Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type-II Censored Data*, IEEE Transaction on Reliability, **56(2)**, 301-307.

David, F. N. and Johnson, R. A. (1956), *Some Tests of Significance with Order Variables*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **18**, 1-20.

Doksum, K. A., Fenstad, G. and Aaberge, R. (1976), *Plots and Tests for Symmetry*, Biometrika, **64**, 473-487.

Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), *Entropy-based Tests of Uniformity* Journal of American Statistcal Association, **76**, 967-974.

Ebrahimi, N. and Habibullah, M. (1992), *Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **54**, 739-748.

Park, S. (1995), *The Entropy of Consecutive Order Statistics*, IEEE Transaction Information Theory, **41**, 2003-2007.

Park, S. (1999), *A Goodness-of-fit Test for Normality Based on the Sample Entropy of Order Statistics*, Statistics and Probability Letters, **44**, 359-363.

Park, S. (2005), *Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data*, IEEE Transaction on Reliability, **54**, 22-26.

Shannon, C. E. (1948), *A Mathematical Theory of Communications*, Bell System Technical Journal, **27**, 379-423; 623-656.

Shapiro, S. S. and Wilk, M.B. (1965), *An Analysis of Variance Test for Normality*, Biometrika, **52**, 591-611.

Vasicek, O. (1976), *A Test for Normality Based on Sample Entropy*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **38**, 730-737.