.
Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2023
Vol. 17, No. 2, pp 371-388
DOI: 10.52547/jss.17.2.08

Flexible Closed Skew Normal Random Field to Analysis Skew Spatial Data

Karimi, O. , Hosseini, F.
Department of Statistics, Semnan University, Semnan, Iran.

Corresponding author: F. Hosseini, fatemeh.hoseini@semnan.ac.ir

Received: 6/9/2023 **Revised:** 31/10/2023 **Accepted and Published Online:** 4/11/2023.

Introduction

There are different families of skew-normal distribution, and among them, the closed skew-normal (CSN) distribution is of particular importance due to its high flexibility. Recently, Márquez and González (2022) introduced a more flexible variant of the CSN distribution, denoted as the Flexible CSN (FCSN) distribution. This FCSN distribution shares similarities with skew distributions proposed by Mahmoudian (2018) and Hosseini and Karimi (2021). However, it diverges in terms of spatial correlation structures and distribution parameters. In this paper, the features of the flexible skew spatial random field are presented based on the FCSN distribution, and a spatial model for the skew spatial data is implemented using it. Also, using the profile likelihood function, the likelihood estimate of the parameters of the proposed model is calculated. In addition, the determination of the spatial correlation structure based on the empirical variogram in this random field is investigated and evaluated through a simulation study and compared with the stationary skew spatial random field of Karimi and Hosseini (2022).

Material and Methods

Suppose the set $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D \subseteq \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}\}$ is a spatial random field. For any finite number of spatial positions $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in D$, let $\boldsymbol{Z}_n = \big(Z(\boldsymbol{s}_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)\big)'$, $\boldsymbol{X}$ be an $n \times p$ matrix of auxiliary variables in spatial positions, $\boldsymbol{\beta}$ be a p dimensional vector of regression coefficients, λ be the skewness parameter, $\sigma > 0$ and C_n be the spatial correlation matrix of the random vector $\boldsymbol{Z}_n$ with the components $\sigma_{ij} = \rho(Z(\boldsymbol{s}_i), Z(\boldsymbol{s}_j); \varphi)$ and $\rho(\cdot, \cdot; \varphi)$ is a valid spatial correlation function with the spatial domain parameter $\varphi > 0$. If the joint distribution of $\boldsymbol{Z}_n$ be $FSCSN_n(\boldsymbol{X\beta}, C_n, \sigma, \lambda)$, then $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D\}$ is an FCSN spatial random field.

Results and Discussion

Firstly, the effect of spatial correlation parameters φ and skewness parameter on the structure of empirical variogram and diagnosis of spatial correlation model is investigated. A simulation study was done in regular grids from the FCSN random field for 50 datasets. The results show that by changing the skewness, the empirical variogram correctly fits the real variogram model. Changes in parameter λ do not affect the empirical variogram, which was not the case in the stationary skew spatial random field. Then, the likelihood estimation of the parameters of FCSN is analyzed on 100 simulated datasets. Generally, the likelihood results in the FCSN random field for two parameters μ and σ have good accuracy, but the estimation of φ and λ parameters are not accurate enough. By increasing the value of the spatial correlation parameter φ, the estimation of the parameters is affected, and their estimation accuracy decreases.

Conclusion

In this paper, the flexible skew spatial random field based on FCSN distribution and the stationary skew spatial random field were presented to model skewed spatial data. The skewness parameter in this random field does not affect the first and second moments of the field, and it was observed in the simulation study that this parameter does not affect the fit of the variogram. This case is not seen in the stationary skew spatial random field. The mean parameter in the FCSN random field was not affected by the increase of the spatial correlation parameter, even in low dimensions. In general, the maximization of the likelihood function in terms of the skewness parameter in skew distributions has problems. As a suggestion, Bayesian and approximate Bayesian methods can improve the parameter estimations.

Keywords: Closed Skew Normal, Spatial Data, Identifiability, Stationarity.

Mathematics Subject Classification (2010): 60G15, 62M30.

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۲
جلد ۱۷، شماره ۲، ص ۳۷۱ -- ۳۸۸
DOI: 10.52547/jss.17.2.08
مقاله پژوهشی

میدان تصادفی چوله نرمال بسته منعطف برای تحلیل داده‌های فضایی چوله

امید کریمی، فاطمه حسینی

گروه آمار، دانشگاه سمنان

نویسنده مسئول : فاطمه حسینی، fatemeh.hoseini@semnan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۸/۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۸/۱۳

چکیده: معمولا برای مدل‌بندی داده‌های فضایی گاوسی از میدان تصادفی گاوسی استفاده می‌شود. در عمل ممکن است با داده‌های ناگاوسی مواجه شویم که چوله هستند. یک راه‌کار برای مدل‌بندی داده‌های فضایی چوله استفاده از میدان تصادفی چوله است. اخیرا میدان‌های تصادفی چوله متعددی برای مدل کردن این نوع داده‌ها ارائه شده‌اند که برخی از آن‌ها دارای مشکلاتی همچون پیچیدگی، عدم شناسایی پذیری و نامانایی هستند. در این مقاله یک کلاس منعطف از توزیع چوله نرمال بسته برای ساخت میدان‌های تصادفی مانای معتبر معرفی می‌شود و برخی از ویژگی‌های مهم برای این کلاس مانند شناسایی‌پذیری و بسته‌بودن تحت حاشیه‌سازی و شرطی‌کردن مورد بررسی قرار می‌گیرد. دلایل ایجاد مدل‌های فضایی معتبر بر اساس این میدان‌های تصادفی چوله نیز بیان می‌شود. همچنین شناسایی‌پذیر بودن مدل همبستگی فضایی بر اساس تغییرنگار تجربی در یک مطالعه شبیه‌سازی با میدان تصادفی چوله مانا به‌عنوان مدل رقیب بررسی می‌شود. علاوه بر این، پیشگویی‌های فضایی با استفاده از رهیافت درست‌نمایی در این میدان‌های تصادفی چوله ارائه و یک مطالعه شبیه‌سازی برای ارزیابی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای آن‌ها انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع چوله نرمال بسته، داده‌های فضایی، شناسایی پذیری، مانایی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60G15 ، 62M30.

۱ مقدمه

در بسیاری از مطالعات و کاربردهای علمی با داده‌های پیوسته که دارای چولگی هستند مواجه می شویم و معمولا برای مدل‌بندی آن‌ها از توزیع‌های چوله نرمال (آزالینی و دالاواله، ۱۹۹۶) که خواصی مشابه توزیع نرمال دارند، استفاده می‌شوند. در سال‌های اخیر برای تحلیل داده‌های فضایی چوله از میدان‌های تصادفی چوله گاوسی با تعمیم میدان تصادفی گاوسی استفاده شده است. خانواده‌های مختلف توزیع چوله نرمال وجود دارند که از میان آنها توزیع چوله نرمال بسته[۱] (CSN) (گنزالس و همکاران، ۲۰۰۴) از اهمیت ویژه‌ای به خاطر انعطاف پذیری بالا برخوردار است. توزیع CSN می‌تواند چولگی را در تمام جهات نشان دهد. از جمله خواص آن بسته‌بودن تحت تبدیل‌های خطی، حاشیه‌سازی[۲] و شرطی‌کردن است. با این حال، برای دستیابی به این ویژگی‌ها، این توزیع به پارامترهای بیشتری نسبت به توزیع چوله–نرمال آزالینی نیاز دارد، که باعث پیچیدگی آن می‌شود. توزیع CSN در مدل‌های فضایی متعددی به کار گرفته شده است. آلارد و ناویو (۲۰۰۷) یک کلاس از میدان‌های تصادفی بر اساس توزیع CSN ارایه و یک روش پیش‌گویی فضایی را پیشنهاد کردند. کریمی و محمدزاده (۲۰۱۱) یک میدان تصادفی گاوسی گسسته را تعریف و یک روش پیش‌گویی بیزی را با استفاده از توزیع CSN بیان کردند. ریمستاد و امره (۲۰۱۴) با استفاده از ساختار توزیع CSN یک میدان تصافی چوله گاوسی تقریبا مانا ارائه و مدل را با روش ماکسیمم درست‌نمایی برازش کردند. در همه این مراجع و بسیاری دیگر، آنها وجود و مانایی فرآیندهای پیشنهادی را مطالعه نکرده‌اند.

مینوزو و فراکوتی (۲۰۱۲) نشان دادند که برخی از مدل‌های فضایی معرفی شده بر اساس توزیع CSN و توزیع‌های چوله نرمال خوش تعریف نیستند. محمودیان (۲۰۱۸) ایده‌های مینوزو و فراکوتی (۲۰۱۲) را برای معرفی میدان‌های تصادفی فضایی چوله معتبر بسط داد و شرط سازگاری حاشیه‌ای را بر اساس قضیه بسط کلموگروف ارائه کرد که تضمین می‌کند، میدان‌های تصادفی فضایی بر اساس توزیع CSN و توزیع‌های چوله نرمال دارای خاصیت سازگاری حاشیه‌ای هستند. همچنین حسینی و کریمی (۲۰۲۱) یک میدان تصادفی فضایی چوله گاوسی با بسط میدان تصافی چوله گاوسی تقریبا مانای ریمستاد و امره (۲۰۱۴) برای مدل‌های خطی تعمیم یافته فضایی به‌کار گرفتند که در آن به خاصیت سازگاری حاشیه‌ای میدان پیشنهادی پرداخته‌اند. به علاوه کریمی (۲۰۱۱) رهیافت مونت کارلویی همیلتونی را بر اساس این میدان تصادفی چوله ارائه کرد. مارکز و گنزالس (۲۰۲۲) یک توزیع انعطاف‌پذیر از توزیع CSN معرفی و بر اساس آن میدان تصادفی فضایی مانا ارائه کردند که پارامترهای آن قابل شناسایی و تفسیرپذیر هستند. این توزیع منعطف چندین ویژگی مهم مشابه توزیع نرمال دارد. به این صورت که پارامترهای آن قابل شناسایی است، تحت حاشیه‌سازی و شرطی کردن بسته است و مهمتر از همه همبستگی صفر دلالت بر استقلال دارد. توزیع CSN منعطف[۳] (FCSN) مارکز و گنزالس (۲۰۲۲) مشابه توزیع‌های چوله محمودیان (۲۰۱۸) و حسینی و کریمی (۲۰۲۱) است البته تفاوت‌هایی در ساختار همبستگی فضایی و پارامترهای توزیع وجود دارد. در این مقاله ویژگی‌های میدان تصادفی فضایی چوله منعطف براساس توزیع FCSN ارائه و با استفاده از آن یک

[1] Closed Skew Normal
[2] Marginalization
[3] Flexible Closed Skew Normal

مدل فضایی برای داده‌های فضایی چوله پیاده‌سازی می‌شود. همچنین با استفاده از تابع درست‌نمایی نیم‌رخی، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل پیشنهادی محاسبه می‌شود. علاوه بر آن، تعیین ساختار همبستگی فضایی براساس تغییرنگار تجربی (محمدزاده ، ۱۳۹۸) در این میدان تصادفی به‌وسیله یک مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد و با میدان تصادفی فضایی چوله مانای کریمی و حسینی (۱۴۰۰) مقایسه می‌شود.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ ابتدا ساختار توزیع‌های CSN و FCSN ارائه می‌شود. در بخش ۳ میدان‌های تصادفی چوله گاوسی مانا و منعطف بیان می‌گردند و ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس پیشگوی فضایی بر اساس رهیافت درست‌نمایی روی داده‌های فضایی چوله ارایه می‌شود. یک مطالعه شبیه‌سازی برای ارزیابی روش‌های ارائه شده در بخش ۴ صورت می‌گیرد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲ توزیع چوله نرمال بسته منعطف و ویژگی‌های آن

فرض کنید بردار $\boldsymbol{U} \in R^{p+q}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره به‌صورت

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \sim N_{p+q}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right),$$

باشد. آن‌گاه $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{U}_1|\boldsymbol{U}_2 \leq \boldsymbol{0}]$ دارای توزیع CSN با تابع چگالی (گنزالس و همکاران، ۲۰۰۴)

$$f_X(\boldsymbol{x}) = k\phi_p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})\ \Phi_q(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1), \Sigma_{2|1}), \quad (1)$$

است، که در آن $k^{-1} = \Phi_q(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22})$ و $\Sigma_{2|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ است و ϕ و Φ به‌ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال چند متغیره با پارامترهای مورد نظر است و توزیع CSN را به صورت $\mathrm{CSN_{p,q}}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}, \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}, \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{2|1})$ نمایش می‌دهند. کلاس توزیع‌های CSN اکثر خواص توزیع نرمال مانند بسته بودن تحت تبدیلات خطی، حاشیه‌سازی و شرطی کردن را دارند.

اکنون زیرکلاس منعطفی از توزیع CSN (مارکز و گنزالس، ۲۰۲۲)، را ارایه می‌کنیم که مدل‌های فضایی مانا و شناسایی‌پذیر را معرفی می‌کند و آن را با FCSN نمایش می‌دهیم. این زیرکلاس برخی از خواص مفید توزیع نرمال چندمتغیره را به ارث می‌برد به این صورت که: شناسایی پذیر بودن پارامترهای آن، تحت حاشیه‌سازی و شرطی کردن بسته است و در برخی زیر خانواده‌های آن همبستگی صفر دلالت بر استقلال دارد. یک ویژگی مهم که در تعریف میدان تصادفی فضایی FCSN کاربرد دارد این است که پارامترهای آن براحتی قابل تفسیر بر اساس گشتاورهای مرتبه اول و دوم و برای داده‌های فضایی چوله است. این میدان تصادفی در بخش ۳ تعریف و خواص آن بررسی خواهد شد.

تعریف ۱. *(مارکز و گنزالس، ۲۰۲۲)* فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}$، $\sigma > 0$، $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ و Σ_n یک ماتریس معین

مثبت $n \times n$ و $b = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}$، $\delta = \lambda(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$ و $\tau = (1 - b^2\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$ باشد. بردار nـ بُعدی $\boldsymbol{Z}_n$ دارای توزیع ***FCSN*** به صورت $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_n, \sigma, \lambda)$ است، اگر یک توزیع ***CSN*** به‌صورت $\mathrm{CSN}_{\mathrm{n,n}}(\boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau\Sigma_n^{\frac{1}{2}}\mathbf{1_n}, \sigma^2\tau^2\Sigma_n, \frac{\lambda}{\sigma\tau}\Sigma_n^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{0}, \boldsymbol{I_n})$، باشد، که در آن $\mathbf{1_n}$ بردار یکه nـ بُعدی و $\boldsymbol{I_n}$ یک ماتریس همانی $n \times n$ است.

امید ریاضی و واریانس بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_n, \sigma, \lambda)$ مطابق گنزالس و همکاران (۲۰۰۴) به‌صورت $\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_n) = \boldsymbol{\mu}$، $\mathrm{Var}(\boldsymbol{Z}_n) = \sigma^2\Sigma_n$ به‌دست می‌آیند، که مانند میانگین و واریانس توزیع نرمال به هم وابسته نیستند و حتی به پارامتر چولگی نیز بستگی ندارند. در مطالعه شبیه‌سازی این موضوع برای تشخیص تابع همبستگی فضایی در حضور پارامتر چولگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تابع چگالی (۱) به‌صورت

$$f_{Z_n}(\boldsymbol{z}) = 2^n\phi_n(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau\Sigma_n^{\frac{1}{2}}1_{\boldsymbol{n}}, \sigma^2\tau^2\Sigma_n)\Phi_n(\frac{\lambda}{\sigma\tau}\Sigma_n^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu}) + b\delta\lambda 1_{\boldsymbol{n}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I_n}),$$

خلاصه می‌شود. پارامتر λ چولگی توزیع را کنترل می‌کند، اگر $\lambda = 0$ باشد، توزیع $\boldsymbol{Z}_n$ نرمال چندمتغیره می‌شود و مقادیر مثبت و منفی آن جهت چولگی را نشان می‌دهد در واقع مقادیر مثبت چوله به راست و مقادیر منفی چوله به چپ را مشخص می‌کند. توزیع FCSN نسبت به حاشیه‌سازی بسته است و این شرط خاصیت سازگاری حاشیه‌ای در تعریف میدان تصادفی فضایی چوله را تضمین می‌کند.

ویژگی حاشیه‌سازی: اگر بردار $\boldsymbol{Z}_n = (\boldsymbol{Z}_1', \boldsymbol{Z}_2')'$ دارای توزیع $\mathrm{FCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_n, \sigma, \lambda)$ باشد که در آن $\boldsymbol{Z}_1$ دارای بعد k است به‌طوری که $1 \leq k < n$ و هم‌چنین تفکیک‌های متناظر از $\boldsymbol{\mu}$ و Σ_n را به‌صورت

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_n = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

در نظر بگیرید، که در آن $\boldsymbol{\mu}_1$ یک بردار kـ بُعدی و Σ_{11} یک ماتریس معین مثبت $k \times k$ است. آن‌گاه بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_1$ طبق خاصیت حاشیه‌ای توزیع CSN (گنزالس و همکاران، ۲۰۰۴) از توزیع $\mathrm{FCSN}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}, \sigma, \lambda)$ پیروی می‌کند. بنابراین توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{Z}_1$ یک FCSN با پارامترهای متناظر و بُعد متناظر است. که این بُعد متناظر فقط در این زیر کلاس از توزیع‌های چوله برقرار است و در حالت کلی خانواده توزیع‌های CSN برقرار نیست. محمودیان (۲۰۱۸) بیان می‌کند که یک توزیع چوله نرمال دارای خاصیت سازگاری حاشیه‌ای کلموگروف است هرگاه تحت حاشیه‌سازی بسته و توزیع حاشیه‌ای آن فقط به پارامترهای متناظر و بُعد متناظر وابسته باشند. بنابراین توزیع FCSN دارای خاصیت سازگاری حاشیه‌ای کلموگروف است.

ویژگی شرطی کردن: توزیع FCSN نسبت به شرطی کردن بسته است. باهمان تفکیکی که برای $\boldsymbol{Z}_n$ در

ویژگی حاشیه‌سازی در نظر گرفتیم توزیع شرطی به‌صورت

$$\boldsymbol{Z}_2|\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{z}_1 \sim \mathrm{FCSN}_{n-k}(\boldsymbol{\mu}_{2|1}, \Sigma_{2|1}, \sigma, \lambda)$$

به‌دست می‌آید، که در آن $\Sigma_{2|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{21}^{-1}\Sigma_{12}$ و $\boldsymbol{\mu}_{2|1} = \boldsymbol{\nu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{\nu}_1)$ است، $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 - b\delta\sigma\tau\Sigma_{11}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\mu}_2 - b\delta\sigma\tau[\Sigma_n^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n}}]^{n-k}$ است، که در آن $[\cdot]^k$ یعنی k مولفه انتهایی بردار مورد نظر است. از این ویژگی شرطی کردن برای محاسبه پیشگویی فضایی بر اساس توزیع شرطی پیشگویی در یک ناحیه جدید استفاده می‌شود.

ویژگی ناهمبستگی: در اینجا نشان می‌دهیم که همانند توزیع نرمال چندمتغیره که ناهمبستگی دلالت بر استقلال دارد در این زیر کلاس نیز این ویژگی برقرار است. مطابق با همان تفکیکی که برای بردار $\boldsymbol{Z}_n$ از توزیع FCSN ارائه شده در تعریف ۱ در نظر گرفته شد. دو بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_1$ و $\boldsymbol{Z}_2$ مستقلند اگر و تنها اگر $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2) = \Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = \boldsymbol{0}$. این نتیجه به راحتی از توزیع شرطی ویژگی شرطی کردن حاصل می‌شود. در واقع کافی است برای حالت ناهمبستگی، $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = \boldsymbol{0}$ قرار دهید و در آن صورت توزیع شرطی $\boldsymbol{Z}_2|\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{z}_1 \sim \mathrm{FCSN}_{n-k}(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22}, \sigma, \lambda)$ هم‌ارز توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{Z}_2$ می‌شود. در نتیجه توزیع شرطی $\boldsymbol{Z}_2|\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{z}_1$ به توزیع $\boldsymbol{Z}_1$ وابسته نیست، پس مستقل از هم هستند. از این ویژگی می‌توان برای یافتن پیشگویی فضایی براساس نزدیکترین همسایگی‌ها استفاده کرد، چون همبستگی فضایی نقاط دور نزدیک به صفر هستند و این باعث استقلال تقریبی نقاط دور از هم می‌شود.

۳ میدان تصادفی فضایی FCSN

تعریف ۲. فرض کنید $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D \subseteq \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}\}$ یک میدان تصادفی فضایی است. برای هر تعداد متناهی از موقعیت‌های فضایی $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in D$ بردار $\boldsymbol{Z}_n = \big(Z(\boldsymbol{s}_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_n)\big)'$ و $\boldsymbol{X}$ یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای کمکی در موقعیت‌های فضایی، $\boldsymbol{\beta}$ یک بردار p بُعدی از ضرائب رگرسیونی، λ پارامتر چولگی، $\sigma > 0$ و Σ_n ماتریس همبستگی فضایی بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_n$ با مولفه‌های $\sigma_{ij} = \rho(Z(\boldsymbol{s}_i), Z(\boldsymbol{s}_j); \varphi)$ و $\rho(\cdot,\cdot;\varphi)$ یک تابع همبستگی فضایی معتبر با پارامتر دامنه فضایی $\varphi > 0$ است. اگر توزیع توام $\boldsymbol{Z}_n$ یک *FCSN* به‌صورت $\mathrm{FCSN}_n(\boldsymbol{X\beta}, \Sigma_n, \sigma, \lambda)$ باشد، آن‌گاه $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D\}$ یک میدان تصادفی فضایی *FCSN* است.

میدان تصادفی چوله در تعریف ۲ طبق قضیه بسط کلموگروف موجود است. زیرا توزیع‌های بُعد متناهی آن دارای دو شرط این قضیه هستند: ۱ - تقارن تحت جایگشت‌ها، ۲ - سازگاری حاشیه‌ای. ویژگی تقارن بیان می‌کند که توزیع باید تحت جایگشت متغیرها ثابت باشد. که این شرط برای اکثر توزیع‌های چوله برقرار است. اما شرط سازگاری نشان می‌دهد که پس از ادغام بُعدها، توزیع‌های حاشیه‌ای باید با توزیع‌های ابعاد بالاتر برابر باشند. این شرط را همان‌طور که محمودیان (۲۰۱۸) بیان کرد، اکثر توزیع‌های چوله ارائه شده در مقالات ندارند. حسینی و کریمی

(۲۰۲۱) نیز به این موضوع اشاره کردند و یک میدان تصادفی چوله مانا معرفی کردند.

تعریف ۳. فرض کنید مجموعه $\{Z(\boldsymbol{s}) = [\boldsymbol{U}_۱(\boldsymbol{s})|\boldsymbol{U}_۲ \leq \mathbf{0}]; \boldsymbol{s} \in D\}$ یک میدان تصادفی فضایی بر اساس بردار های تصادفی $\boldsymbol{U}_۱$ و $\boldsymbol{U}_۲$ بر طبق ساختار توزیع CSN بخش ۲ باشد. $p = q$، $\boldsymbol{\mu}_۱ = \mu\mathbf{1_p}$ و $\boldsymbol{\mu}_۲ = \nu\mathbf{1_p}$ قرار دهید و ساختار کوواریانس را نیز به‌صورت $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^۲ C & -\gamma\sigma\boldsymbol{C}^{\frac{۱}{۲}} \\ -\gamma\sigma\boldsymbol{C}^{\frac{۱}{۲}} & \mathbf{I_p} \end{pmatrix}$ با $\sigma^۲ > ۰$ پارامتر مقیاس، $|\gamma| < ۱$ پارامتر چولگی و C ماتریس همبستگی فضایی با تابع همبستگی $\rho(\cdot;\varphi)$ در نظر بگیرید. اگر یک تحقق p تایی از میدان تصادفی $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D\}$ دارای توزیع $\mathrm{CSN}_{p,p}(\mu ۱_{\boldsymbol{p}}, \sigma^۲\boldsymbol{C}, \frac{\gamma}{\sigma}\boldsymbol{C}^{-\frac{۱}{۲}}, \nu ۱_{\boldsymbol{p}}, (۱-\gamma^۲)\boldsymbol{I_p})$ باشد، آن‌گاه $\{Z(\boldsymbol{s}); \boldsymbol{s} \in D\}$ یک میدان تصادفی چوله مانا با پارامترهای μ، ν، $\sigma^۲$، γ، و φ است.

پارامتر چولگی در میدان تصادفی FCSN روی میانگین و واریانس میدان تصادفی تاثیری ندارد و این باعث می‌شود که تابع همبستگی در این میدان تصادفی بهتر برآورد شود. در حالی که در میدان تصادفی فضایی چوله مانا تعریف ۳ این ویژگی وجود ندارد و برآورد تابع همبستگی براساس تغییرنگار تجربی به پارامتر چولگی وابسته است.

۳.۱ پیشگویی فضایی بر اساس FCSN

یکی از اهداف در تحلیل داده‌های فضایی، پیشگویی در موقعیت‌های فاقد مشاهده بر اساس مشاهدات است. برای این منظور از تابع درست‌نمایی پیشگوی نیم‌رخی استفاده می‌شود (مارکز و گنزالس، ۲۰۲۲). فرض کنید بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_n$ یک تحقق n تایی از میدان تصادفی چوله منعطف به‌صورت $\boldsymbol{Z}_n = (\boldsymbol{Z}_k^{obs}, \boldsymbol{Z}_{n-k}^{pred})$ تفکیک شده با تابع چگالی FCSN به‌صورت $f_\eta(\boldsymbol{Z}^{obs}, \boldsymbol{Z}^{pred})$ باشد که در آن $\boldsymbol{Z}_k^{obs}$ بردار داده‌های مشاهد شده در k موقعیت فضایی موجود، $\boldsymbol{Z}_{n-k}^{pred}$ بردار داده‌های مشاهده نشده برای پیشگوی در $n-k$ موقعیت فضایی جدید و $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\beta}, \lambda, \sigma, \varphi)$ بردار پارامترهای نامعلوم است. تابع درست‌نمایی پیشگویی به‌صورت

$$\begin{aligned}\ell_{Z^{obs}}(\boldsymbol{Z}^{pred}, \boldsymbol{\eta}) &= f_\eta(\boldsymbol{Z}^{obs}, \boldsymbol{Z}^{pred}) \\ &= ۲^n\phi_n(\boldsymbol{z}_n; \boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau\Sigma_n^{\frac{۱}{۲}}۱_{\boldsymbol{n}}, \sigma^۲\tau^۲\Sigma_n) \\ &\times \Phi_n(\frac{\lambda}{\sigma\tau}\Sigma_n^{-\frac{۱}{۲}}(\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{\mu}) + b\delta\lambda ۱_{\boldsymbol{n}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I_n}),\end{aligned}$$

تعریف می‌شود. که در این حالت علاقه‌مند به تعیین $\boldsymbol{Z}^{pred}$ به‌عنوان پارامتر اصلی در تابع درست‌نمایی هستیم و $\boldsymbol{\eta}$ را به‌عنوان پارامتر مزاحم در نظر می‌گیریم که برای حذف آن از تابع درست‌نمایی پیشگوی نیم‌رخی به‌صورت

$$L_p(\boldsymbol{Z}^{pred}|\boldsymbol{Z}^{obs}) = \ell_{Z^{obs}}(\boldsymbol{Z}^{pred}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{z^{obs}}) = \sup_{\boldsymbol{\eta}} f_\eta(\boldsymbol{Z}^{obs}, \boldsymbol{Z}^{pred}),$$

استفاده می‌کنیم. با استفاده از روش‌های عددی تابع را ماکسیمم می‌کنیم و سپس نقشه پیشگویی روی کل ناحیه فضایی را رسم و تحلیل می‌کنیم.

۳.۲ شبیه‌سازی از میدان تصادفی FCSN

از ترکیب خطی توزیع‌های نرمال و نرمال بریده شده برای شبیه‌سازی از توزیع CSN استفاده می‌شود که این روش مطابق ساختار ارائه شده توزیع CSN توسط گنزالس و همکاران (۲۰۰۴) است. به این صورت که بردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$ دارای توزیع $CSN_{p,q}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, D, \boldsymbol{\nu}, \Delta)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\mu} + (\Sigma^{-۱} + D'\Delta^{-۱}D)^{-\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{W}_۱ + \Sigma D'(\Delta + D\Sigma D')\boldsymbol{W}_۲ \qquad (۲)$$

نوشت، که در آن $\boldsymbol{W}_۱$ یک بردار $p-$بُعدی از توزیع نرمال چند متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{I}_p$ است یعنی $\boldsymbol{W}_۱ \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_p)$ و $\boldsymbol{W}_۲$ یک بردار $q-$بُعدی از توزیع نرمال چند متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس $\Delta + D\Sigma D'$ که در بردار $\boldsymbol{\nu}$ بریده شده است و به‌صورت $\boldsymbol{W}_۲ \sim TN_q(\boldsymbol{0}, \Delta + D\Sigma D'; \boldsymbol{\nu})$ نمایش داده می‌شود. در توزیع CSN پارامترهای $\boldsymbol{\mu}$ و Σ متناظر با پارامتر مکان و مقیاس هستند و پارامترهای D، $\boldsymbol{\nu}$ و Δ پارامترهای چولگی هستند که اندازه و جهت چولگی توزیع را مشخص می‌کنند (کریمی و حسینی ، ۱۴۰۰). D یک ماتریس $p \times q$، Δ یک ماتریس $p \times p$ معین مثبت و $\boldsymbol{\nu} \in R^p$ است.

برای شبیه‌سازی از توزیع FCSN مطابق (۲)، فرض کنید بردار $\boldsymbol{Y}_n$ دارای توزیع $\mathrm{FCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, C_n, \sigma, \lambda)$ باشد. طبق تعریف ۱، $\boldsymbol{Y}_n \sim CSN_{n,n}(\boldsymbol{\mu}_y, \sigma^۲\tau^۲ C_n, \frac{\lambda}{\sigma\tau}C_n^{-\frac{۱}{۲}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$، که در آن $\boldsymbol{\mu}_y = \boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau C_n^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{۱}_n$ است و ترکیب خطی (۲) به‌صورت

$$\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{\mu}_y + \sigma\tau(۱+\lambda^۲)^{-\frac{۱}{۲}}C_n^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{Z}_۱ + \sigma\tau\lambda(۱+\lambda^۲)^{-۱}C_n^{\frac{۱}{۲}}|\boldsymbol{Z}_۲|, \qquad (۳)$$

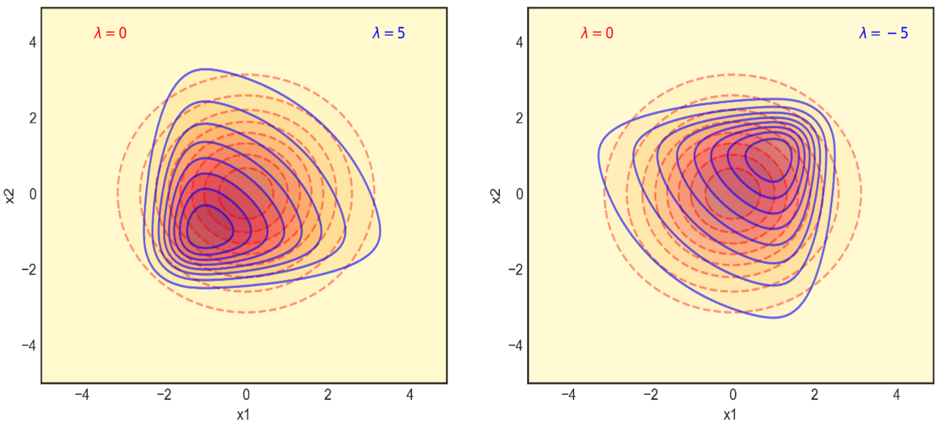
ساده می‌شود، که در آن $\boldsymbol{Z}_۱$ و $\boldsymbol{Z}_۲$ بردارهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. رابطه (۳) یک روش سریع برای تولید نمونه‌های تصادفی از میدان تصادفی FCSN با پارامترهای $\boldsymbol{\mu}$، C_n، σ و λ است. که در آن C_n ماتریس همبستگی فضایی است. برای شبیه‌سازی از میدان تصادفی CSN مانا (کریمی و حسینی ، ۱۴۰۰)، فرض کنید $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع $CSN_{n,n}(\mu\boldsymbol{۱}_n, \sigma^۲\boldsymbol{C}_n, \frac{\gamma}{\sigma}\boldsymbol{C}_n^{-\frac{۱}{۲}}, ۰, (۱-\gamma^۲)\boldsymbol{I}_n)$ باشد. آنگاه رابطه (۲) به‌صورت $\boldsymbol{X} = \mu\boldsymbol{۱}_n + \sigma\sqrt{۱-\gamma^۲}C_n^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{Z}_۱ + \sigma\gamma C_n^{\frac{۱}{۲}}|\boldsymbol{Z}_۲|$ به‌دست می‌آید، که در آن $\boldsymbol{Z}_۱, Z_۲ \sim N_n(۰, \boldsymbol{I}_n)$.

مثال ۱. فرض کنید بردار تصادفی دو بُعدی $\boldsymbol{Y}$ دارای توزیع FCSN به‌صورت

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_۱ \\ Y_۲ \end{bmatrix} \sim \mathrm{FCSN}_۲(\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \sigma^۲ = ۱/۵, \lambda).$$

باشد. نمودارهای تراز بردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$ برای مقادیر مختلف $\lambda = ۰, ۵, -۵$ در شکل ۱ نحوه تغییرات نمودار توزیع با تغییر پارامتر چولگی λ را نشان می‌دهد. وقتی $\lambda = ۰$ است سطح مقطع‌های دایره‌ای شکل و عدم چولگی را

نشان می‌دهد، $\lambda = ۵$ چوله به راست و $\lambda = -۵$ چوله به چپ را نشان می‌دهد. شکل ۲ نمودار تراز توزیع FCSN به همراه نمونه‌های تولید شده و هیستوگرام توزیع حاشیه‌ای $Y_۱$ و $Y_۲$ را برای $\lambda = ۵$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود نمونه‌های تولید شده سطح مقطع ترازهای چگالی واقعی توزیع FCSN شکل ۲ـ الف را پوشش می‌دهد. همچنین شکل ۲ـ ب برآورد چگالی توزیع براساس نمونه‌های تولید شده را نشان می‌هد که با چگالی واقعی شکل ۲ـ الف مطابقت دارد.



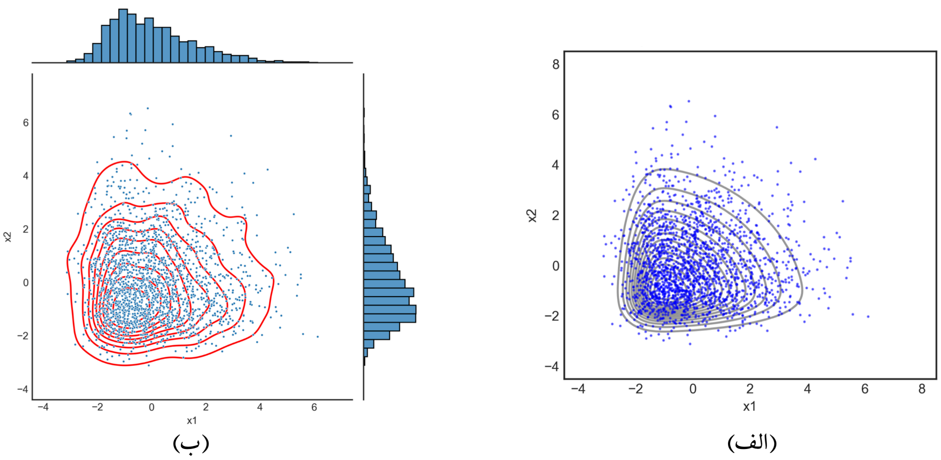
(ب) (الف)

شکل ۱. نمودارهای تراز توزیع FCSN دو بعدی با پارامتر چولگی الف- $\lambda = ۵$ و ب- $\lambda = -۵$

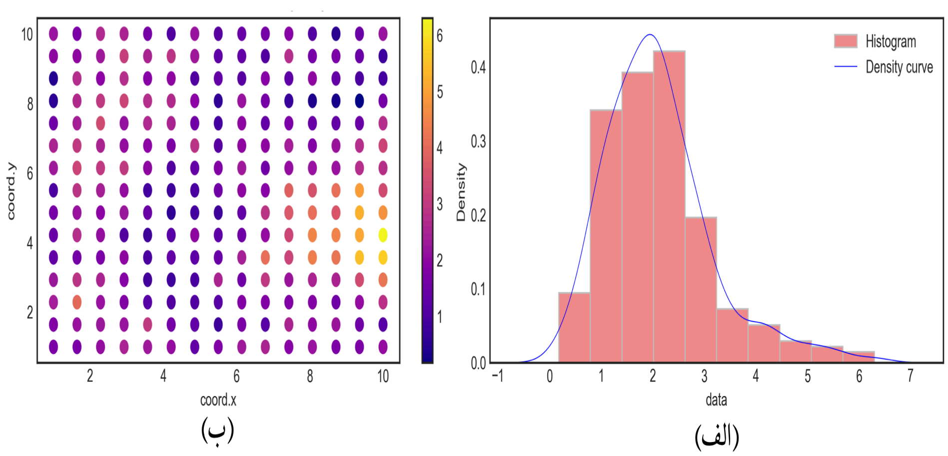
۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، مطالعه شبیه‌سازی از میدان تصادفی فضایی چوله منعطف در شبکه‌های منظم با ابعاد مختلف با تابع همبستگی فضایی نمایی برای شناسایی ساختار همبستگی فضایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی FCSN محاسبه و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. فرض کنید بردار $\boldsymbol{Z}_n$ یک تحقق به حجم n از میدان تصادفی $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FCSN}_n(X\beta, \Sigma_n, \sigma, \lambda)$ با پارامترهای معلوم $\beta_۰ = ۱, \beta_۱ = ۲, \sigma = ۲, \varphi = ۵,\ \lambda = ۲$ باشد. که در آن دامنه فضایی را یک شبکه منظم ۲۰×۲۰ به‌صورت

$$D = \{ \boldsymbol{s}_i = (x_i, y_i); i = ۱, \ldots, ۴۰۰, (x_i, y_i) \in \{۱, \ldots, ۲۰\} \times \{۱, \ldots, ۲۰\} \}$$



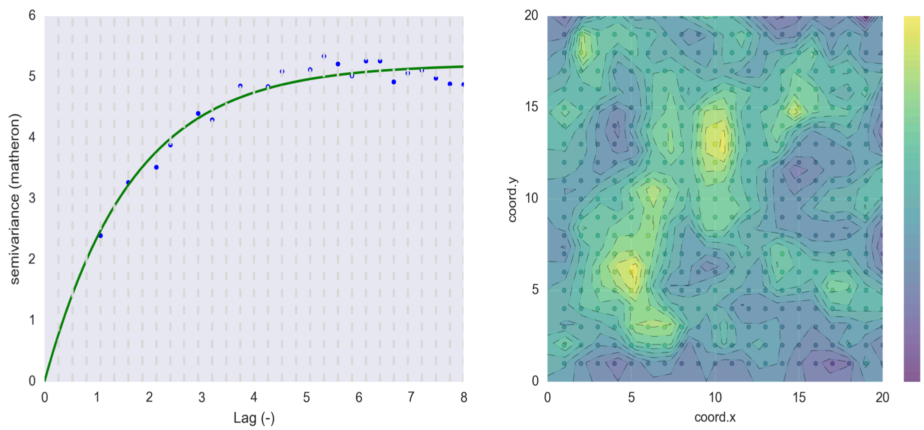
شکل ۲. الف- نمودار تراز چگالی واقعی توزیع FCSN به همراه نمونه‌های تولید شده. ب- برآورد چگالی توزیع FCSN براساس نمونه‌های تولید شده و هیستوگرام توزیع‌های حاشیه‌ای



شکل ۳. الف- هیستوگرام داده‌های تولید شده، ب- موقعیت داده‌ها در شبکه ۲۰ × ۲۰.

و مولفه iام میانگین میدان تصادفی به‌صورت $\beta_0 + \beta_1 x_i$ در نظر گرفته شده است. در این‌جا تابع همبستگی نمایی همسانگرد به‌صورت $\rho(h) = e^{-\frac{h}{\varphi}}$ در نظر گرفته شده است. این تابع برای ساخت ماتریس Σ_n استفاده می‌شود که در آن h فاصله اقلیدسی بین دو موقعیت در دامنه فضایی است. شکل ۳ تحقق Z از میدان تصادفی چوله منعطف

را نمایش می‌دهد. در شکل ۳ــب موقعیت داده‌های تولید شده با تفکیک رنگ برای مقدار داده‌ها رسم شده است و



(ب) (الف)

شکل ۴. الف– نمودار تراز و پیشگویی فضایی داده‌ها، ب– تغییرنگار تجربی و مدل نمایی برازش شده.

هیستوگرام داده‌ها در شکل ۳ــالف چولگی به راست داده‌ها را نمایش می‌دهد.

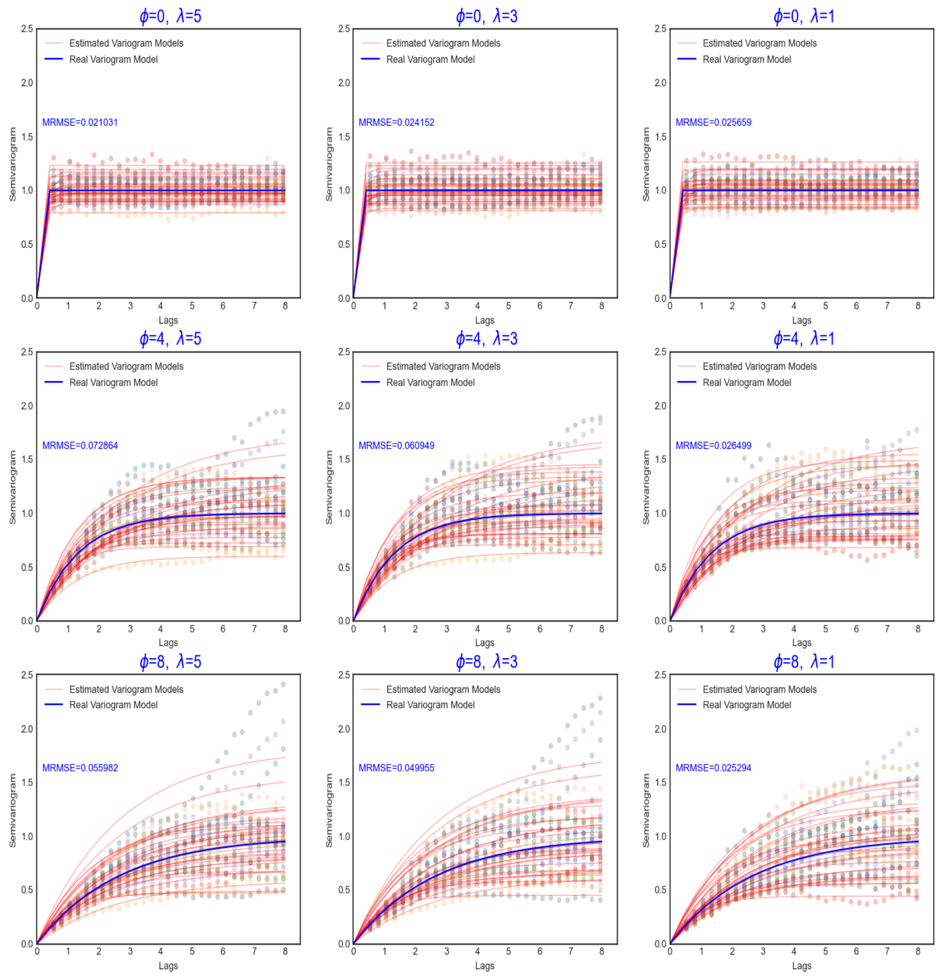
یک راه تشخیص مدل تغییرنگار داده‌های فضایی استفاده از تغییرنگار تجربی و رسم آن است که براساس آن مدل مناسب برازش شود. تغییرنگار تجربی داده‌های فضایی تولید شده با توجه به برآورد ارائه شده توسط کرسی (۱۹۹۳) محاسبه و در شکل ۴ــب رسم شده است. به روش کمترین توان‌های دوم خطاها یک مدل نمایی مناسب برازش به تغییرنگار تجربی، تشخیص داده شد. سپس با در نظر گرفتن مدل همبستگی نمایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای میدان تصادفی بر اساس درستنمایی نیمرخی محاسبه و در جدول ۱ خلاصه شده است. همان‌طور که

جدول ۱. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای میدان تصادفی FCSN برای داده‌های فضایی تولید شده در شبکه ۲۰×۲۰،

پارامتر	مقدار واقعی	برآورد	انحراف استاندارد	چندک ۰٫۰۲۵	چندک ۰٫۹۷۵
β_0	۱	۰٫۹۶۳	۰٫۶۴۸۵	۰٫۳۳	۲٫۲۶
β_1	۲	۲٫۱۰۳	۰٫۵۲۶۷	۱٫۰۵	۳٫۱۶
σ	۲	۱٫۹۸۹	۰٫۴۱۱۷	۱٫۱۷	۲٫۸۱
φ	۵	۴٫۴۰۸	۱٫۷۴۷۱	۰٫۷۲	۸٫۰۹
λ	۲	۱٫۰۹۹	۱٫۲۰۸	−۱٫۰۳	۳٫۵۱

ملاحظه می‌شود پارامترهای β_0، β_1 و σ با دقت بالایی برآورد شده‌اند، اما برآورد پارامترهای φ و λ با توجه به مقدار انحراف معیار و فاصله اطمینان ۹۵٪ از دقت کمتری برخوردار هستند. سپس پیشگویی فضایی در این شبکه به‌دست آورده‌ایم و نقشه پیشگویی فضایی روی کل ناحیه فضایی با نمودار تراز داده‌های فضایی شبیه‌سازی شده در شکل ۴ــالف رسم شده‌اند. این شکل نحوه همبستگی داده‌ها به‌صورت رنگ‌بندی‌های متفاوت نشان می‌دهد. برای

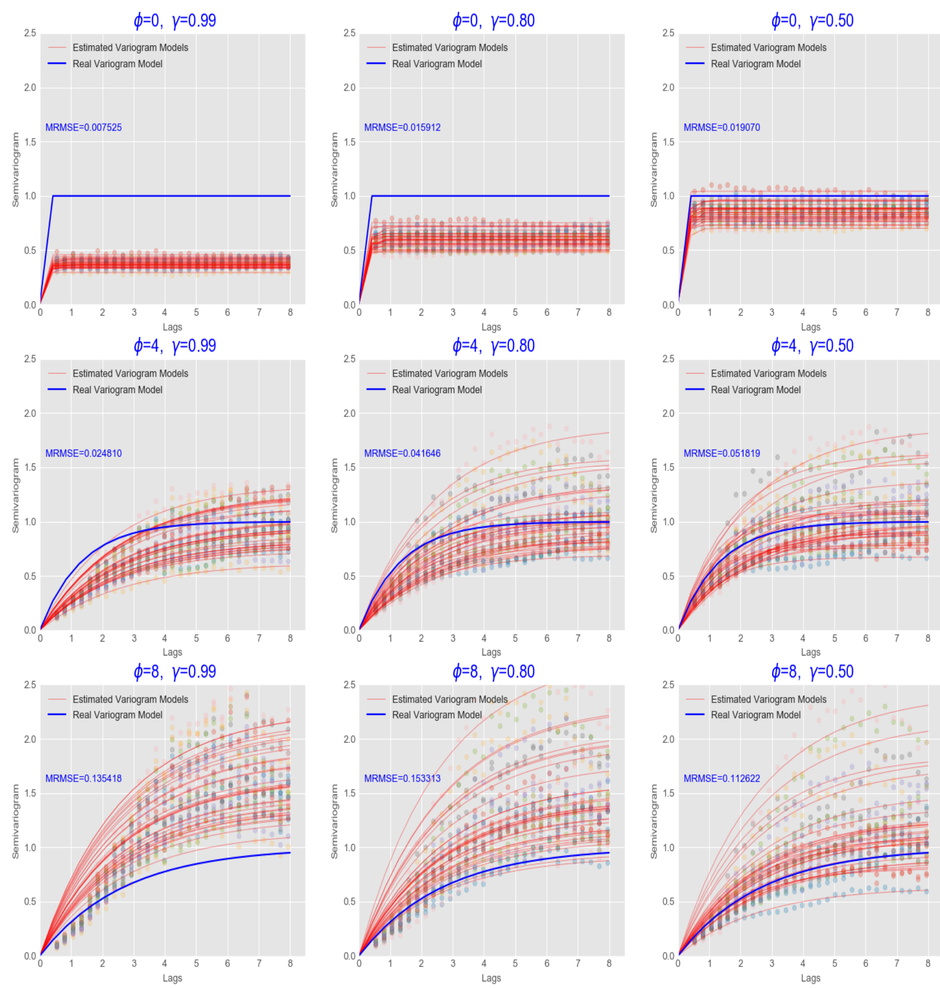
بررسی بیشتر در مورد شناسایی پذیر بودن پارامترهای میدان تصادفی چوله منعطف در ادامه شبیه‌سازی‌های متعددی با پارامترهای مختلف انجام می‌شود.



شکل ۵. تغییرنگار تجربی و مدل نمایی برازش شده برای داده شبیه‌سازی شده از میدان تصادفی FCSN

۴.۱ تاثیر پارامترهای چولگی و همبستگی فضایی بر تغییرنگار تجربی

ابتدا تاثیر پارامترهای همبستگی فضایی φ و پارامتر چولگی بر ساختار تغییرنگار تجربی و تشخیص مدل همبستگی فضایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای دو میدان تصادفی چوله منعطف



شکل ۶. تغییرنگار تجربی و مدل نمایی برازش شده برای داده شبیه‌سازی شده از میدان تصادفی FCSN

و مانا تحلیل می‌شوند. در سه حالت چولگی صفر $\lambda = ۰$، متوسط $\lambda = ۱$ و زیاد $\lambda = ۵$ با مقادیر مختلف همبستگی فضایی $\varphi = ۰, ۴, ۸$ (از همبستگی کم به زیاد) برای ۵۰ مجموعه داده شبیه‌سازی در شبکه‌های منظم از میدان تصادفی FCSN صورت گرفت. نتایج در شکل ۵ نشان می‌دهد که با تغییر میزان چولگی تغییرنگار تجربی به‌درستی مدل تغییرنگار واقعی را برازش می‌کند. در واقع تغییرات پارامتر λ تاثیری بر تغییرنگار تجربی ندارد که این مورد در میدان تصادفی فضایی چوله مانای معرفی شده توسط کریمی و حسینی (۱۴۰۰) وجود نداشت. یعنی در میدان تصادفی فضایی چوله مانای تعریف ۳ افزایش میزان چولگی باعث عدم شناسایی صحیح مدل واریوگرام واقعی

توسط واریوگرام تجربی می‌شود. در شکل ۶ نمودارهای ستون اول نشان می‌دهند که وقتی میزان چولگی زیاد است ($\gamma =$ ۰٫۹۹) تغییرنگار تجربی مدل واقعی را به‌درستی شناسایی نمی‌کند، اما در نمودارهای ستون سوم بخاطر چولگی ضعیف ($\gamma =$ ۰٫۵) تغییرنگار تجربی، مدل واقعی را به خوبی پوشش می‌دهد. در واقع در میدان تصادفی چوله مانا پارامتر چولگی روی تغییرنگار تجربی تاثیرگذار است. لازم به ذکر است که این ویژگی در شناسایی مدل تغییرنگار فضایی مناسب در داده‌های واقعی کمک شایانی می‌کند، این یک مزیت مهم برای این میدان تصادفی فضایی FCSN در مقابل میدان تصادفی فضایی چوله مانا است.

۴.۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها

در این زیر بخش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی فضایی چوله را در دامنه‌های فضایی مختلف محاسبه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در میدان تصادفی FCSN بدون از دست دادن کلیت مساله پارامتر میانگین را به‌صورت $\mu 1_n$ در نظر گرفته‌ایم که مشابه تعریف میدان تصادفی چوله مانا شود. برای ارزیابی برآورد پارامترها ۱۰۰ مجموعه داده از میدان‌های تصادفی فضایی پیشنهادی شبیه‌سازی شد و از ملاک مجذور میانگین توان دوم خطاها (RMSE) به‌صورت $\mathrm{RMSE}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}$ استفاده شده است. که در آن m تعداد مجموعه داده‌های شبیه‌سازی و $\hat{\theta}_i$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی برای مجموعه داده iام است. میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و RMSE پارامترها برای میدان تصادفی FCSN و چوله مانا به ترتیب در جداول ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. به‌طورکلی نتایج درست‌نمایی در میدان تصادفی FCSN برای دو پارامتر μ و σ از دقت مناسبی برخوردار هستند، اما برآورد پارامترهای φ و λ دقت مناسبی ندارند. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش بُعد دامنه فضایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها به‌طور متوسط بهبود می‌یابد و برای پارامترهای μ و σ حتی در دامنه‌های فضایی کوچک برآورد قابل قبولی به‌دست آمده است. با افزایش مقدار پارامتر همبستگی فضایی φ برآورد پارامترها تحت تاثیر قرار گرفته و دقت برآورد آن‌ها کاهش می‌یابد.

در میدان تصادفی چوله مانا، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر μ با افزایش مقدار پارامتر همبستگی به‌طور متوسط خطای آن در همه ابعاد دامنه فضایی افزایش می‌یابد، زیرا در این میدان تصادفی پارامتر همبستگی فضایی و میانگین آن به هم وابسته‌اند و این وابستگی روی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی تاثیرگذار است. پارامتر چولگی γ در این میدان تصادفی بهتر از پارامتر چولگی λ میدان تصادفی FCSN برآورد شده است. در واقع چون پارامتر γ محدود است ($|\gamma| <$ ۱) و این محدودیت باعث شده برآورد ماکسیمم درست‌نمایی آن نسبتا بهتر از پارامتر λ باشد. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر چولگی در توزیع‌های چوله دارای مشکلاتی است (آزالینی و دالاواله، ۱۹۹۶) هرچند می‌توان با بازپارامتری کردن آن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی را بهبود بخشید. در جدول ۳ نیز با افزایش ابعاد دامنه فضایی برآورد پارامترها به‌طور متوسط بهبود می‌یابد. سرعت محاسبات در دو میدان تصادفی مشابه است. همه محاسبات در نرم‌افزار Python3 انجام شده است و برای بهینه‌سازی الگوریتم‌های ماکسیمم‌سازی از روش عددی نلدر و مید (Nelder and Mead) استفاده شده است.

جدول ۲. میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و RMSE پارامترهای میدان تصادفی FCSN

پارامتر	واقعی	۵ × ۵		۱۰ × ۱۰		۲۰ × ۲۰	
		برآورد	RMSE	برآورد	RMSE	برآورد	RMSE
μ	۲	۱٫۹۰۴	۰٫۳۵۴۴	۲٫۰۱۶	۰٫۱۵۰۷	۲٫۰۶۴	۰٫۱۰۸۲
σ	۲	۱٫۸۱۲	۰٫۳۱۹۷	۱٫۹۵۳	۰٫۱۷۰۳	۱٫۹۴۵	۰٫۰۹۹۵
φ	۰٫۵	۰٫۴۹۸	۰٫۵۴۰۶	۰٫۱۲۷	۰٫۳۷۵۰	۰٫۲۳۹	۰٫۳۵۷۴
λ	۲٫۵	۰٫۰۱۲	۲٫۰۲۳۱	۰٫۰۲۵	۲٫۰۱۲۱	۲٫۰۹۹	۲٫۰۱۹۱
μ	۲	۱٫۸۲۹	۰٫۸۰۶۱	۱٫۹۶۳	۰٫۶۱۶۴	۲٫۱۰۲	۰٫۱۶۹۸
σ	۲	۱٫۶۲۳	۰٫۴۳۳۹	۱٫۹۸۸	۰٫۳۹۰۷	۱٫۹۱۴	۰٫۱۵۴۱
φ	۵	۳٫۵۱۵	۲٫۶۴۷۰	۵٫۶۴۹	۱٫۰۲۵	۴٫۵۰۸	۰٫۸۳۲۸
λ	۲٫۵	۰٫۰۰۱	۲٫۶۵۱۲	۰٫۰۳۱	۲٫۵۳۱۰	۰٫۱۰۸	۲٫۴۰۹۲
μ	۲	۱٫۷۵۱	۱٫۰۹۱۰	۲٫۱۱۵	۰٫۷۸۱۵	۲٫۱۵۲	۰٫۲۵۸۲
σ	۲	۱٫۴۳۹	۰٫۶۵۲۸	۱٫۷۵۸	۰٫۳۷۶۴	۱٫۸۰۹	۰٫۲۴۹۴
φ	۱۰	۶٫۲۸۳	۶٫۶۷۷۵	۸٫۱۰۹	۳٫۹۴۷۱	۸٫۹۷۱	۲٫۴۰۴۱
λ	۲٫۵	۰٫۰۲۱	۲٫۴۳۲۲	۰٫۱۸۹	۲٫۳۳۲۰	۰٫۲۸۷	۲٫۲۹۱۳

جدول ۳. میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و RMSE پارامترهای میدان تصادفی چوله مانا

پارامتر	واقعی	۵ × ۵		۱۰ × ۱۰		۲۰ × ۲۰	
		برآورد	RMSE	برآورد	RMSE	برآورد	RMSE
μ	۲	۱٫۷۹۱	۰٫۹۳۱۲	۱٫۸۷۳	۰٫۸۵۰۱	۱٫۹۹۱	۰٫۷۳۲۲
σ	۲	۱٫۷۰۱	۰٫۳۲۱۵	۱٫۸۵۰	۰٫۲۱۵۱	۱٫۹۵۱	۰٫۱۳۵۱
φ	۰٫۵	۰٫۹۴۵	۱٫۲۴۸۲	۰٫۷۵۱	۱٫۱۰۲۴	۰٫۷۲۳	۰٫۲۱۸۱
γ	۰٫۸۵	۰٫۹۸۶	۰٫۲۸۳۲	۰٫۹۶۰	۰٫۱۴۴۰	۰٫۹۵۲	۰٫۱۳۹
μ	۲	۱٫۸۸۲	۰٫۹۵۵۲	۲٫۲۴۰	۰٫۷۳۳۲	۱٫۷۸۲	۰٫۶۱۵۲
σ	۲	۱٫۷۷۲	۰٫۴۰۳۲	۱٫۹۴۲	۰٫۱۴۵۱	۱٫۹۶۱	۰٫۰۴۳۹
φ	۵	۳٫۳۰۱	۲٫۱۵۱۲	۴٫۴۳۸	۱٫۵۹۹۰	۵٫۲۷۹	۰٫۶۹۴۰
γ	۲٫۵	۰٫۹۸۱	۱٫۲۰۴۳	۰٫۹۶۷	۱٫۱۴۷۹	۰٫۹۸۴	۰٫۲۸۲۱
μ	۲	۲٫۳۱۹	۱٫۳۰۲۰	۲٫۳۲۱	۱٫۲۳۰۴	۱٫۶۸۴	۰٫۷۱۳۴
σ	۲	۱٫۸۲۱	۰٫۳۲۰۱	۱٫۹۱۵	۰٫۱۸۸۷	۲٫۰۲	۰٫۰۳۱۵
φ	۱۰	۸٫۵۰۸	۴٫۱۲۵۳	۹٫۱۰۹	۳٫۳۹۶۲	۱۰٫۶۲۲	۰٫۷۸۰۹
γ	۲٫۵	۰٫۹۸۵	۰٫۱۴۱۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۴۱۲	۰٫۹۹۱	۰٫۱۴۴۹

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله میدان تصادفی فضایی چوله منعطف بر اساس توزیع FCSN و میدان تصادفی فضایی چوله مانا برای مدل‌بندی داده‌های فضایی چوله ارائه شد. ویژگی‌های مفید این میدان‌های تصادفی مورد بررسی قرار گرفت و نشان دادیم که بر خلاف میدان‌های تصادفی چوله ارائه شده در برخی مقالات دارای شرایط وجود یک میدان تصادفی معتبر براساس قضیه بسط کلموگروف است. به‌علاوه پارامتر چولگی در این میدان تصادفی روی گشتاورهای اول و دوم میدان تاثیری ندارد و در مطالعه شبیه‌سازی مشاهده شد که این پارامتر روی برازش تغییرنگار تاثیری ندارد. که این مورد

در میدان تصادفی فضایی چوله مانای معرفی شده توسط حسینی و کریمی (۲۰۲۱) دیده نمی‌شود. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای میدان‌های تصادفی چوله نیز در یک مطالعه شبیه‌سازی با ابعاد مختلف دامنه فضایی مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفت که پارامتر میانگین در میدان تصادفی FCSN حتی در ابعاد پایین هم تحت تاثیر افزایش پارامتر همبستگی فضایی قرار نگرفت و خطای برآورد کمتری نسبت به میدان تصادفی چوله مانا دارد. اما پارامتر چولگی در میدان تصادفی FCSN دارای خطای برآورد بیشتری نسبت به میدان تصادفی رقیب است. هرچند به‌طور کلی ماکسیمم سازی تابع درست‌نمایی برحسب پارامتر چولگی در توزیع‌های چوله دارای مشکلاتی است. به عنوان پیشنهاد می‌توان روش‌های بیزی و بیز تقریبی را برای بهبود برآورد پارامترها با توجه به مشکلاتی که در ماکسیمم‌سازی تابع درست‌نمایی نیم‌رخی وجود دارد، استفاده کرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی‌ها و پیشنهادهای مفید و موثر داوران گرانقدر، رهنمودهای ارزنده سردبیر محترم، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله علوم آماری که باعث بهبود سطح کیفی مقاله شده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

محمدزاده، م. (۱۳۹۸)، آمار فضایی و کاربردهای آن، چاپ سوم، مرکز نشر آثار علمی دانشگاه تربیت مدرس، تهران،

کریمی، الف. و حسینی، ف. (۱۴۰۰)، معرفی یک میدان تصادفی مانای چوله گاوسی، مجله علوم آماری، ۱۵(۲)، ۵۶۶-۵۴۹.

Allard, D. and Naveau, P. (2007), A New Spatial Skew-Normal Random Field Model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 1821-1834.

Azzalini, A. and Dalla-Valle, A. (1996), The Multivariate Skew-Normal Distribution, *Biometrika*, **83**, 715–726.

Cressie, N. (1993), *Statistics for Spatial Data*, Wiley, New York.

Gonzalez-Farias, G., Dominguez-Molina, A. and Gupta, A. K. (2004), The Closed Skew Normal Distribution. In: *Genton M. G., ed. Skew-Elliptical Distributions and Their Applications: A Journey Beyond Normality, Boca Raton, FL: Chapman and Hall CRC,* 2542.

Hosseini, F. and Karimi, O., (2021), Approximate Pairwise Likelihood Inference in SGLM Models with Skew Normal Latent Variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **398**, 113692.

Karimi, O. and Mohammadzadeh, M. (2011), Bayesian Spatial Prediction for Discrete Closed Skew Gaussian Random Field, *Mathematical Geosciences*, **43**, 565–582

Karimi, O., (2023). A Hamiltonian Monte Carlo EM Algorithm for Generalized Linear Mixed Models with Spatial Skew Latent Variables. *Statistical Paper*, https://doi.org/10.1007/s00362-023-01419-y

Mahmoudian, B. (2018), On the Existence of some Skew-Gaussian Random Field Models, *Statistics and Probability Letters*, **137**, 331-335.

Márquez-Urbina, O.U. and González-Farías, G. (2022), A Flexible Special Case of the CSN for Spatial Modeling and Prediction, *Spatial Statistics*, **47**, 100556.

Minozzo, M. and Ferracuti, L. (2012), On the Existence of some Skew-Normal Stationary Processes. *Chilean Journal of Statistics*, **3**(2), 157–170.

Rimstad, K. and Omre, H. (2014), Skew-Gaussian Random Fields, *Spatial Statistics*, **10**, 43-62.