

## آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

ملیحه عباس نژاد، داود محمدی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۲/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۵/۱۷

**چکیده:** در این مقاله، ابتدا توزیع‌های متقارن براساس تفاضل آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌ها، مشخصه‌سازی می‌شوند. سپس آزمونی برای تقارن توزیع بر مبنای برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب معرفی می‌گردد. براساس روش شبیه‌سازی مونت کارلو، توان آزمون پیشنهادی محاسبه شده و با آزمون ارائه شده توسط حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. نشان داده خواهد شد آزمون پیشنهاد شده برای برخی از توزیع‌های جانشین از توان بالاتری برخوردار است.

**واژه‌های کلیدی:** آنتروپی رنی، برآورد آنتروپی رنی، آماره‌های مرتب.

### ۱ مقدمه

یکی از اساسی‌ترین معیارها برای اندازه‌گیری عدم حتمیت یک متغیر تصادفی آنتروپی شانون است که توسط شانون (۱۹۴۸) معرفی شد. آنتروپی شانون متغیر تصادفی پیوسته  $X$  با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  برابر است با

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx.$$

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ملیحه عباس نژاد، ma\_abbasnejad@yahoo.com  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): 94A17, 62G30

حالت کلی تری از آنتروپی شانون توسط رنی (۱۹۶۱) به صورت

$$H_s(X) = -\frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x) dx, \quad s > 0 \quad (s \neq 1).$$

ارائه شد. به راحتی می توان نشان داد که

$$\lim_{s \rightarrow 1} H_s(X) = H(X).$$

از آنجا که مفهوم آنتروپی کاربردهای فراوانی در مباحث آماری نظیر نظریه اطلاع و آزمون های نیکوئی برازش دارد، مسأله برآورد  $H(X)$  براساس مشاهدات  $x_1, \dots, x_n$  توسط محققین زیادی از جمله احمد و لین (۱۹۷۶)، واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردها، برآوردگر واسیچک به واسطه سادگی در محاسبات و دقت بالای آن بسیار مورد استفاده قرار می گیرد. واپوئیک و همکاران (۲۰۰۵) به روشی مشابه واسیچک برآوردی برای آنتروپی رنی به صورت

$$H_s(\omega, n) = -\frac{1}{s-1} \log \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{n}{2^\omega} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n}) \right)^{1-s} \right], \quad (1)$$

معرفی نمودند، که در آن  $x_{1:n}, \dots, x_{n:n}$  آماره های مرتب نمونه تصادفی هستند و  $\omega$  یک عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $\frac{n}{2}$  است و برای  $i < 1$  و برای  $x_{i:n} = x_{n:n}$  و برای  $x_{i:n} = x_{1:n}$   $i > n$

برآورد آنتروپی در به دست آوردن آماره نیکوئی برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیچک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزونو و اوتا (۱۹۸۹)، علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷)، زمان زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸)، دادویچ و ون در مولن (۱۹۸۱) برای توزیع یکنواخت و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) برای توزیع نمایی مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای داده های سانسور شده نوع دو توسط پارک (۲۰۰۵) و برای داده های سانسور پیشرونده نوع دو توسط بالاکریشان و همکاران (۲۰۰۷) به کار رفته است. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) نیز از برآورد آنتروپی شانون آماره های مرتب برای آزمون تقارن توزیع کمک گرفتند. عباس نژاد و شکوری (۱۳۸۷) آزمونی برای توزیع نمایی

بر مبنای برآورد اطلاع رنی معرفی نمودند و نیز آزمون نیکوئی برازش برای توزیع نمایی و نرمال براساس اطلاع رنی توسط عباس نژاد (۲۰۱۱) ارائه شده است. در بخش دوم این مقاله برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب که تعمیمی از برآورد آنتروپی است، بیان می‌شود، سپس در بخش ۳ آزمون تقارن بر اساس آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌های ۲ تایی ارائه و توان آزمون پیشنهادی با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. در بخش ۴ آزمون معرفی شده در بخش ۳ برای مقادیر مختلف  $k$  (حجم زیر نمونه) تعمیم داده شده و در انتها با کمک شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که افزایش  $k$ ، تأثیر مثبتی بر توان آزمون دارد.

## ۲ برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته  $X$  دارای تابع توزیع  $F(x)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد. همچنین فرض کنید  $X_{r:k}$ ، آماره مرتب  $r$ ام با تابع توزیع  $F_{r:k}(x)$  از یک زیر نمونه تصادفی  $k$  تایی ( $k = 2, 3, \dots$ ) باشد که با روش باجایگذاری از نمونه اصلی گرفته شده است.

**لم ۱:** اگر  $H_{s,1:k}$  و  $H_{s,k:k}$  به ترتیب آنتروپی رنی اولین و  $k$  امین آماره مرتب از یک زیر نمونه  $k$  تایی باشند، آن‌گاه

$$H_{s,1:k} = -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x) [1 - F(x)]^{s(k-1)} dx,$$

$$H_{s,k:k} = -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x) [F(x)]^{s(k-1)} dx.$$

**برهان** با کمک تعریف آنتروپی رنی، نتیجه به آسانی به دست می‌آید.  
برای محاسبه برآورد آنتروپی  $H_{s,1:k}$  و  $H_{s,k:k}$ ، با استفاده از تغییر متغیر  $F(x) = p$  داریم

$$H_{s,1:k} = -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right]^{1-s} (1-p)^{s(k-1)} dp,$$

$$H_{s,k:k} = -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right]^{1-s} p^{s(k-1)} dp.$$

۲۴ ..... آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

بنابراین برآورد آنتروپی رنی  $X_{1:k}$  و  $X_{k:k}$  بر اساس زیرنمونه  $k$  تایی از نمونه‌ای به اندازه  $n$  برابر است با

$$\begin{aligned} \hat{H}_{s,1:k} &= -\frac{1}{s-1} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^{s(k-1)} \left(\frac{n}{2\omega} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})\right)^{1-s} \\ &\quad - \frac{s}{s-1} \log k, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{s,k:k} &= -\frac{1}{s-1} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n+1}\right)^{s(k-1)} \left(\frac{n}{2\omega} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})\right)^{1-s} \\ &\quad - \frac{s}{s-1} \log k. \end{aligned} \quad (3)$$

### ۳ آزمون تقارن توزیع

در این بخش به معرفی آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب پرداخته می‌شود. پارک (۱۹۹۵) لم زیر را برای آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی معرفی کرده است.

**لم ۲** (پارک، ۱۹۹۵) فرض کنید  $D_k = E_{1:k} - E_{k:k}$ ، که در آن  $E_{1:k}$  و  $E_{k:k}$  به ترتیب نشان‌دهنده آنتروپی شانون اولین و  $k$  امین آماره مرتب از یک زیر نمونه  $k$  تایی هستند. آن‌گاه برای  $k = 2, 3, \dots$  اگر  $D_k = 0$  و تنها اگر تابع  $f$  متقارن باشد. براساس آنتروپی رنی، لم ۲ به صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

**لم ۳** فرض کنید  $D_{k,s} = H_{s,1:k} - H_{s,k:k}$ . آن‌گاه برای  $k = 2, \dots$  اگر  $D_{k,s} = 0$  و تنها اگر تابع  $f$  متقارن باشد.

**برهان** بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید تابع  $f$  نسبت به صفر متقارن باشد. در این صورت  $X_{i:n} \stackrel{d}{=} -X_{n-i+1:n}$  (آذرنوش، ۱۳۷۹). بنابراین برای  $k = 2$  (حجم زیر نمونه) داریم

$$X_{1:2} \stackrel{d}{=} -X_{2:2},$$

از طرفی  $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2}) = H_s(X_{2:2})$  در نتیجه

$$D_{k,s} = H_s(X_{1:2}) - H_s(X_{2:2}) = 0.$$

برعکس فرض کنید  $D_{k,s} = 0$ ، در این صورت  $H_s(X_{1:2}) = H_s(X_{2:2})$  یا  $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2})$  حال اگر قرار داده شود  $Y = -X$ ، آن گاه

$$-X_{2:2} = Y_{1:2}$$

بنابراین

$$H_s(X_{1:2}) = H_s(Y_{1:2}),$$

با توجه به قضیه ۲ براتپور و همکاران (۲۰۰۸) داریم

$$X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow X \stackrel{d}{=} -X,$$

و اثبات تمام است.

بنابراین مقدار  $D_{k,s}$  معیار خوبی برای تشخیص تقارن توزیع داده‌هاست، از این رو برای آزمون تقارن توزیع در مقابل توزیع‌های نامتقارن (چوله) می‌توان از  $D_{k,s}$  به عنوان آماره آزمون استفاده کرد. در ادامه آماره آزمون  $D_{k,s}$  را با کمک روابط (۲) و (۳) به صورت

$$D_{k,s}(n, \omega) = -\frac{1}{s-1} \log \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \frac{i}{n+1})^{s(k-1)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}{\sum_{i=1}^n (\frac{i}{n+1})^{s(k-1)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}, \quad (4)$$

برآورد می‌شود.

مقادیر بزرگ  $|D_{k,s}|$  از  $H_1$  پشتیبانی می‌کنند، بنابراین فرضیه  $H_0$  به نفع  $H_1$  در سطح معنی‌داری  $\alpha$  رد می‌شود اگر  $|D_{k,s}| > d_{k,s}(\alpha)$ ، که در آن مقدار بحرانی  $d_{k,s}(\alpha)$  به وسیله چندک  $1 - \alpha$  از توزیع آماره  $D_{k,s}$  تحت فرضیه  $H_0$  محاسبه می‌شود. از آنجا که توزیع  $D_{k,s}$  تحت فرضیه  $H_0$  پیچیده است، برای تخمین چندک‌های توزیع آماره آزمون برای محاسبه مقادیر بحرانی و همچنین در بخش بعدی برای محاسبه توان‌های تجربی آزمون از روش مونت کارلو استفاده می‌شود.

برای این منظور به ازای مقادیر مختلف  $s$  و مقادیر  $\frac{n}{4} < \omega$ ، ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی به حجم  $n$  از توزیع نرمال استاندارد تولید نموده و چندک  $1 - \alpha$  ام به عنوان مقدار بحرانی تعیین می شود. لازم به ذکر است که چون آماره آزمون نسبت به تبدیل مکان-مقیاس پایا است، توزیع نرمال به صورت استاندارد در نظر گرفته شده است.

### ۱.۳ توان آزمون

در این بخش توان آزمون پیشنهادی با توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می شود. برای این منظور، توزیع های جانشین زیر در نظر گرفته می شوند.

- توزیع کی دو با درجه آزادی ۱ و ۴ و ۱۰.
- توزیع گاما با پارامتر شکل ۱/۵ و ۲.
- توزیع وایبول با پارامتر شکل ۰/۵ و ۱/۵ و ۲.

مجدداً تأکید می شود که چون آماره آزمون مقیاس-پایا است، پارامتر مقیاس در توزیع های گاما و وایبل مقدار یک در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه توان آزمون پیشنهادی، ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم های  $n = 10, 20$  از توزیع های جانشین تولید می شود. در جدول ۱ توان آزمون پیشنهادی  $D_{k,s}$  و آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای  $k = 2$ ،  $\alpha = 0/05$  و  $n = 10, 20$  ارائه شده اند.

نتایج شبیه سازی نشان می دهند مقادیر  $\omega$  که منجر به ماکسیمم توان آزمون می شود مشابه مقادیر ارائه شده توسط پارک (۱۹۹۹) است. از این رو توان آزمون برای  $n = 10$ ، به ازای  $\omega = 3$  و برای  $n = 20$ ، به ازای  $\omega = 4$  ارائه شده است. لازم به ذکر است، توان آزمون به ازای مقادیر مختلف  $s$  محاسبه شده و مشاهده شد که در حالت کلی مقدار بهینه  $s$  به توزیع جانشین بستگی دارد. بنابراین نمی توان یک مقدار قطعی برای  $s$  تعیین نمود. در اینجا مقدار  $s = 0/5$  پیشنهاد می شود که براساس نتایج شبیه سازی برای بیشتر توزیع های جانشین بیشترین توان را می دهد. در جدول ۱ مقدار  $s = 0/5$  در نظر گرفته شده است. از جدول ۱ مشاهده می شود که آماره ارائه شده در مورد توزیع های کی دو با درجه آزادی ۴ و ۱۰ و همچنین به ازای  $n = 10$  در مقابل توزیع وایبل با پارامتر ۱/۵ و ۲، و توزیع گاما با پارامتر ۱/۵

ملیحه عباس نژاد، داود محمدی ..... ۲۷

و ۲، توان بیشتری نسبت به آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) دارد، گرچه این اختلافها بسیار ناچیز هستند.

جدول ۱: مقایسه توانها (×۱۰۰) برای  $n = ۱۰, ۲۰$  و  $\alpha = ۰/۰۵$

| توان آزمون |           | $n$ | توزیع        |
|------------|-----------|-----|--------------|
| $D_k$      | $D_{k,s}$ |     |              |
| ۸۰/۶۳      | ۷۸/۴۷     | ۱۰  | $\chi^2(۱)$  |
| ۹۹/۴۴      | ۹۸/۹۸     | ۲۰  |              |
| ۲۵/۴۳      | ۲۶/۲۶     | ۱۰  | $\chi^2(۴)$  |
| ۵۸/۴۳      | ۵۸/۸۴     | ۲۰  |              |
| ۱۱/۹۴      | ۱۲/۴۶     | ۱۰  | $\chi^2(۱۰)$ |
| ۲۵/۵۱      | ۲۷/۷۷     | ۲۰  |              |
| ۳۴/۳۳      | ۳۴/۸۳     | ۱۰  | $Gam(۱/۵)$   |
| ۷۴/۵۳      | ۷۳/۱۰     | ۲۰  |              |
| ۲۵/۳۷      | ۲۵/۷۳     | ۱۰  | $Gam(۲)$     |
| ۵۸/۴۹      | ۵۷/۹۴     | ۲۰  |              |
| ۹۳/۱۱      | ۹۱/۸۸     | ۱۰  | $Wei(۰/۵)$   |
| ۹۹/۹۸      | ۹۹/۹۵     | ۲۰  |              |
| ۱۹/۱۰      | ۱۹/۵۱     | ۱۰  | $Wei(۱/۵)$   |
| ۴۷/۶۵      | ۴۷/۲۵     | ۲۰  |              |
| ۸/۳۱       | ۸/۳۶      | ۱۰  | $Wei(۲)$     |
| ۱۷/۷۶      | ۱۷/۷۵     | ۲۰  |              |

#### ۴ توسعه آزمون تقارن توزیع

همانطور که در بخش ۳ به آن اشاره شد، مقدار آماره آزمون در رابطه (۴) فقط برای  $k = ۲$  محاسبه و به دنبال آن توان آزمون نیز تنها برای  $k = ۲$  محاسبه شده است. در این بخش توان آزمون برای مقادیر مختلف  $k$  محاسبه شده و مقداری از  $k$  که توان آزمون را ماکسیمم کند معرفی می شود.

در این بخش با توجه به آماره آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) تفاضل آنتروپی

رنی آماره‌های مرتب که به یک فاصله از دو انتهای زیرنمونه‌ها قرار دارند به عنوان آماره آزمون در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$D_{k,s}(r) = H_{s,r;k} - H_{s,k-r+1;k} \quad ; \quad k = 2, 3, \dots, \quad r = 1, 2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right].$$

با اثباتی مشابه لم ۳ برای آماره آزمون فوق، از آن نیز می‌توان به عنوان آماره آزمون تقارن توزیع استفاده نمود، با این تفاوت که می‌توان آزمون را برای مقادیر مختلف  $k$  و همچنین  $r$  محاسبه نمود. حال آماره آزمون فوق مشابه روابط (۲) و (۳) به صورت

$$D_{k,s}(r) = -\frac{1}{s-1} \log \frac{\sum_{i=1}^n (1-t)^{s(r-1)} t^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}{\sum_{i=1}^n t^{s(r-1)} (1-t)^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}. \quad (5)$$

برآورد می‌شود، که در آن  $t = \frac{i}{n+1}$  است. حال با استفاده از رابطه (۵) مقادیر بحرانی آزمون  $| \hat{D}_{k,s}(r) |$  را براساس روش مونت کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی کرده و سپس توان آزمون در سطح  $\alpha = 0.05$  برای نمونه‌هایی به حجم  $n = 10$  ( $\omega = 3$ ) و  $n = 20$  ( $\omega = 4$ ) برای مقادیر مختلف  $r$  و  $k$  در مقابل توزیع‌های جانشین معرفی شده در بخش ۳ محاسبه شده است. نتایج در جدول ۲ ارائه شده‌اند. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) برای  $n = 10$ ،  $k = 4$  و  $r = 2$  برای  $n = 20$ ،  $k = 10$  و  $r = 5$  را پیشنهاد کردند. توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای این مقادیر نیز در جدول ۲ آورده شده است.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که افزایش  $k$  تأثیر مثبتی بر توان آزمون داشته، به نحوی که ماکسیمم توان در اکثر موارد برای  $n = 10$  به ازای  $k = 4$  و برای  $n = 20$  به ازای  $k = 10$  به دست می‌آید. به ازای مقدار ثابت  $k$ ، با افزایش  $r$  توان آزمون در بعضی موارد کاهش یافته و در مواردی نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نمی‌توان به طور کلی در مورد تأثیر  $r$  بر توان آزمون اظهار نظر کرد. نتایج جدول ۲، در بیشتر موارد کاهش توان آزمون را به ازای افزایش  $r$  نشان می‌دهند.

با مقایسه توان‌های آزمون مبتنی بر  $D_{k,s}(r)$  با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مشاهده می‌شود که آزمون معرفی شده برای  $n = 10$ ، به ازای همه توزیع‌های جانشین به جز توزیع کی‌دو با درجه آزادی یک و توزیع وایبول با درجه آزادی ۲

توان بالاتری دارد، گرچه این اختلاف در توان‌ها ناچیز است. برای  $n = 20$ ، در همه موارد آزمون ارائه شده توان بیشتری دارد. علاوه بر این اختلاف توان‌ها در مقایسه با حالت  $n = 10$  بیشتر است.

همچنین می‌توان گفت که در مقابل توزیع‌های جانشین کی‌دو هر چقدر درجه آزادی بیشتر می‌شود، یا به عبارتی توزیع به سمت تقارن می‌رود، اختلاف توان آزمون مبتنی بر آنتروپی رنی با توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) بیشتر می‌شود.

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تفاضل آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیرنمونه‌ها، آزمونی برای تقارن توزیع ارائه شد. این آزمون به ازای  $k = 2$  (زیرنمونه‌های ۲ تایی) تفاوت چشمگیری با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) که بر اساس آنتروپی شانون معرفی شده بود، ندارد. اما به ازای سایر مقادیر  $k$  و همچنین مقادیر مختلف  $n$ ، بخصوص برای  $n = 20$ ، آزمون پیشنهادی عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. هر چند به طور کلی نمی‌توان شرایطی را مشخص کرد که تحت آنها آزمون پیشنهادی همواره نسبت به آزمون رقیب بهتر عمل کند، اما استفاده از آنتروپی رنی به عنوان آماره آزمون به علت داشتن پارامتر  $s$  در مقایسه با آنتروپی شانون این امکان را فراهم می‌سازد که با تغییر  $s$ ، آزمون پرتوان‌تری به دست آورده شود.

بر اساس نتایج شبیه‌سازی انجام شده مقدار  $s = 0.5$  پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این با توجه به جدول ۲، توصیه می‌شود برای  $n = 10$  از  $k = 4$  و برای  $n = 20$  از  $k = 10$  استفاده شود.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزنده داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند. در ضمن از حمایت مالی قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز قدردانی و تشکر می‌شود.

۳۰.....آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

جدول ۲: توان آزمون ( $\times 100$ ) برای  $n = 10, 20$  و  $s = 0/5$

| $Wei(2)$ | $Wei(1.5)$ | $Wei(.5)$ | $Gam(2)$ | $Gam(1.5)$ | $\chi^2(10)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(1)$ | $r$ | $k$ | $n$ | آماره     |
|----------|------------|-----------|----------|------------|--------------|-------------|-------------|-----|-----|-----|-----------|
|          |            |           |          |            |              |             |             |     |     |     | $D_{k,s}$ |
| ۸/۲۶     | ۱۹/۲۷      | ۹۲/۲۷     | ۲۶/۳۳    | ۳۳/۸۷      | ۱۳/۸۹        | ۲۴/۱۷       | ۷۷/۲۹       | ۱   | ۲   | ۱۰  |           |
| ۸/۲۶     | ۱۹/۲۲      | ۹۳/۲۷     | ۲۵/۴۲    | ۳۳/۶۲      | ۱۲/۵۵        | ۲۷/۵۱       | ۷۷/۴۹       | ۱   | ۴   | ۱۰  |           |
| ۸/۰۳     | ۱۹/۲۲      | ۹۱/۵۰     | ۲۶/۴۳    | ۳۴/۸۹      | ۱۲/۴۵        | ۲۶/۹۲       | ۷۸/۸۶       | ۲   | ۴   | ۱۰  |           |
| ۱۷/۸۴    | ۴۶/۸۶      | ۹۹/۹۵     | ۵۹/۸۸    | ۷۳/۲۳      | ۲۶/۸۵        | ۵۹/۰۱       | ۹۸/۹۰       | ۱   | ۲   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۶۴    | ۴۵/۶۷      | ۹۹/۹۷     | ۵۸/۹۳    | ۷۳/۹۵      | ۲۶/۳۰        | ۵۹/۳۹       | ۹۸/۹۹       | ۱   | ۴   | ۲۰  |           |
| ۱۸/۳۹    | ۴۵/۰۵      | ۹۹/۸۹     | ۵۹/۶۷    | ۷۲/۲۸      | ۲۷/۰۷        | ۵۸/۳۲       | ۹۸/۸۸       | ۲   | ۴   | ۲۰  |           |
| ۱۸/۱۲    | ۴۷/۶۱      | ۹۹/۹۸     | ۵۹/۳۳    | ۷۲/۸۱      | ۲۶/۴۹        | ۵۹/۸۱       | ۹۹/۱۴       | ۱   | ۶   | ۲۰  |           |
| ۱۸/۰۳    | ۴۶/۱۷      | ۹۹/۹۲     | ۵۸/۵۴    | ۷۱/۴۶      | ۲۷/۲۷        | ۵۹/۶۸       | ۹۸/۸۶       | ۲   | ۶   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۳۶    | ۴۶/۴۲      | ۹۹/۹۰     | ۵۹/۳۰    | ۷۱/۵۶      | ۲۷/۴۴        | ۶۰/۳۴       | ۹۸/۴۸       | ۳   | ۶   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۶۲    | ۴۵/۸۱      | ۹۹/۹۵     | ۵۹/۶۱    | ۷۲/۰۷      | ۲۶/۴۴        | ۵۹/۸۴       | ۹۸/۹۹       | ۱   | ۸   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۳۶    | ۴۷/۲۴      | ۹۹/۹۴     | ۶۰/۵۵    | ۷۳/۳۳      | ۲۷/۴۷        | ۵۸/۶۴       | ۹۹/۰۱       | ۲   | ۸   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۳۱    | ۴۵/۸۲      | ۹۹/۸۹     | ۵۸/۰     | ۷۱/۹۱      | ۲۷/۱۹        | ۵۷/۸۹       | ۹۸/۵۷       | ۳   | ۸   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۲۸    | ۴۴/۹۴      | ۹۹/۹۰     | ۵۸/۴۷    | ۷۰/۸۴      | ۲۶/۱۲        | ۵۷/۸۴       | ۹۸/۲۶       | ۴   | ۸   | ۲۰  |           |
| ۱۷/۵۲    | ۴۶/۱۴      | ۹۹/۹۸     | ۵۸/۱۹    | ۷۴/۳۹      | ۲۵/۶۰        | ۵۸/۴۴       | ۹۹/۱۶       | ۱   | ۱۰  | ۲۰  |           |
| ۱۸/۸۱    | ۴۷/۱۷      | ۹۹/۹۲     | ۶۰/۰۴    | ۷۳/۱۷      | ۲۵/۵۰        | ۵۹/۹۶       | ۹۹/۰۵       | ۲   | ۱۰  | ۲۰  |           |
| ۱۷/۸۶    | ۴۵/۵۲      | ۹۹/۹۱     | ۵۹/۹۴    | ۷۱/۸۴      | ۲۷/۵۵        | ۵۸/۶۲       | ۹۸/۹۶       | ۳   | ۱۰  | ۲۰  |           |
| ۱۶/۸۵    | ۴۳/۹۹      | ۹۹/۸۹     | ۵۷/۹۴    | ۶۹/۸۰      | ۲۶/۶۷        | ۵۶/۲۱       | ۹۸/۳۳       | ۴   | ۱۰  | ۲۰  |           |
| ۱۶/۶۸    | ۴۳/۲۴      | ۹۹/۸۴     | ۵۷/۷۲    | ۶۹/۶۷      | ۲۷/۱۷        | ۵۶/۰۰       | ۹۷/۹۳       | ۵   | ۱۰  | ۲۰  |           |
|          |            |           |          |            |              |             |             |     |     |     |           |
| ۸/۵۹     | ۱۹/۵۶      | ۹۲/۸۷     | ۲۶/۳۸    | ۳۴/۳۸      | ۱۲/۵۷        | ۲۷/۳۳       | ۷۹/۳۹       | ۲   | ۴   | ۱۰  | $D_k$     |
| ۱۳/۴۵    | ۳۳/۴۲      | ۹۹/۵۸     | ۴۴/۹۲    | ۵۷/۰۵      | ۱۹/۰۶        | ۴۴/۴۲       | ۹۶/۸۴       | ۵   | ۱۰  | ۲۰  |           |

## مراجع

آذرنوش، ح. (۱۳۷۹)، نخستین درس در آماره های ترتیبی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد. ص ۴۰.

حبیبی راد، آ.، ارقامی، ن. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر مبنای آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۱، شماره ۲، ۱۰۹-۱۲۰.

زمان‌زاده، ا.، ارقامی، ن. (۱۳۸۷)، آزمون‌های نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۲، ۱۷۹-۲۰۰.

عباس‌نژاد، م.، شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۲، ۲۰۱-۲۱۱.

علیزاده، ن.، ه.، علیزاده، ن. ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روش‌ها، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۱، ۹۷-۱۱۳.

Abbasnejad, M. (2011), Some Goodness of Fit Tests Based on Renyi Information, *Applied Mathematical Sciences*, **39**, 1921-1936.

Ahmad, I. A. and Lin, P. E. (1976), A Nonparametric Estimation of the Entropy of the Absolutely Continuous Distributions, *IEEE Transactions on Information Theory*, **22**, 327-375.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), A Test for Normality Based on Kullback-leibler Information, *The American Statistician*, **43**, 20-23.

- Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.
- Baratpour, S. and Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2008), Characterizations based on Renyi Entropy of Order Statistics and Record Values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 2544-2551.
- Correa, J. C. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.
- Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.
- Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, **54**, 739-748.
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics & Probability Letters*, **20**, 225-234.
- Park, S. (1995), The Entropy of Consecutive Order Statistics, *IEEE Transaction Information Theory*, **41**, 2003-2007.
- Park, S. (1999), A Goodness-of-fit Test for Normality Based on the Sample Entropy of Order Statistics, *Statistics and Probability Letters*, **44**, 359-363.
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **54**, 22-26.

- Renyi, A. (1961), On Measures of Entropy and Information, *In Proceeding of Fourth Berkeley Symposioun*, Vol. I, UC Press, Berkeley, 547-561.
- Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423; 623-656.
- Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, **38**, 54-59.
- Wachowiak, M. P. and Smolikova, R. and Tourassi, G. D. and Elmaghraby, A. S. (2005), Estimation of Generalized Entropies with Sample Spacing, *Pattern Annal Applic*, **8**, 95-101.
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499.

## A Test for Symmetric Distributions Based on Renyi Entropy

Abbasnejad, M. and Mohammadi, D.

Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

**Abstract:** In this paper, we characterize symmetric distributions based on Renyi entropy of order statistics in subsamples. A test of symmetry proposed based on the estimated Renyi entropy. Critical values of the test are computed by Monte Carlo simulation. Also we compute the power of the test under different alternatives and show that it behaves better than the test of Habibi and Arghami (1386).

**Keywords:** Renyi Entropy, Estimated Renyi entropy, Order statistics.

**Mathematics Subject Classification (2000):** 94A17, 62G30.