



Application of Periodically Correlated Spatial Processes and Spatial Periodogram in Image Processing

Amiri, B. , Nasirzadeh, R. 

Department of Statistics, Faculty of Science, Fasa University, Fasa, Iran.

Corresponding author: R. Nasirzadeh, nasirzadeh.roya@fasau.ac.ir

Received: 20/7/2023 Revised: 19/9/2023 Accepted and Published Online: 21/9/2023.

Introduction

Regarding spatial data analysis, detecting hidden dependencies in data observations is crucial. The second-order spatial process that exhibits periodic rhythm in the structure is called periodically correlated spatial process (PCSP), which necessitates explicitly the mean and covariance functions be periodic with the same periods. PCSP has many applications in various fields since it can be considered an intermediary between stationary and non-stationary spatial processes, including a large class of stationary and non-stationary spatial processes. As one of the PCSP applications, image processing can be used to analyze images with an alternating structure. To this end, appropriate statistics should be used to estimate spectral density. First, this article introduces the periodic correlated spatial processes and their features. Then, the spatial periodogram is presented as a tool for detecting the periodicity of data and determining the value of the periodic period. In the following, the accuracy of spatial periodicity in detecting the periodicity of data is investigated through simulation. In the end, its application is examined using authentic images.

Material and Methods

A second order spatial process $\xi = \{\xi_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2\}$ is called periodically correlated spatial process (PCSP) if there exists $\mathbf{T} = (T_1, T_2) \in \mathbb{N}^2$, such that for any $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ and $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$, its autocovariance function follow the equation $R_{\xi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = R_{\xi}(\mathbf{t} + (n_1 T_1, n_2 T_2), \mathbf{s} + (n_1 T_1, n_2 T_2))$. If T_1 and T_2 are the smallest natural numbers in this equation, then \mathbf{T} is called period of the spatial process ξ . If ξ is a PCSP with period \mathbf{T} , then f_{ξ} , spec-

tral density function of the spatial process ξ , is supported by $\cup_{k \in D_{\mathbf{T}}} d_{\mathbf{k}}$, where $d_{\mathbf{k}} = \{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta} \in [0, 2\pi)^2, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta} = \frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{T}} = (\frac{2\pi k_1}{T_1}, \frac{2\pi k_2}{T_2})\}$ and $D_{\mathbf{T}} = \{(i, j) : i = 0, \dots, T_1 - 1, j = 0, \dots, T_2 - 1\}$. For some arbitrary spatial process ξ and $\boldsymbol{\lambda} \in [0, 2\pi)^2$, the finite Fourier transform (FFT) of the finite segment $\{\xi_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in D_{\mathbf{N}}\}$ is defined as $d_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathbf{N}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{t} \in D_{\mathbf{N}}} X_{\mathbf{t}} e^{i\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda} \rangle}$. Also, spatial periodogram and two-dimensional spatial periodogram of the finite segment $\{\xi_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in D_{\mathbf{N}}\}$ are defined as $I_{\xi}(\boldsymbol{\lambda}) = d_{\xi}(\boldsymbol{\lambda}) \overline{d_{\xi}(\boldsymbol{\lambda})}$ and $J_{\xi}(\boldsymbol{\lambda}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = d_{\xi}(\boldsymbol{\lambda}) \overline{d_{\xi}(\hat{\boldsymbol{\lambda}})}$. Considering the above definition, J_{ξ} is an asymptotically unbiased estimator for f_{ξ} , also, can be said that J_{ξ} is near zero everywhere expect $\cup_{k \in D_{\mathbf{T}}} d_{\mathbf{k}}$ and $I_{\xi}(\frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{N}}) = c |J_{\xi}(\mathbf{0}, \frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{N}})|^2$ where c is positive. It is clear if ξ is a PCSP with period \mathbf{T} and we have \mathbf{N} observation from this process so $I_{\xi}(\frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{N}})$, is positive for any $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{N}}$ multiple of $\frac{1}{\mathbf{T}}$ and near zero for another.

Results and Discussion

Concerning the present study's primary objective, recognizing the data's periodicity and determining their periodicity, periodic photos are considered processes, and their periodogram is depicted. If the figures are observed meticulously, the presence of peaks indicates the process's periodicity and the peak's location determines the period's value.

Conclusion

There are too many periodic images, while the main objective of image processing is to recognize their periodicity and the type of their period. One of the cases that should be considered is the Moire effect. The moire effect mostly happens in images. Their data periodically correlates with spatial processes, so if we are willing to erase that problem, we should notice their period. One method to specify the period of these images is the spatial periodogram, which was elaborated in the present article.

Keywords: Image processing, Periodically Correlated Spatial Process, Spatial Process, Spatial periodogram.

Mathematics Subject Classification (2010): 62H11 , 94A08.



کاربرد فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای و دوره‌نگار فضایی در پردازش تصویر

بهنام امیری، رویا نصیرزاده

فسا، دانشگاه فسا، دانشکده علوم، بخش آمار

نویسنده مسئول: رویا نصیرزاده، nasirzadeh.roya@fasau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۲۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۲۸ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۶/۳۰

چکیده: فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای از جمله فرآیندهای پرکاربرد در تحلیل داده‌های فضایی هستند، که در پردازش و تحلیل تصاویر دوره‌ای کاربرد دارند. در جهت تحلیل این نوع داده‌ها، در مرحله اول می‌بایست به تشخیص دوره‌ای بودن و تعیین مقدار دوره تناوب داده‌ها پرداخت. در این مقاله، ابتدا به معرفی فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای و ویژگی‌های آنها پرداخته، سپس دوره‌نگار فضایی، به عنوان ابزاری برای تشخیص دوره‌ای بودن داده‌ها و تعیین مقدار دوره تناوب، معرفی می‌گردد و به بیان ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. در نهایت نحوه استفاده از دوره‌نگار فضایی در پردازش تصاویر دوره‌ای و تشخیص دوره‌ای بودن آن‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: پردازش تصویر، دوره‌نگار فضایی، فرآیند فضایی همبسته دوره‌ای.
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62H11، 94A08.

۱ مقدمه

فرآیندهای همبسته دوره‌ای، در طیف وسیعی از حوزه‌های تحقیقاتی مانند اقتصاد، هواشناسی، ارتباطات و آب و هوا مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک فرآیند مرتبه دوم را فرآیند همبسته دوره‌ای گویند، هرگاه تابع میانگین و تابع کواریانس آن متناوب بوده و دوره تناوب هر دو یکسان باشند. برای اولین بار سری‌های زمانی همبسته دوره‌ای توسط **گلادیشف (۱۹۶۱)** معرفی شد. بعد از **گلادیشف (۱۹۶۱)**، کارهای زیادی بر روی سری‌های زمانی همبسته دوره‌ای انجام گرفت. از آن جمله می‌توان به کارهای **آنتونی (۲۰۰۹)**، **دهای و همکاران (۲۰۱۴)**،



حقیقین و همکاران (۲۰۱۴)، سلطانی و شیشه‌بر (۲۰۰۷)، نعمت‌اللهی و راو (۲۰۰۵)، هارد و همکاران (۲۰۰۴)، سلطانی و شیشه‌بر (۱۹۹۸)، هارد (۱۹۹۵)، کن و مان‌سان (۲۰۲۳) و جاورسکی و همکاران (۲۰۲۲) اشاره کرد که مقالات تحقیقاتی ارزشمندی در این زمینه هستند. این فرآیندها دارای کاربردهای زیادی در حیطه‌های مختلف مهندسی شامل پردازش تصویر، انرژی تجدیدپذیر و الکترونیک هستند که از آن جمله می‌توان به فام و همکاران (۲۰۲۲)، گاراک یاراق و شاه‌طالبی (۲۰۲۲)، فریز و شریاک (۲۰۲۳)، ناپلیتانو (۲۰۲۲) و وانگ و همکاران (۲۰۲۲) اشاره کرد. اکثر تحقیقات انجام شده در این حیطه بر روی سری‌های زمانی همبسته دوره‌ای انجام شده و به نسبت آن، تحقیقات کمتری بر روی فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای، که در این مقاله به بررسی آن پرداخته می‌شود، صورت گرفته است. از جمله مطالعات در زمینه فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای، رامیرز و همکاران (۲۰۱۰) و داس و همکاران (۲۰۲۳) هستند. می‌توان گفت که فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای، PCSP^۱، اولین قدم برای پر کردن شکاف بین فرآیندهای فضایی مانا و فرآیندهای فضایی غیرمانا هستند.

دو رویکرد رایج در بررسی فرآیندهای فضایی وجود دارد. تحلیل در حوزه مکان و تحلیل در حوزه فرکانس، که مقاله حاضر در حوزه فرکانس است. ساختار وابستگی در حوزه مکان توسط تابع خودهمبستگی مدل‌سازی می‌شود، در حالی که در حوزه فرکانس، توسط تابع چگالی طیفی مشخص می‌شود. بنابراین هر چه اطلاعات بیشتری در مورد تابع چگالی طیفی یک فرآیند وجود داشته باشد، ویژگی آن فرآیند آشکارتر بوده و می‌توان در تحلیل فرآیند بهتر عمل کرد. فرآیندهای فضایی یکی از پرکاربردترین روش‌های تحلیل داده در حیطه‌های گوناگون بوده و در اکثر زمینه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از پرکاربردترین و مهمترین زمینه‌های استفاده از فرآیندهای فضایی در علم داده، پردازش تصویر است.

در پردازش تصویر، تصاویری وجود دارد که به صورت دوره‌ای با هم ارتباط دارند. بنابراین در تحلیل آن‌ها، می‌توان از PCSP استفاده کرد. در این نوع تصاویر، اولین و مهمترین قدم، تشخیص دوره‌ای بودن فرآیند و سپس تعیین دوره تناوب آن است. در این مقاله، چگونگی تعیین دوره تصاویر دوره‌ای، با استفاده از PCSP بررسی خواهد شد. شیشه‌بر و امیری (۲۰۱۹) برخی از خصوصیات PCSP را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج آن‌ها می‌تواند در تشخیص دوره تناوب فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای مفید باشد. در این مقاله از نتایج شیشه‌بر و امیری (۲۰۱۹)، برای تشخیص دوره تناوب تصاویر دوره‌ای استفاده می‌شود. در مقاله شیشه‌بر و امیری (۲۰۱۹)، دوره‌نگار به صورت یک ماتریس تعریف شده و تمرکز مقاله بر روی ویژگی‌های تئوریک دوره‌نگار بوده است. در حالی که، در این مقاله دوره‌نگار یکپارچه شده و به صورت یک تابع دو متغیره درآمده تا بتوان نمودار سه بعدی آن را رسم نمود و از آن برای تحلیل و بررسی تصاویر استفاده کرد.

¹Periodically Correlated Spatial Processes

۲ فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای

فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) فضای احتمال و $L_T(P)$ مجموعه‌ای از توابع اندازه‌پذیر در (Ω, \mathcal{F}, P) با میانگین صفر و گشتاور مرتبه دوم متناهی و $\mathbf{X} = \{X_t : t \in \mathbb{Z}^2, X_t \in L_T(P)\}$ باشد. به چنین مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی، فرآیند فضایی مرتبه دوم می‌گویند. تابع اتوکواریانس \mathbf{X} را با نماد $R_{\mathbf{X}}$ ، نشان داده و برای هر $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ ، به صورت $R_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = EX_t \overline{X_s} - EX_t \overline{EX_s}$ ، تعریف می‌شود. همچنین فرض کنید $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ و $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ در اینجا نماد $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ برای زمانی که هر دو مقدار t_1 و t_2 برابر صفر باشند و نماد $\mathbf{1} = \mathbf{1}$ برای زمانی که هر دو مقدار t_1 و t_2 برابر یک باشند، استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که در این مقاله برای ساده‌کردن فرمول‌ها از نمادهای $\mathbf{s} \odot \mathbf{t} = (s_1 t_1, s_2 t_2)$ ، $\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}} = (\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2})$ ، $|\mathbf{t}| = t_1 t_2$ ، $\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle = s_1 t_1 + s_2 t_2$ ، $\mathbf{s} < (\leq) \mathbf{t}$ ، اگر $s_1 < (\leq) t_1$ ، $s_2 < (\leq) t_2$ ، $[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = [s_1, t_1] \times [s_2, t_2]$ استفاده می‌شود.

تعریف ۱. یک فرآیند فضایی مرتبه دوم $\{\xi_t : t \in \mathbb{Z}^2, \xi_t \in L_T(P)\}$ را فرآیند فضایی همبسته دوره‌ای (PCSP) می‌نامند، اگر $\mathbf{T} = (T_1, T_2) \in \mathbb{N}^2$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ و $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$ رابطه $R_{\xi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = R_{\xi}(\mathbf{t} + \mathbf{n} \odot \mathbf{T}, \mathbf{s} + \mathbf{n} \odot \mathbf{T})$ برقرار باشد. اگر T_1 و T_2 کوچکترین اعداد طبیعی باشند که در این رابطه صدق کنند، آنگاه $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ را دوره فرآیند فضایی ξ می‌نامند. همچنین اگر $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ باشد، این فرآیند فضایی را مانا می‌گویند.

برای درک بهتر مطالب، چند قضیه از شیشه‌بر و امیری (۲۰۱۹)، بدون اثبات بیان می‌شود.

قضیه ۱. (نمایش طیفی). برای هر فرآیند فضایی مانای \mathbf{X} ، یک اندازه تصادفی $\psi_{\mathbf{X}}$ با نموهای متعامد در بازه $[0, 2\pi\mathbf{1})$ وجود دارد، به طوری که

$$X_t = \int_{[0, 2\pi\mathbf{1})} e^{-i\langle \theta, t \rangle} \psi_{\mathbf{X}}(d\theta), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2 \quad (1)$$

اندازه تصادفی $\psi_{\mathbf{X}}$ ، اندازه طیفی تصادفی فرآیند فضایی \mathbf{X} نامیده می‌شود. علاوه بر این، تابع توزیع طیفی فرآیند فضایی \mathbf{X} برای هر $\theta \in [0, 2\pi\mathbf{1})$ ، به صورت $F_{\mathbf{X}}(\theta) = E|\psi_{\mathbf{X}}(\theta)|^2$ تعریف می‌شود. اگر $F_{\mathbf{X}}$ توسط یک اندازه لبگ تحدید شود، آنگاه $f_{\mathbf{X}}(\theta) = \frac{dF_{\mathbf{X}}(\theta)}{d\theta}$ ، تابع چگالی طیفی \mathbf{X} نامیده می‌شود و

$$R_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = R_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} - \mathbf{s}) = \int_{[0, 2\pi\mathbf{1})} e^{-i\langle \theta, t-s \rangle} f_{\mathbf{X}}(\theta) d\theta, \quad \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2.$$

رابطه (۱) را نمایش انتگرالی فرآیند \mathbf{X} می‌نامند. در قضیه ۲، نمایش انتگرالی طیفی PCSP آورده شده است. قبل از بیان قضیه، $D_{\mathbf{k}}$ و تابع ω بکار رفته در قضیه، تعریف می‌شوند. برای هر مقدار $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$ ، $D_{\mathbf{k}}$ به صورت $D_{\mathbf{k}} = \{(i, j) : i = 0, \dots, k_1 - 1, j = 0, \dots, k_2 - 1\}$ تعریف می‌شود و ω تابعی از $D_{\mathbf{T}}$ به

۳۳۸ فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای و دوره‌نگار فضایی

با ضابطه $\omega(t) = t_2 T_1 + t_1$ ، $\{0, 1, \dots, |\mathbf{T}| - 1\}$ است.

قضیه ۲. اگر ξ یک PCSP با دوره تناوب \mathbf{T} باشد، آنگاه فرآیند فضایی ξ ، دارای نمایش انتگرال طیفی به صورت

$$\xi_t = \int_{[0, 2\pi\mathbb{1})} e^{-i\langle \theta, t \rangle} Z_\xi(d\theta), \quad t \in \mathbb{Z}^r$$

است، زمانی که $\theta \in [\frac{2\pi\mathbf{n}}{\mathbf{T}}, \frac{2\pi(\mathbf{n}+\mathbb{1})}{\mathbf{T}})$ ، $Z_\xi(\theta) = \psi_{\omega(\mathbf{n})}(\theta - \frac{2\pi\mathbf{n}}{\mathbf{T}})$ و $\psi_{\omega(\mathbf{n})}(\theta) = [\psi_{\omega(\mathbf{n})}(\theta)]_{\mathbf{n} \in D_{\mathbf{T}}}$ یک اندازه طیفی تصادفی با نمونه‌های متعامد در $[0, \frac{2\pi\mathbb{1}}{\mathbf{T}})$ باشند. تابع توزیع طیفی فرآیند فضایی ξ بر $[0, 2\pi\mathbb{1}) \times [0, 2\pi\mathbb{1})$ به صورت

$$F_\xi(\theta, \eta) = E Z_\xi(\theta) \overline{Z_\xi(\eta)}, \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi\mathbb{1}), \quad (2)$$

تعیین می‌شود. اگر F_ξ به وسیله انتگرال لبگ تحدید گردد، $f_\xi(\theta, \eta) = \frac{\partial^2 F_\xi(\theta, \eta)}{\partial \theta \partial \eta}$ تابع چگالی طیفی فرآیند فضایی ξ نامیده می‌شود.

در صورتی که مجموعه $d_{\mathbf{k}}$ به صورت

$$d_{\mathbf{k}} = \{\mathbf{d} = \theta - \eta : \theta, \eta \in [0, 2\pi\mathbb{1}), \theta - \eta = \frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{T}}\}, \quad k_i = -T_i + 1, \dots, T_i - 1, \quad i = 1, 2,$$

تعریف شود، آنگاه تحدید F_ξ بر مجموعه $d_{\mathbf{k}}$ ، با $F_{\mathbf{k}}$ نمایش داده می‌شود. توجه داشته باشید که برای هر $\mathbf{k} \in D_{\mathbf{T}}$ اگر

$$A \subset [0, 2\pi) \times [2\pi - \frac{2\pi k_2}{T_2}, 2\pi) \cup [2\pi - \frac{2\pi k_1}{T_1}, 2\pi) \times [2\pi - \frac{2\pi(k_2 + 1)}{T_2}, 2\pi),$$

و اگر $F_{\mathbf{k}}(A) = 0$

$$A \subset [0, 2\pi) \times [0, \frac{2\pi k_2}{T_2}) \cup [0, \frac{2\pi k_1}{T_1}) \times [\frac{2\pi k_2}{T_2}, \frac{2\pi(k_2 + 1)}{T_2}),$$

و برای $F_{-\mathbf{k}}(A) = 0$

$$A \subset [0, 2\pi) \times [0, \frac{2\pi k_2}{T_2}) \cup [0, \frac{2\pi k_1}{T_1}) \times [\frac{2\pi k_2}{T_2}, \frac{2\pi(k_2 + 1)}{T_2}), \quad k_1 \geq k_2,$$

رابطه $\overline{F_{\mathbf{k}}}(A) = F_{-\mathbf{k}}(A + \frac{2\pi\mathbf{k}}{\mathbf{T}})$ صادق هستند. ماتریس مربعی معین مثبت \mathbb{F} را به صورت $\mathbb{F}(\theta) =$

$[F_{q-p}(\theta + \frac{\gamma\pi p}{T})]_{p,q \in D_T}, \theta \in [0, \frac{\gamma\pi 1}{T})$ تعریف کنید. فرض کنید

$$\mathbb{F}(\theta) = [f_{q-p}(\theta + \frac{\gamma\pi p}{T})]_{p,q \in D_T}, \theta \in [0, \frac{\gamma\pi 1}{T}),$$

وقتی برای هر k دلخواه، $f_k(\theta) = \frac{dF_k(\theta)}{d\theta}$ باشد. ماتریس \mathbb{F} ، ماتریس تابع چگالی طیفی فرآیند فضایی ξ نامیده می‌شود. اگر تعداد مشاهدات برابر با N باشد، در این صورت مضارب $\frac{\gamma\pi 1}{N}$ را فرکانس فوریه می‌نامند. در حوزه فرکانس معمولاً تمرکز روی این نقاط است به طوری که برای هر $\lambda \in [0, \gamma\pi 1)$ ، $\lambda_{q(N)}$ را که مضربی از $\frac{\gamma\pi 1}{N}$ بوده و $\lambda_{q(N)} \leq \lambda < \lambda_{q(N)+1}$ است را فرکانس فوریه متناظر با λ می‌گویند. در ادامه فرض کنید که تعداد مشاهدات، N ، مضربی از دوره تناوب، T ، باشد. یعنی $N = m \odot T$ است. برای هر فرآیند فضایی دلخواه X و $\lambda \in [0, \gamma\pi 1)$ ، تبدیل فوریه محدود (FFT) از یک مجموعه متناهی $\{X_t : t \in D_N\}$ ، به صورت

$$d_X^N(\lambda) = |N|^{-\frac{1}{2}} \sum_{t \in D_N} X_t e^{i(t, \lambda q)}, \lambda_{q(N)} \leq \lambda < \lambda_{q(N)+1}, \lambda_{q(N)} = \frac{\gamma\pi q}{N}, q \in D_N,$$

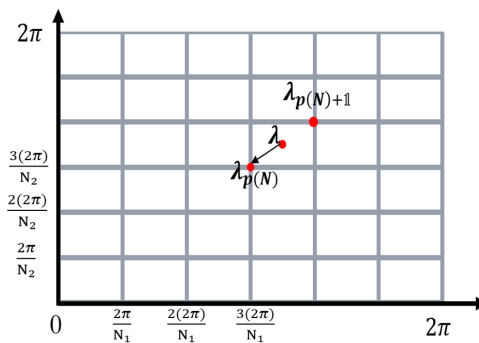
تعریف می‌شود. همچنین توابع $J_X^N(\lambda, \hat{\lambda})$ و $I_X^N(\lambda)$ برای $\{X_t : t \in D_N\}$ ، به صورت

$$I_X^N(\lambda) = d_X^N(\lambda) \overline{d_X^N(\lambda)}, \lambda_{q(N)} \leq \lambda < \lambda_{q(N)+1},$$

$$J_X^N(\lambda, \hat{\lambda}) = d_X^N(\lambda) \overline{d_X^N(\hat{\lambda})}, \lambda_{q(N)} \leq \lambda < \lambda_{q(N)+1},$$

$$\hat{\lambda}_{p(N)} \leq \hat{\lambda} < \hat{\lambda}_{p(N)+1}, q, p \in D_N.$$

تعریف می‌شوند. برای سادگی از نمادهای $d_X(\lambda)$ ، $I_X(\lambda)$ و $J_X(\lambda, \hat{\lambda})$ به ترتیب به جای $d_X^N(\lambda)$ ، $I_X^N(\lambda)$ و $J_X^N(\lambda, \hat{\lambda})$ استفاده خواهد شد. تابع $I_X(\lambda)$ یک دوره‌نگار فضایی نامیده می‌شود.



شکل ۰۱. نمایش فرکانس فوریه متناظر با λ

قضیه ۳. فرض کنید X یک $PCSP$ با دوره تناوب T و ماتریس تابع چگالی طیفی معین مثبت پیوسته f بر $[0, \frac{\sqrt{\pi}}{T}]$ باشد. آنگاه $J_X(\lambda, \lambda + \frac{\sqrt{\pi}k}{T})$ یک برآوردگر مجانبی ناریب برای $f_k(\lambda)$ به‌ازای هر $k \in D_T$ و $\lambda \in [0, \frac{\sqrt{\pi}}{T}]$ است.

با توجه به قضیه ۲، تابع چگالی طیفی $PCSP$ با دوره تناوب T در همه جا به‌جز d_k صفر است. همچنین طبق قضیه ۳، تابع $J_X(\lambda, \hat{\lambda})$ می‌تواند تخمین مناسبی برای تابع چگالی طیفی در این ناحیه باشد. با توجه به تعریف $I_X(\lambda)$ و $J_X(\lambda, \hat{\lambda})$ ، بدیهی است که $I_X(\lambda) = J_X(\lambda, \lambda)$ است. حال اگر X یک $PCSP$ با دوره تناوب T باشد و N مشاهده از فرآیند وجود داشته باشد، در این صورت $I_X(\lambda)$ در ناحیه $[0, \frac{\sqrt{\pi}}{T}] - d_k$ ، تقریباً صفر و در ناحیه d_k ، دارای مقادیر مثبت است. در بخش بعد، نحوه استفاده از این ویژگی برای تعیین دوره تناوب تصاویر دوره‌ای بیان خواهد شد. تکیه‌گاه F و f ، مجموعه d_k است و برای هر $(\theta, \eta) \in [0, \frac{\sqrt{\pi}}{T}] - \cup_{k \in D_T} d_k$ ، $F_{\xi}(\theta, \eta) = 0$ است.

اگر ξ یک $PCSP$ با دوره تناوب T بوده و N مشاهده از این فرآیند وجود داشته باشد (به طوری که N ضربی از T است)، بنابر قضیه ۲ و ویژگی‌های f_{ξ} ، f همه‌جا مگر در مجموعه d_k صفر است. همچنین طبق قضیه ۳، J_{ξ} یک برآوردگر مجانبی ناریب برای f_{ξ} است. لذا برای N به اندازه کافی بزرگ انتظار می‌رود، $J_{\xi}(\theta, \eta)$ برای هر $(\theta, \eta) \in [0, \frac{\sqrt{\pi}}{T}] - \cup_{k \in D_T} d_k$ ، نزدیک صفر باشد. در ادامه با استفاده از این ویژگی و ویژگی‌های دوره‌نگار فضایی، نحوه تشخیص دوره‌ای بودن یک فرآیند فضایی و تعیین دوره تناوب آن را بیان می‌شود. بنابر تعریف I_X رابطه

$$I_X\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right) = |d_X\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)|^2 = c |J_X\left(0, \frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)|^2 \quad (۳)$$

برقرار است، که در آن $c = \frac{N}{|\sum X_i|^2}$ است. حال اگر ξ یک $PCSP$ با دوره تناوب T باشد و N مشاهده از این فرآیند وجود داشته باشد، در این صورت اگر مقادیر $I_{\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ برای $k \in D_N$ (یعنی I_{ξ} را در نقاط فوریه فرکانسی فضایی) به دست آورده شود، آنگاه بنابر قضیه‌های ۲ و ۳، $J_{\xi}\left(0, \frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ برای همه k ها مگر نقاطی که $\frac{k}{N}$ ضربی از $\frac{1}{T}$ باشد، نزدیک صفر است. به تبع آن و با استفاده از رابطه (۳)، $I_{\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ در این نقاط، مقداری مثبت و در بقیه نقاط نزدیک به صفر است. در نتیجه اگر نمودار $I_{\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ را برای $k \in D_N$ رسم کنید، اولین جایی که نمودار دارای پیک خواهد بود، زمانی است که $\frac{k}{N}$ ضربی از $\frac{1}{T}$ باشد. در حالت کلی اگر یک $PCSP$ با دوره تناوب T وجود داشته باشد و $I_{\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ در نقطه d پیک داشته باشد، حتماً $T = \frac{N}{d}$ خواهد بود. لذا اگر یک فرآیند فضایی مانند X وجود داشته باشد و نمودار دوره‌نگار فضایی آن یعنی $I_{\xi}\left(\frac{\sqrt{\pi}k}{N}\right)$ را برای $k \in D_N$ رسم کنید، اگر به‌ازای همه $k \in D_N$ پیک واضحی نداشته باشد آن $PCSP$ نخواهد بود ولی اگر در یک نقطه مانند d یک پیک واضح داشته باشد، حتماً یک $PCSP$ با دوره تناوب $T = \frac{N}{d}$ خواهد بود.

قضیه ۴. اگر $Z = \{Z_t : t \in \mathbb{Z}^2\}$ یک فرآیند فضایی مانا و $g(\cdot)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه $X_t = g(t) + Z_t$ ، $t \in \mathbb{Z}^2$ یک فرآیند همبسته دوره‌ای با دوره تناوب T خواهد بود.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

فرض کنید $\mathbf{N} = (\varphi_0, \varphi_0)$ ، اندازه نمونه و $\mathbf{Z} = \{Z_t : t \in \mathbb{Z}^2\}$ یک مدل مانای SARMA^۱ به صورت

$$\begin{aligned} Z_{(t_1, t_2)} &= \frac{1}{2}Z_{(t_1-1, t_2)} + \frac{1}{2}Z_{(t_1, t_2-1)} - \frac{1}{6}Z_{(t_1-1, t_2-1)} + \varepsilon_{(t_1, t_2)} \\ &+ \frac{1}{6}\varepsilon_{(t_1-1, t_2)} + \frac{1}{6}\varepsilon_{(t_1, t_2-1)} - \frac{1}{4}\varepsilon_{(t_1-1, t_2-1)}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned} \quad (۴)$$

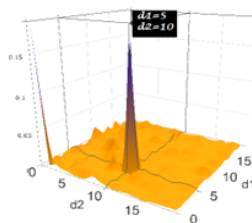
باشد، که در آن ε_t یک نمونه تصادفی از فرآیند گاوسی فضایی است. یک نمونه تصادفی به اندازه \mathbf{N} از مدل

$$X_t = \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t_1}{8}\right) \cos\left(\frac{2\pi t_2}{4}\right) \right] + Z_t, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2, \quad (۵)$$

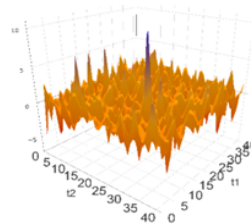
وقتی Z_t توسط رابطه (۴) به دست می‌آید، شبیه‌سازی شده است. واضح است بنا بر قضیه ۴ که این مدل، یک PCSP با دوره تناوب $\mathbf{T} = (8, 4)$ است. با بررسی نمودار دوره‌نگار فضایی، متوجه یک قله اصلی در $\mathbf{d} = (5, 10)$ می‌شوید که بیانگر دوره‌ای بودن فرآیند با دوره تناوب $(\frac{\varphi_0}{8}, \frac{\varphi_0}{4})$ است که دقیقاً با \mathbf{T} برابر است (شکل ۲ را ببینید). همچنین یک نمونه تصادفی به اندازه $\mathbf{N} = (\varphi_0, \varphi_0)$ از PCSP با دوره تناوب $\mathbf{T} = (8, 4)$ ، به فرم

$$\mathbf{X}_t = \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t_1}{8}\right) \cos\left(\frac{2\pi t_2}{4}\right) \right] + \varepsilon_t \quad (۶)$$

وقتی ε_t ، یک نمونه تصادفی از فرآیند گاوسی فضایی، شبیه‌سازی شده است. نمودار فرآیند و دوره‌نگار فضایی آن در شکل ۳، رسم شده است. در این فرآیند، با استفاده از پیک دوره‌نگار، دوره تناوب را به دقت تعیین کنید. همان‌طور که در نمودار دوره‌نگار نشان داده شده است، یک اوج در $\mathbf{d} = (5, 10)$ وجود دارد. با تقسیم N بر d عدد $(\frac{\varphi_0}{8}, \frac{\varphi_0}{4}) = (8, 4)$ به دست می‌آید که با دوره تناوب داده‌های شبیه‌سازی شده برابر است.



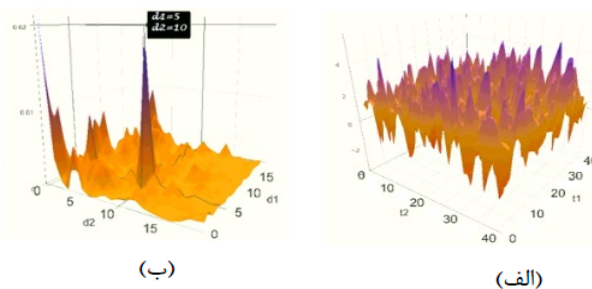
(ب)



(الف)

شکل ۲. الف: شبیه‌سازی فرآیند فضایی رابطه (۵). ب: دوره‌نگار فضایی این مدل

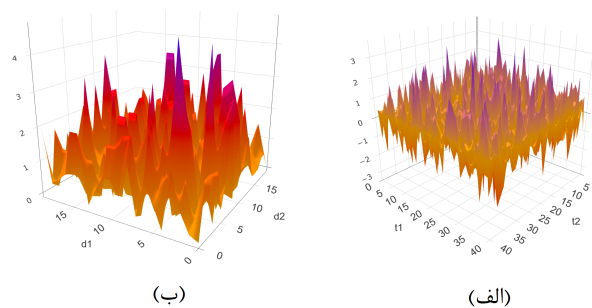
^۱Spatial Autoregressive Moving Average



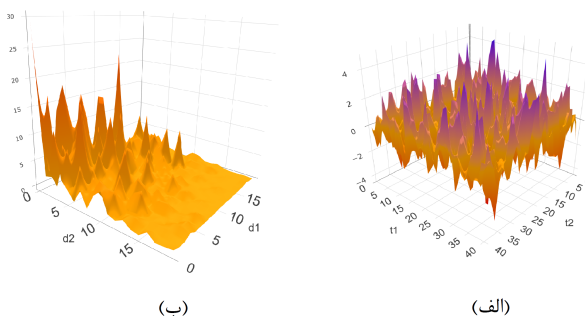
شکل ۳. الف: شبیه‌سازی فرآیند فضایی رابطه (۶). ب: دوره‌نگار فضایی این مدل.

شاید این سوال به ذهن خطور کند که آیا امکان آن وجود دارد که نمودار دوره‌نگار فضایی برای زمانی که یک فرآیند فضایی همبسته دوره‌ای نباشد، دارای پیک قابل توجهی باشد؟ هر چند از لحاظ تئوری امکان این اتفاق وجود ندارد، اما به منظور درک بهتر این موضوع، با استفاده از شبیه‌سازی فرآیندهای فضایی مانا و رسم نمودار دوره‌نگار آنها، این مسئله مورد بررسی قرار داده شده است.

در شکل ۴ نمودار مقادیر شبیه‌سازی شده از یک فرآیند نوفه سفید فضایی به همراه دوره‌نگار آن رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نمودار دوره‌نگار فرآیند نوفه سفید فضایی هیچ پیک قابل توجهی مانند شکل ۲ و شکل ۳ وجود نداشته و همان‌گونه که انتظار می‌رفت نمودار دوره‌نگار، همبسته دوره‌ای بودن این فرآیند را رد می‌کند. مشابه همین مطلب برای فرآیند مانای فضایی شبیه‌سازی شده از مدل رابطه (۴) صدق می‌کند و با توجه به نمودار دوره‌نگار رسم شده در شکل ۵ همبسته دوره‌ای بودن این فرآیند نیز رد می‌شود.



شکل ۴. الف: شبیه‌سازی فرآیند نوفه سفید ε_t . ب: دوره‌نگار فضایی این مدل



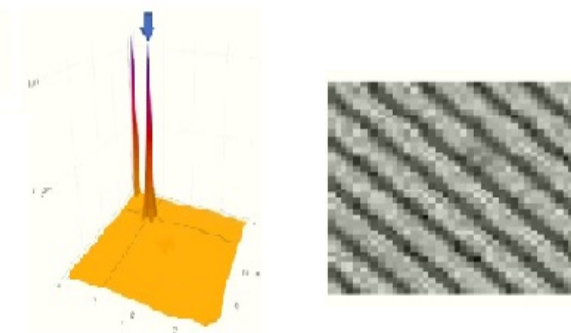
شکل ۵. الف: شبیه‌سازی فرآیند مانای فضایی Z_t ، زمانی‌که Z_t مدل SARMA است. ب: دوره‌نگار فضایی این مدل

۴ تحلیل داده‌های واقعی

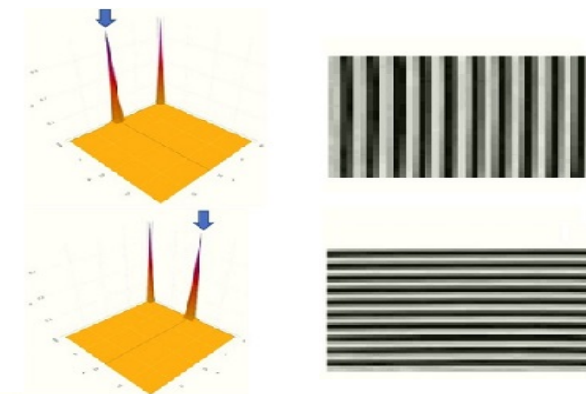
در شکل‌های ۶، ۷، ۸ و ۹، عکس‌های دوره‌ای به‌عنوان فرآیند در نظر گرفته شده و دوره‌نگار آن‌ها به تصویر کشیده شده است. وجود پیک‌ها در نمودار دوره‌نگار، نشان‌دهنده دوره‌ای بودن فرآیند و محل پیک، تعیین‌کننده مقدار دوره تناوب فرآیند است. در دوره‌نگار، نقطه مبدا بیشترین مقدار را به خود اختصاص می‌دهد که نباید به اشتباه آن را به‌عنوان دوره تناوب در نظر گرفت. اگر اوج در وسط نمودار وجود داشته باشد، دوره تناوب بر اساس آن تعیین می‌شود (شکل ۶). اگر پیک در محور x یا y باشد، نشان‌دهنده وجود دوره تناوب در همان راستا است، (شکل ۷). همچنین اگر چندین قله در وسط نمودار وجود داشته باشد، بزرگترین آن‌ها دوره تناوب را مشخص می‌کند (شکل ۸). در نهایت، اگر قله‌هایی در محور x یا y یا در وسط نمودار وجود داشته باشد، قله‌هایی که در وسط قرار دارند دوره تناوب را با دقت بیشتری تعیین می‌کنند (شکل ۹). همان‌طور که در شکل ۹ دیده می‌شود، این تصویر در هر دو جهت دارای تناوب است ولی تناوب آن در یک راستا غالب‌تر است. نمودار دوره‌نگار فضایی آن هم به‌طور واضح همین مطلب را نشان می‌دهد.

به‌عنوان یکی از کاربردهای مهم تشخیص و تعیین دوره تناوب در فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای، بررسی تصاویر با اثر مویر^۱ است. در اکثر تصاویر و فیلم‌هایی که توسط دوربین ضبط می‌شود، اگر فردی لباس راه راه به تن داشته باشد، تصاویر ضبط شده تار شده و نویز زیادی خواهند داشت. اصطلاحاً به چنین نویزی، اثر مویر می‌گویند (شکل ۱۰). می‌توان گفت که اثر مویر بیشتر در تصاویری اتفاق می‌افتد که داده‌های آن‌ها به‌صورت فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای باشند. بنابراین اگر تمایل به از بین بردن این مشکل در تصویر داشته باشید، باید دوره تناوب آن را تشخیص دهید. در این حالت، می‌توان با استفاده از دوره‌نگار فضایی دوره تناوب آن‌ها را مشخص نمود.

¹Moire pattern



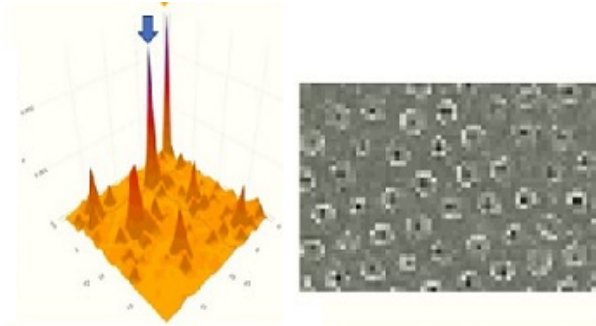
شکل ۶. عکس و دوره‌نگار فضایی مرتبط به آن، جایی که یک اوج در وسط نمودار وجود دارد.



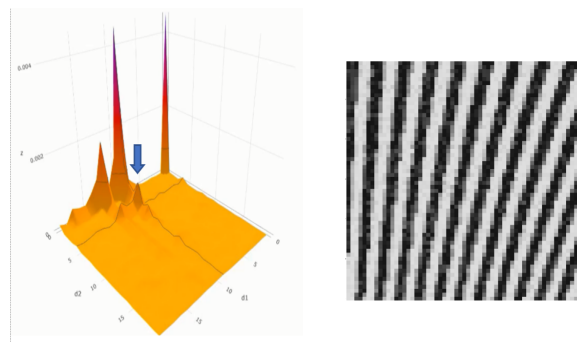
شکل ۷. عکس و دوره‌نگار فضایی مربوطه، که در آن قله بزرگ در محور x یا y است.

بحث و نتیجه‌گیری

فرآیندهای فضایی همبسته دوره‌ای بسیار پرکاربرد بوده و در این میان تشخیص دوره‌ای بودن تصاویر و میزان دوره تناوب آن، یکی از چالش‌های مهم در پردازش تصویر است. همان‌گونه که در بخش‌های ۳ و ۴ مشاهده شد، نحوه تشخیص و تعیین دوره تناوب برای چندین فرآیند و تصویر مورد بررسی قرار گرفت. بنابراین در تصاویری مانند اثر مویر که از یک فرآیند فضایی همبسته دوره‌ای پیروی می‌کنند، اگر تمایل به از بین بردن مشکل مذکور در تصویر داشته باشید، باید دوره تناوب آن را تشخیص دهید. یکی از روش‌های موجود که به تعیین دوره تناوب این گونه تصاویر کمک می‌کند، دوره‌نگار فضایی است که در این مقاله، به بررسی روش تعیین دوره تناوب آن پرداخته شد. در ادامه، به پژوهشگران پیشنهاد می‌گردد که پس از تشخیص دوره تناوب با استفاده از روش مذکور، به تحقیق درباره روشی برای تحلیل و اصلاح این نوع تصاویر بپردازند.



شکل ۸. عکس و دوره‌نگار فضایی مربوطه، که در آن چندین قله در وسط وجود دارد.



شکل ۹. عکس و دوره‌نگار فضایی مربوطه، که در آن قله‌هایی در محور x یا y در وسط وجود دارد.



شکل ۱۰. اثر مویر

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران گرانقدر، رهنمودهای ارزنده سردبیر محترم، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله علوم آماری که باعث بهبود سطح کیفی و افزایش غنای مقاله شده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- Antoni, J. (2009), Cyclostationarity by Examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **23**, 987-1036.
- Das, S., Alshehri, Y. M., Stenchikov, G. L., and Genton, M. G. (2023). A Space-Time Model with Temporal Cyclostationarity for Probabilistic Forecasting and Simulation of Solar Irradiance Data. *Stat*, e583.
- Dehay, D., Hurd, H. L. and Makagon, A. (2013), Spectrum of Periodically Correlated Fields, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **7**(3), 343–368.
- Fryz, M., and Scherbak, L. (2023). Properties of Discrete-Dime Conditional Linear Cyclostationary Random Processes in the Problems of Energy Informatics. *System Research in Energy*, **1**(72), 72-79.
- Garakyaragh, N., and Shahtalebi, K. (2022). DOA Estimation Based on Cyclostationary Feature Extraction: An Adaptive High-Resolution Algorithm. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, **149**, 154171.
- Gladyshev, E. (1961), Periodically Correlated Random Sequence, *Soviet Mathematics*, **2**, 385-388.
- Haghibin, H., Shishebor, Z. and Soltani, A. (2014), Hilbertian Spatial Periodically Correlated First Order Autoregressive Models, *Advances in Data Analysis and Classification*, **8**, 303-319.
- Hurd, H. (1995), Spectral Correlation of Randomly Jittered Periodic Functions of Two Variables, *Signals, Systems and Computers, 1995 Conference Record of the Twenty-Ninth Asilomar Conference on, IEEE*, 500-505.
- Hurd, H., Kallianpur, G. and Farshidi, J. (2004), Correlation and Spectral Theory for Periodically Correlated Random Fields Indexed on Z^2 , *Journal of Multivariate Analysis*, **90**, 359-383.

- Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I., and Zakrzewski, Z. (2022), The Least Square Estimation of the Basic Frequency for Periodically Non-Stationary Random Signals. *Digital Signal Processing*, **122**, 103333.
- Kone, M., and Monsan, V. (2023). Wavelet Estimation of the Covariance of Almost Periodically Periodically Correlated Processes and Study of Asymptotic Properties in a Context of Weak Dependence, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **67**(1), 49-94. <http://dx.doi.org/10.17654/0972086323004>.
- Napolitano, A. (2022). Modeling the Electrocardiogram as Oscillatory Almost-Cyclostationary Process. *IEEE Access*, **10**, 13193-13209.
- Nematollahi, A. and Rao, T. S. (2005), On the Spectral Density Estimation of Periodically Correlated (Cyclostationary) Time Series, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 568-589.
- Pham, Q. H., Gagnon, M., Antoni, J., Tahan, A., and Monette, C. (2022). Prediction of Hydroelectric Turbine Runner Strain Signal via Cyclostationary Decomposition and Kriging Interpolation. *Renewable Energy*, **182**, 998-1011.
- Ramirez, D., Santamaría, I., and Scharf, L. L. (2010). Detection of Spatially Correlated Gaussian Time Series. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **58**(10), 5006-5015.
- Shishebor, Z. and Amiri Aghbilagh, B. (2019), On the Asymptotic Behavior of the Periodograms of Periodically Correlated Spatial Processes: Periodicity Detection. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **48**(8), 1854-1870.
- Soltani, A. and Shishebor, Z. (2007), On Infinite Dimensional Discrete Time Periodically Correlated Processes, *Journal of Mathematics*, **37**, 1043-1058
- Soltani, A. R. and Shishebor, Z. (1998), A Spectral Representation for Weakly Periodic Sequences of Bounded Linear Transformations. *Acta Mathematica Hungarica*, **80**, 265-270.

Wang, Z., Yang, J., Li, H., Zhen, D., Gu, F., and Ball, A. (2022). Improved Cyclostationary Analysis Method Based on TKEO and Its Application on the Faults Diagnosis of Induction Motors. *ISA Transactions*, **128**, 513-530.