Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2023
Vol. 17, No. 2, pp 299-316
DOI: 10.52547/jss.17.2.04

On the Mean Residual of Records in the Geometric Random Record Model

Khosravi Tanak, A.[1], Fashandi, M.[2], Ahmadi, J.[2], Najafi, M.[3],
[1]Department of Statistics, Velayat University, Iranshahr, Iran.
[2]Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
[3]Department of Mathematics, Velayat University, Iranshahr, Iran.

Corresponding author: A. Khosravi Tanak, a.khosravi@velayat.ac.ir

Received: 19/1/2023 **Revised:** 27/7/2023 **Accepted and Published Online:** 2/8/2023.

Introduction

Record values have many applications in reliability theory, such as the shock and minimal repairs models. In this regard, many works have been done based on records in the classical model. In some random phenomena, instead of an infinite sequence of observations, a sequence of random length $X_1, \ldots, X_N$ is available, where N is a positive integer-valued random variable independent of X_is. The record values of this sequence form a random record model. The random record model arises naturally when the observations arrive at time points determined by an independent point process observed over a finite time. When the number of available observations is geometrically distributed, this model is called the geometric random record (GRR) model. Mean residual life is an important criterion in reliability and lifetime analysis. In the present paper, based on the concept of the mean residual life, some definitions for the mean residual of records are presented in the random record model. Also, the characterization of parent distribution by using the mean residual of records is investigated in the GRR model.

Material and Methods

Let $X_1, \ldots, X_N$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with continuous cumulative distribution function F and N be a random variable independent of X_is. Let M denotes the number of nontrivial records observed and $R_j,\ j \leq M$, is the jth nontrivial record of this sequence. If event $\{M \geq n\}$ occurs, based on two interpretations, the means residual of the nth record are defined as

$$\psi_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_0 > \nu; M \geq n),$$
$$\phi_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_n > \nu; M \geq n),$$

and if event $\{M = n\}$ occurs, these concepts are defined as

$$\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_0 > \nu; M = n),$$
$$\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_n > \nu; M = n).$$

Results and Discussion

In this study, it is shown that the four mentioned functions for the mean residual of records can be obtained from F using an explicit relation. The conditions for the existence of the mean residual of records are investigated. Also, it is proved that the mean residual of the nth record, $n \geq 0$, is an ascending sequence. Moreover, it is shown that the parent distribution F can be characterized uniquely by the sequences $\{\psi_n^{Rnd}(\nu), n \geq 0\}$ and $\{\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu), n \geq 0\}$ in a GRR model. Also, $\phi_n^{Rnd}(\nu)$ and $\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)$ can characterize F uniquely for each n. Finally, the characterization results are applied to job search models to identify the wage-offer distributions.

Conclusion

In this paper, the characterization of distributions is considered by using the mean residual of records in the GRR model. Researchers can apply the obtained characterization results for job search models to similar practical problems in seismology, industrial stress testing, sporting and athletic events, hydrology and meteorology.

Keywords: Record value, Mean Residual Life, Geometric Random Record Model, Characterization, Job Search Model.

Mathematics Subject Classification (2010): 62G30, 62N05.

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۲
جلد ۱۷، شماره ۲، ص ۲۹۹ -- ۳۱۶
DOI: 10.52547/jss.17.2.04
مقاله پژوهشی

مطالعه‌ای بر میانگین مانده رکوردها در مدل تصادفی هندسی

علی خسروی طناک[۱]، معصومه فشندی[۲]، جعفر احمدی[۲] و مرضیه نجفی[۳]

[۱]گروه آمار، دانشگاه ولایت

[۲]گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

[۳]گروه ریاضی، دانشگاه ولایت

نویسنده مسئول : علی خسروی طناک، a.khosravi@velayat.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۵/۱۱

چکیده: رکوردها در نظریه قابلیت اعتماد کاربرد بسیاری دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به مدل‌های شوک و تعمیرات مینیمال اشاره کرد. در این راستا پژوهش‌های زیادی بر اساس رکوردها در مدل کلاسیک انجام شده است. در این مقاله، رکوردها در مدل تصادفی هندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. مفهوم میانگین مانده رکوردها در مدل تصادفی تعریف و برخی خواص آن در مدل تصادفی هندسی بررسی می‌شود. سپس نشان داده می‌شود با استفاده از دنباله میانگین مانده رکوردها در مدل تصادفی هندسی، می‌توان توزیع جامعه را مشخص کرد. در پایان، به کاربردی از نتایج مشخص‌سازی در مدل‌های کاریابی در اقتصاد اشاره می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: رکورد، میانگین مانده عمر، مدل تصادفی هندسی رکوردها، مشخص‌سازی، مدل کاریابی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 62G30.

۱ مقدمه

وقتی با مشاهدات متوالی مواجه هستیم، مشاهداتی که از مقادیر قبل از خود بیشتر یا کمتر باشند، مورد توجه قرار می‌گیرند. در بسیاری از موارد، مشاهدات فقط در صورتی ثبت می‌شوند که یک رکورد باشند، مانند داده‌های مسابقات ورزشی، هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله نگاری و ... . بنابراین تحلیل و استنباط آماری در مورد جامعه آماری با استفاده از رکوردها حائز اهمیت است. فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی

مستقل و هم‌توزیع باشد. متغیر تصادفی X_j را یک رکورد بالا (پایین) گویند هرگاه مقدار آن از متغیرهای قبل از خود با احتمال یک بزرگتر (کوچکتر) باشد. بنابراین X_j یک رکورد بالا (پایین) است، هرگاه برای هر $i < j$، $X_j > X_i$ $(X_j < X_i)$. اگر قرار دهیم $L(\circ) = ۱$ و برای $j \geq ۱$، $L(j) = \min\{k : X_k > X_{L(j-۱)}\}$، آنگاه $R_n = X_{L(n)}$ همان nامین رکورد بالا در دنباله X_iها است ($R_\circ$ را رکورد بدیهی گویند). روش ذکر شده استخراج رکوردها از دنباله نامتناهی X_iها در مباحث داده‌های ترتیبی به مدل کلاسیک رکوردها معروف است. در این مقاله به رکورد بالا برای اختصار رکورد گفته می‌شود. برای آشنایی بیشتر با نظریه و کاربرد آماره‌های رکوردی در مدل کلاسیک، می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸)، احسن الله و نزروف (۲۰۱۵) و منابع آن‌ها مراجعه کرد. رکوردها در قابلیت اعتماد در زمینه‌هایی مانند تعمیرات مینیمال، مدل‌های شوک و فرآیند پواسون ناهمگن کاربرد دارند. بلاک و همکاران (۱۹۸۵)، گوپتا و کرمانی (۱۹۸۸)، کمپس (۱۹۹۴)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۹)، امینی و بالاکریشنان (۲۰۱۵) و اسوین و همکاران (۲۰۲۳) از جمله مطالعاتی هستند که در این زمینه‌ها انجام گرفته‌اند.

در بسیاری از پدیده‌های تصادفی به جای دنباله نامتناهی $X_۱, X_۲, \ldots$ با یک دنباله با طول تصادفی از متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_N$ سر و کار داریم، که N یک متغیر تصادفی صحیح و نامنفی و مستقل از X_iها است. اگر رکوردهای حاصل از این دنباله در نظر گرفته شوند، آنگاه به این طرح در مباحث داده‌های ترتیبی مدل تصادفی رکوردها[۱] گویند. واضح است که در این مدل، اگر N با احتمال یک برابر با بی‌نهایت شود، مدل کلاسیک رکوردها حاصل می‌شود. این مدل معمولاً در پدیده‌های تصادفی که در یک فاصله زمانی مشخص رخ می‌دهند مورد توجه قرار می‌گیرد. به عنوان مثال فرض کنید X_i میزان خسارت مطالبه شده توسط مراجعه کننده iام به یک شرکت بیمه و N تعداد مراجعه کنندگان در یک روز مشخص باشد. مدل تصادفی رکوردها توسط بروس (۱۹۸۸) معرفی و پس از آن تحقیقات زیادی در مورد رکوردها در این مدل انجام شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به بونگ و ناگاراجا (۱۹۹۱)، آرنولد و همکاران (۱۹۹۸)، هافمن و ناگاراجا (۲۰۰۲)، ناگاراجا و بارلوی (۲۰۰۳)، باراکات (۲۰۱۲)، باراکات و همکاران (۲۰۱۷)، عبدالجواد و همکاران (۲۰۲۰) اشاره کرد. مدل تصادفی رکوردها در صورتی که N یک متغیر تصادفی هندسی با تابع احتمال $P(N = k) = q^{k-۱}p$، برای $k \geq ۱$ باشد، که در آن $\circ < p < ۱$ و $q = ۱ - p$، مدل تصادفی هندسی رکوردها[۲] (GRR) نامیده می‌شود. آرنولد و همکاران (۱۹۹۸، فصل ۷) نظریه رکوردها در این مدل را مورد مطالعه قرار دادند و به برخی کاربردهای آن اشاره کردند. نتایجی از مشخص‌سازی توزیع‌ها بر اساس دنباله میانگین رکوردها در مدل GRR و کاربرد آن در کاریابی توسط ناگاراجا و بارلوی (۲۰۰۳) و بارلوی و ناگاراجا (۲۰۰۶) ارائه شده است. فشندی و همکاران (۲۰۱۴) نشان دادند با استفاده از آنتروپی رکوردها در این مدل می‌توان به مشخص‌سازی توزیع‌ها پرداخت.

یکی از معیارهای مهم در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر، میانگین مانده عمر[۳] است. فرض

---
[1] Random record model
[2] Geometric random record model
[3] Mean residual life

کنید X طول عمر یک سیستم با تابع توزیع F باشد. در صورتی که این سیستم تا زمان $\nu > 0$ فعال باشد، $(X-\nu|X>\nu)$ را متغیر تصادفی مانده عمر و امید ریاضی آن، یعنی

$$m(\nu)=E(X-\nu|X>\nu)=\frac{1}{\bar{F}(\nu)}\int_{\nu}^{\infty}\bar{F}(x)\mathrm{d}x,$$

را تابع میانگین مانده عمر گویند $(\bar{F}=1-F)$. کوتز و شانبگ (۱۹۸۰) نشان دادند توزیع F با استفاده از $m(\nu)$ قابل تشخیص است. بارلو و پروشان (۱۹۸۱)، گاس و پروشان (۱۹۸۸)، میکر و اسکوبار (۱۹۹۸)، اسدی و بایرام اوغلو (۲۰۰۶) و صابرزاده و رزمخواه (۱۳۹۸) میانگین مانده عمر و کاربردهای آن در قابلیت اعتماد را مورد مطالعه قرار داده‌اند. راقب و اسدی (۲۰۰۸) مفهوم میانگین مانده عمر را به رکوردها تعمیم دادند و این معیار را برای رکورد nام در مدل کلاسیک به صورت

$$\psi_n(\nu)=E(R_n-\nu|R_0>\nu),\ \nu>0.$$

تعریف کردند. آن‌ها همچنین نشان دادند با استفاده از این تابع می‌توان به مشخص‌سازی توزیع جامعه پرداخت. برای توضیح بیشتر در مورد مفهوم $\psi_n(\nu)$ فرض کنید سیستمی در معرض یک دنباله از ولتاژهای مستقل و هم‌توزیع قرار بگیرد. شوک‌های وارد شده به این سیستم را می‌توان به عنوان رکوردهای این دنباله در نظر گرفت. پس این تعریف از میانگین مانده رکورد[1] (MRR) را برای پاسخ به این پرسش مهم می‌توان به کار گرفت: با فرض اینکه اولین شوک وارد شده به سیستم بیشتر از ν باشد، nامین شوک بعدی به طور میانگین چه مقدار بیشتر خواهد بود؟ در این مقاله این مفهوم با نماد MRR1 مشخص می‌شود. راقب و اسدی (۲۰۱۰) تعریف دیگری از میانگین مانده عمر برای رکوردها به صورت

$$\phi_n(\nu)=E(R_n-\nu|R_n>\nu),\ \nu>0,$$

ارائه دادند. از این تعبیر برای میانگین مانده رکورد nام می‌توان برای پاسخ به پرسش‌هایی از این قبیل استفاده کرد: اگر بدانیم nامین شوک وارد شده به سیستم بزرگتر از ν است، این شوک به طور میانگین چقدر بیشتر از ν خواهد بود؟ این مفهوم در این مقاله با نماد MRR2 مشخص می‌شود. تاکنون تحقیقات زیادی در مورد MRR1، MRR2 و همچنین تعاریف دیگری از میانگین مانده رکوردها در مدل کلاسیک انجام شده است که به عنوان مثال می‌توان به خالدی و همکاران (۲۰۰۹)، اسدی و راقب (۲۰۱۰)، کاندو و ناندا (۲۰۱۰)، بدیر و راقب (۲۰۱۴) و ناندا و کایال (۲۰۱۹) اشاره کرد. هدف این مقاله مطالعه دو معیار ذکر شده در مدل GRR است. برای این منظور ابتدا در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز بیان می‌شود. در بخش ۳، مفهوم میانگین مانده رکوردها در دو نسخه برای مدل تصادفی بیان و برخی خواص آن‌ها در مدل GRR بررسی می‌شود. در بخش ۴، نشان داده می‌شود

[1] Mean residual of record

با استفاده از دنباله میانگین مانده رکوردهای مدل GRR، می‌توان توزیع جامعه را مشخص کرد. کاربردی از نتایج مشخص‌سازی به دست آمده، در بخش ۵ ارائه می‌شود.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_N$ دنباله‌ای به طول تصادفی N از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع پیوسته F و تابع چگالی احتمال f باشد که در آن N یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p است. بنابراین رکوردهای این دنباله تشکیل یک مدل GRR می‌دهند. اگر M تعداد رکوردهای غیربدیهی در دنباله $X_۱, \ldots, X_N$ باشد، تابع درستنمایی[۱] $(R_۰, \ldots, R_n, \{M \geq n\})$ به صورت

$$f(r_۰, \ldots, r_n; M \geq n) = f(r_n) \prod_{i=۰}^{n-۱} \frac{qf(r_i)}{۱ - qF(r_i)}, \quad r_۰ < \ldots < r_n, \tag{۱}$$

است (آرنولد و همکاران ، ۱۹۹۸)، که از آن تابع درستنمایی $(R_۰, \ldots, R_n, \{M = n\})$ نیز به صورت

$$f(r_۰, \ldots, r_n; M = n) = \frac{p}{q} \prod_{i=۰}^{n} \frac{qf(r_i)}{۱ - qF(r_i)}, \quad r_۰ < \ldots < r_n, \tag{۲}$$

حاصل می‌شود (ناگاراجا و بارلوی ، ۲۰۰۳). اگر F تابع توزیع یکنواخت استاندارد باشد و nامین رکورد با U_n نشان داده شود، آنگاه براساس رابطه (۱) توابع درستنمایی $(U_۰, U_n, \{M \geq n\})$، $(U_n, \{M \geq n\})$ و $(U_۰, \{M \geq n\})$ به ترتیب عبارتند از

$$f(u_۰, u_n; M \geq n) = \frac{q}{(۱ - qu_۰)(n - ۱)!} \Big[- \log \big(\frac{۱ - qu_n}{۱ - qu_۰} \big) \Big]^{n-۱}, \; u_۰ < u_n, \tag{۳}$$

$$f(u_n; M \geq n) = \frac{[- \log(۱ - qu_n)]^n}{n!}, \quad ۰ < u_n < ۱,$$

$$f(u_۰; M \geq n) = \frac{q}{(۱ - qu_۰)(n - ۱)!} \int_{u_۰}^{۱} \Big[- \log \big(\frac{۱ - qu_n}{۱ - qu_۰} \big) \Big]^{n-۱} \mathrm{d}u_n. \tag{۴}$$

[1] Likelihood function

همچنین با استفاده از (۲) توابع درستنمایی $(U_\circ, U_n, \{M=n\})$، $(U_n, \{M=n\})$ و $(U_\circ, \{M=n\})$ به ترتیب عبارتند از

$$f(u_\circ, u_n; M=n) = \frac{pq\Big[-\log\big(\frac{1-qu_n}{1-qu_\circ}\big)\Big]^{n-1}}{(1-qu_\circ)(1-qu_n)(n-1)!},\ u_\circ < u_n, \tag{5}$$

$$f(u_n; M=n) = \frac{p[-\log(1-qu_n)]^n}{(1-qu_n)n!}, \quad \circ < u_n < 1, \tag{6}$$

$$f(u_\circ; M=n) = \frac{p}{(1-qu_\circ)n!}\Big[-\log\big(\frac{p}{1-qu_\circ}\big)\Big]^n, \quad \circ < u_\circ < 1. \tag{7}$$

تعریف ۱. (شیکد و شاندیکومار، ۲۰۰۷) متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی[2] از متغیر تصادفی Y کوچکتر است و با نماد $X \le_{st} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه برای هر t، $P(X>t) \le P(Y>t)$.

تعریف ۲. متغیر تصادفی X با تابع چگالی $f(t)$ در ترتیب نسبت درستنمایی[1] از متغیر تصادفی Y با تابع چگالی $g(t)$ کوچکتر است و با نماد $X \le_{lr} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه $\frac{g(t)}{f(t)}$ تابعی صعودی از t باشد.

لم ۱. اگر $X \le_{lr} Y$ آن‌گاه $X \le_{st} Y$.

لم ۲. اگر $X \le_{st} Y$ آن‌گاه $E(X) \le E(Y)$.

۳ میانگین مانده رکوردها

با توجه دو تعریف MRR1 و MRR2 از میانگین مانده رکوردها در مدل کلاسیک، این مفاهیم برای رکورد nام در یک مدل تصادفی، با شرط اینکه حداقل n رکورد غیربدیهی وجود داشته باشد، یعنی $M \ge n$، به ترتیب به صورت

$$\psi_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_\circ > \nu; M \ge n),$$
$$\phi_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_n > \nu; M \ge n),$$

و با شرط اینکه $M=n$، به ترتیب به صورت

$$\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_\circ > \nu; M = n),$$
$$\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu) = E(R_n - \nu | R_n > \nu; M = n),$$

[2] Usual stochastic order
[1] Likelihood ratio order

تعریف می‌شود. فرض کنید در یک مدل GRR، متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_N$ نامنفی باشند. در ادامه نحوه محاسبه میانگین مانده رکوردها بر اساس تابع توزیع F در این مدل بررسی می‌شود.

قضیه ۱. توابع میانگین مانده رکورد $\phi_n^{Rnd}(\nu)$ و $\psi_n^{Rnd}(\nu)$ در مدل GRR به ترتیب به صورت

$$\psi_n^{Rnd}(\nu) = \frac{\int_\nu^\infty h_{n,\nu}^F(x)\mathrm{d}x}{h_{n,\nu}^F(\nu)}, \quad \nu > ۰, \tag{۸}$$

$$\phi_n^{Rnd}(\nu) = \frac{\int_\nu^\infty h_{n,۰}^F(x)\mathrm{d}x}{h_{n,۰}^F(\nu)}, \quad \nu > ۰, \tag{۹}$$

نوشته می‌شود، که در آن

$$h_{n,\nu}^F(x) = \int_{F(x)}^{۱} \Big[-\log\big(\frac{۱ - qu}{۱ - qF(\nu)}\big)\Big]^n \mathrm{d}u. \tag{۱۰}$$

برهان: ابتدا رابطه (۸) را ثابت می‌کنیم. اثبات رابطه (۹) مشابه است. با توجه به اینکه در مدل رکوردها $F(R_n)$ هم‌توزیع با U_n است، با استفاده از رابطه (۳) داریم

$$\begin{aligned} P(R_n - \nu > x, R_۰ > \nu; M \geq n) &= P(U_۰ > F(\nu), U_n > F(\nu + x); M \geq n) \\ &= \int_{F(\nu+x)}^{۱} \int_{F(\nu)}^{u_n} f(u_۰, u_n; M \geq n)\mathrm{d}u_۰\mathrm{d}u_n \\ &= \int_{F(\nu+x)}^{۱} \frac{۱}{n!}\Big[-\log\big(\frac{۱ - qu_n}{۱ - qF(\nu)}\big)\Big]^n \mathrm{d}u_n \\ &= \frac{۱}{n!} h_{n,\nu}^F(\nu + x). \end{aligned}$$

همچنین با توجه به رابطه (۴)،

$$\begin{aligned} P(R_۰ > \nu; M \geq n) &= P(U_۰ > F(\nu); M \geq n) \\ &= \int_{F(\nu)}^{۱} f(u_۰; M \geq n)\mathrm{d}u_۰ \\ &= \int_{F(\nu)}^{۱} \frac{۱}{n!}\Big[-\log\big(\frac{۱ - qu_n}{۱ - qF(\nu)}\big)\Big]^n \mathrm{d}u_n \\ &= \frac{۱}{n!} h_{n,\nu}^F(\nu). \end{aligned} \tag{۱۱}$$

بنابراین تابع بقای مانده رکورد nام برابرست با

$$\begin{aligned}\bar{F}(x|\nu;n) &= P(R_n-\nu>x|R_\circ>\nu;M\geq n)\\ &= \frac{h^F_{n,\nu}(\nu+x)}{h^F_{n,\nu}(\nu)},\ x>\circ, \end{aligned} \tag{۱۲}$$

از آنجا که $\psi_n^{Rnd}(\nu)=\int_\circ^\infty \bar{F}(x|\nu;n)\mathrm{d}x$، برهان کامل می‌شود.

قضیه ۲. توابع میانگین مانده رکورد $\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)$ و $\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu)$ در یک مدل GRR را می‌توان به ترتیب به صورت

$$\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu)=\frac{\int_\nu^\infty g^F_{n,\nu}(x)\mathrm{d}x}{g^F_{n,\nu}(\nu)},\quad \nu>\circ,$$
$$\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)=\frac{\int_\nu^\infty g^F_{n,\circ}(x)\mathrm{d}x}{g^F_{n,\circ}(\nu)},\quad \nu>\circ,$$

نوشت، که در آن

$$g^F_{n,\nu}(x)=\int_{F(x)}^{۱}\frac{۱}{۱-qu}\Big[-\log\big(\frac{۱-qu}{۱-qF(\nu)}\big)\Big]^n\mathrm{d}u.$$

برهان: با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۷) به طور مشابه با قضیه ۱ ثابت می‌شود.

در ادامه این بخش شرایط وجود میانگین مانده رکوردها در مدل GRR، بررسی می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود دنباله میانگین مانده رکورد nام، $n\geq\circ$، یک دنباله صعودی است.

قضیه ۳. در یک مدل GRR، اگر $E(X_۱)$ متناهی باشد، آنگاه به ازای هر ν که $F(\nu)<۱$ و هر $n\geq\circ$،
الف- $\psi_n^{Rnd}(\nu)<\infty$، ب- $\phi_n^{Rnd}(\nu)<\infty$، ج- $\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu)<\infty$ و د- $\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)<\infty$.

برهان: قسمت الف) ثابت می‌شود. اثبات سایر قسمت‌ها مشابه است. چون $\Big[-\log\big(\frac{۱-qu}{۱-qF(\nu)}\big)\Big]^n$ یک تابع صعودی از u است، بنابراین

$$\begin{aligned} h^F_{n,\nu}(x) &\leq \int_{F(x)}^{۱}\Big[-\log\big(\frac{۱-q}{۱-qF(\nu)}\big)\Big]^n\mathrm{d}u\\ &= \Big[-\log\big(\frac{p}{۱-qF(\nu)}\big)\Big]^n\bar{F}(x). \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی بالا داریم

$$\begin{aligned}\int_{\nu}^{\infty} h_{n,\nu}^{F}(x)\mathrm{d}x &\leq \Big[-\log\big(\frac{p}{1-qF(\nu)}\big)\Big]^{n}\int_{\nu}^{\infty}\bar{F}(x)\mathrm{d}x\\ &\leq \Big[-\log\big(\frac{p}{1-qF(\nu)}\big)\Big]^{n}\int_{0}^{\infty}\bar{F}(x)\mathrm{d}x\\ &= \Big[-\log\big(\frac{p}{1-qF(\nu)}\big)\Big]^{n}E(X_1).\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $E(X_1)$ متناهی است، در نتیجه $\int_{\nu}^{\infty} h_{n,\nu}^{F}(x)\mathrm{d}x$ متناهی است. از طرفی چون $F(\nu) < 1$، تابع $h_{n,\nu}^{F}(\nu)$ مخالف با صفر است. بنابراین با توجه به قضیه ۱، $\psi_{n}^{Rnd}(\nu)$ متناهی است.

قضیه ۴. در یک مدل GRR، برای هر $\nu > 0$ و $n \geq 0$، الف- $\psi_{n}^{Rnd}(\nu) \leq \psi_{n+1}^{Rnd}(\nu)$، ب- $\phi_{n}^{Rnd}(\nu) \leq \phi_{n+1}^{Rnd}(\nu)$، ج- $\underset{\sim}{\psi}_{n}^{Rnd}(\nu) \leq \underset{\sim}{\psi}_{n+1}^{Rnd}(\nu)$ و د- $\underset{\sim}{\phi}_{n}^{Rnd}(\nu) \leq \underset{\sim}{\phi}_{n+1}^{Rnd}(\nu)$.

برهان: قسمت الف) ثابت می‌شود. اثبات سایر قسمت‌ها مشابه است. ابتدا برقراری ترتیب نسبت درستنمایی

$$(R_n - \nu | R_0 > \nu; M \geq n) \leq_{lr} (R_{n+1} - \nu | R_0 > \nu; M \geq n+1), \tag{۱۳}$$

برای هر n را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه (۱۲)، تابع چگالی احتمال $(R_n - \nu | R_0 > \nu; M \geq n)$ برای $\nu > 0$، برابرست با

$$f(x|\nu;n) = \frac{f(x+\nu)}{h_{n,\nu}^{F}(\nu)}\Big[-\log\big(\frac{1-qF(x+\nu)}{1-qF(\nu)}\big)\Big]^{n}.$$

بنابراین نسبت توابع چگالی احتمال متغیرهای مانده رکوردهای $(n+1)$ام و nام به صورت

$$\frac{f(x|\nu;n+1)}{f(x|\nu;n)} = \frac{h_{n,\nu}^{F}(\nu)}{h_{n+1,\nu}^{F}(\nu)}\Big[-\log\big(\frac{1-qF(x+\nu)}{1-qF(\nu)}\big)\Big].$$

است. چون این نسبت یک تابع صعودی از x است، ترتیب نسبت درستنمایی (۱۳) برقرار است. پس بنابر لم ۱ ترتیب تصادفی

$$(R_n - \nu | R_0 > \nu; M \geq n) \leq_{st} (R_{n+1} - \nu | R_0 > \nu; M \geq n+1),$$

برای هر n برقرار است. در نتیجه بنابر لم ۲ داریم

$$\begin{aligned} \psi_n^{Rnd}(\nu) &= E(R_n - \nu | R_{\circ} > \nu; M \geq n) \\ &\leq E(R_{n+۱} - \nu | R_{\circ} > \nu; M \geq n+۱) \\ &= \psi_{n+۱}^{Rnd}(\nu). \end{aligned}$$

تذکر ۱. برای مدل کلاسیک رکوردها، نتیجه مشابهی در ارتباط با صعودی بودن دنباله میانگین مانده رکوردها توسط راقب و اسدی (۲۰۰۸) به دست آمده است.

۴ مشخص‌سازی توزیع جامعه

یکی از مسائل مهم در نظریه احتمال و آمار، مشخص‌سازی توزیع‌های احتمالی با استفاده از ویژگی‌ها و توابع خاص است. تعیین قواعد یا معیارهایی که منجر به تشخیص توزیع جامعه شود هم از جنبه نظری و هم از جنبه کاربردی مورد توجه پژوهشگران بسیاری بوده است. احسن الله (۲۰۱۷) منبع مناسبی از مطالعات گسترده صورت گرفته در زمینه مشخص‌سازی می‌باشد. در ارتباط با تابع میانگین مانده عمر $m(\nu)$، کوتز و شانبگ (۱۹۸۰) رابطه مشخص‌سازی

$$\bar{F}(x) = \frac{m(\circ)}{m(x)} \exp\Big\{ -\int_{\circ}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{m(y)} \Big\},$$

را ارائه کردند. راقب و اسدی (۲۰۰۸) با استفاده از تابع میانگین مانده رکوردها در مدل کلاسیک، نشان دادند

$$\bar{F}(x) = \exp\Big\{ -\int_{\circ}^{x} \frac{۱ + \psi_n'(y)}{\psi_n(y) - \psi_{n-۱}(y)} \mathrm{d}y \Big\}.$$

در ادامه نشان می‌دهیم در مدل GRR نیز هر یک از توابع میانگین مانده رکوردها، توزیع F را به طور یکتا مشخص می‌کنند.

قضیه ۵. در یک مدل GRR، به ازای p معلوم، دنباله $\psi_n^{Rnd}(\nu)$ توزیع F را مشخص می‌کند.

برهان: بر اساس قضیه ۱،

$$\frac{d\psi_n^{Rnd}(\nu)}{d\nu} = \frac{۱}{[h_{n,\nu}^F(\nu)]^{۲}} \Big(h_{n,\nu}^F(\nu) \frac{d}{d\nu} \int_{\nu}^{\infty} h_{n,\nu}^F(x) \mathrm{d}x - \frac{dh_{n,\nu}^F(\nu)}{d\nu} \int_{\nu}^{\infty} h_{n,\nu}^F(x) \mathrm{d}x \Big).$$

با توجه به رابطه (۱۰)،
$$\frac{dh^F_{n,\nu}(x)}{d\nu} = \frac{-nqf(\nu)}{1-qF(\nu)} h^F_{n-1,\nu}(x).$$
بنابراین
$$\frac{d}{d\nu}\int_\nu^\infty h^F_{n,\nu}(x)\mathrm{d}x = \int_\nu^\infty \frac{-nqf(\nu)}{1-qF(\nu)} h^F_{n-1,\nu}(x)\mathrm{d}x - h^F_{n,\nu}(\nu).$$
با استفاده از روابط به دست آمده به سادگی می‌توان نشان داد
$$\frac{d\psi^{Rnd}_n(\nu)}{d\nu} = \frac{nqf(\nu)}{1-qF(\nu)} \times \frac{h^F_{n-1,\nu}(\nu)}{h^F_{n,\nu}(\nu)}\left[\psi^{Rnd}_n(\nu) - \psi^{Rnd}_{n-1}(\nu)\right] - 1,$$
یا به طور معادل
$$\frac{1 + \frac{d\psi^{Rnd}_n(\nu)}{d\nu}}{\psi^{Rnd}_n(\nu) - \psi^{Rnd}_{n-1}(\nu)} = \frac{nqf(\nu)}{1-qF(\nu)} \times \frac{h^F_{n-1,\nu}(\nu)}{h^F_{n,\nu}(\nu)}.$$
از رابطه بالا نتیجه می‌گیریم
$$\frac{h^F_{n,x}(x)}{h^F_{n,0}(0)} = \exp\left\{-\int_0^x \frac{1+\frac{d\psi^{Rnd}_n(y)}{dy}}{\psi^{Rnd}_n(y) - \psi^{Rnd}_{n-1}(y)}\mathrm{d}y\right\}, \tag{۱۴}$$
که در آن
$$h^F_{n,0}(0) = \int_0^1 [-\log(1-qu)]^n \mathrm{d}u = \frac{\gamma_{n+1}(-\log p)}{q},$$
و $\gamma_n(k) = \int_0^k t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ تابع گامای ناقص پایین[1] است. چون $h^F_{n,0}(0)$ به ازای n و p داده شده، یک مقدار معلوم است، بنابر رابطه (۱۴) دنباله $\psi^{Rnd}_n(\nu)$ دنباله $h^F_{n,x}(x)$ را مشخص می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم دنباله $h^F_{n,x}(x)$، توزیع F را تعیین می‌کند. چون R_0 یا مشاهده اول دارای توزیع F است، بنابراین
$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= \sum_{n=0}^\infty P(R_0 > x; M = n)\\ &= \sum_{n=0}^\infty [P(R_0 > x; M \geq n) - P(R_0 > x; M \geq n+1)].\end{aligned}$$
در نتیجه با توجه به (۱۱)، $\bar{F}(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!}\left[(n+1)h^F_{n,x}(x) - h^F_{n+1,x}(x)\right]$ و برهان کامل می‌شود.

[1] Lower incomplete gamma function

قضیه ۶. در یک مدل GRR، به ازای p معلوم، دنباله $\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu)$ توزیع F را مشخص می‌کند.

برهان: با استفاده از قضیه ۲ و به روشی مشابه با برهان قضیه ۵ می‌توان نشان داد

$$\frac{g_{n,x}^F(x)}{g_{n,\circ}^F(\circ)} = \exp\Big\{-\int_\circ^x \frac{۱+\frac{d\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(y)}{dy}}{\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(y)-\underset{\sim}{\psi}_{n-۱}^{Rnd}(y)}\mathrm{d}y\Big\}, \tag{۱۵}$$

که در آن

$$g_{n,\circ}^F(\circ) = \int_\circ^۱ \frac{[-\log(۱-qu)]^n}{۱-qu}\mathrm{d}u = \frac{(-\log p)^{n+۱}}{n+۱}.$$

از طرفی

$$\bar{F}(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} P(R_\circ > x; M=n) = p\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{g_{n,x}^F(x)}{n!}. \tag{۱۶}$$

از رابطه (۱۵) نتیجه می‌شود دنباله $\underset{\sim}{\psi}_n^{Rnd}(\nu)$ دنباله $g_{n,x}^F(x)$ و از رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود دنباله $g_{n,x}^F(x)$ توزیع F مشخص می‌کند.

قضیه ۷. در یک مدل GRR، به ازای p معلوم، تابع $\phi_n^{Rnd}(\nu)$ توزیع F را مشخص می‌کند.

برهان: با استفاده از رابطه (۹)، به طور مشابه با برهان قضیه ۵ داریم

$$\frac{h_{n,\circ}^F(x)}{h_{n,\circ}^F(\circ)} = \exp\Big\{-\int_\circ^x \frac{۱+\frac{d\phi_n^{Rnd}(y)}{dy}}{\phi_n^{Rnd}(y)}\mathrm{d}y\Big\}.$$

پس تابع $\phi_n^{Rnd}(\nu)$ تابع $h_{n,\circ}^F(x)$ را مشخص می‌کند. از طرفی

$$h_{n,\circ}^F(x) = \frac{۱}{q}\big[\gamma_{n+۱}(-\log p) - \gamma_{n+۱}(-\log[۱-qF(x)])\big].$$

بنابراین توزیع F بر اساس $h_{n,\circ}^F(x)$ از طریق رابطه

$$F(x) = \frac{۱}{q}\big[۱-\exp\big\{-\gamma^{-۱}(\gamma_{n+۱}(-\log p) - qh_{n,\circ}^F(x))\big\}\big],$$

مشخص می‌شود.

قضیه ۸. در یک مدل GRR، به ازای p معلوم، تابع $\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)$ توزیع F را مشخص می‌کند.

برهان: بر اساس قضیه ۲ و به طور مشابه با برهان قضیه ۵ داریم

$$\frac{g^F_{n,\circ}(x)}{g^F_{n,\circ}(\circ)} = \exp\Big\{-\int_\circ^x \frac{۱+\frac{d\underset{\sim}{\phi}^{Rnd}_n(y)}{dy}}{\underset{\sim}{\phi}^{Rnd}_n(y)}\mathrm{d}y\Big\}.$$

بنابراین $g^F_{n,\circ}(x)$ تابع $\underset{\sim}{\phi}^{Rnd}_n(\nu)$ را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه

$$g^F_{n,\circ}(x) = \frac{۱}{q(n+۱)}\Big\{(-\log p)^{n+۱} - [-\log(۱-qF(x))]^{n+۱}\Big\},$$

توزیع F عبارت است از

$$F(x) = \frac{۱}{q}\Big\{۱-\exp\big(-\big[(-\log p)^{n+۱} - q(n+۱)g^F_{n,\circ}(x)\big]^{\frac{۱}{n+۱}}\big)\Big\}.$$

۵ کاربرد

یکی از کاربردهایی که رکوردها در مدل تصادفی هندسی دارند، مدل‌های کاریابی[1] در اقتصاد است. این مدل که نخستین بار توسط بارلوی (۲۰۰۳) معرفی شده است، در ادامه شرح داده می‌شود. فرض کنید در مقطع زمانی iام، متقاضی کار (کارگر) با احتمال $p_۱$ یک پیشنهاد شغلی با دستمزد X_i دریافت کند به طوری که دستمزدها به طور مستقل از توزیع F پیروی کنند. غیر تباهیده بودن تابع توزیع F می‌تواند منعکس کننده تفاوت در سیاست‌های دستمزدی کارفرمایان باشد. کارگر پس از دریافت پیشنهاد شغلی می‌تواند در شغل فعلی خود بماند یا پیشنهاد جدید را بپذیرد و در شغل جدید مشغول به کار شود. در هر مقطع زمانی با احتمال $p_۲$ به شغل فعلی کارگر خاتمه داده می‌شود و او باید به جستجوی شغل جدید بپردازد. یک کارگر که در مقطعی شغلش را از دست داده است در نظر بگیرید. فرض کنید N تمام پیشنهادهای شغلی باشد که در فاصله دو مقطع زمانی متوالی برکناری از کار دریافت می‌کند. همچنین فرض کنید M تعداد دفعاتی در این فاصله باشد که پیشنهادهای جدید را می‌پذیرد و داوطلبانه شغل خود را تغییر می‌دهد. بنابراین تعداد شغل‌های مختلفی که کارگر در فاصله بین دو بار برکناری متوالی در آن‌ها استخدام خواهد شد برابر با $M+۱$ است. به سادگی می‌توان نشان داد N یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $p = p_۲[p_۱+p_۲(۱-p_۱)]^{-۱}$ است.

فرض کنید $X_۱,\dots,X_N$ دستمزدهای شغل‌های پیشنهاد شده به یک کارگر در فاصله بین دو برکناری متوالی او باشند. چون کارگر همواره شغل‌های با دستمزد بالاتر از شغل فعلی خود را می‌پذیرد، دستمزد nامین شغلی که قبول می‌کند برابر با $(n-۱)$امین رکورد از این دنباله است. بنابراین دستمزد شغل‌های پذیرفته شده توسط یک

[1] Job search models

کارگر، رکوردها در یک مدل GRR هستند. اقتصاددانان حوزه کار و اشتغال علاقه مند به شناسایی توزیع F بر اساس مشاهدات هستند. اگر چه این کار با استفاده از تابع توزیع تجربی دستمزدها قابل انجام است اما اغلب دستمزدهای کلیه مشاغل پیشنهادی توسط کارگران گزارش نمی‌شوند. اما از آنجایی که میزان افزایش دستمزدهای مشاغل جدید بیشتر مورد توجه کارگران است می‌توان از دنباله میانگین افزایش دستمزدها برای شناسایی F استفاده کرد. با فرض اینکه حداقل دستمزد اولین شغل پیشنهادی ν و کارگر به جز این شغل حداقل (دقیقاً) n شغل جدید را پذیرفته باشد، دنباله میانگین اختلاف دستمزدهای جدید با ν، $\{E(R_n - \nu | R_\circ > \nu; M \geq n), n \geq \circ\}$ ($\{E(R_n - \nu | R_\circ > \nu; M = n), n \geq \circ\}$)، همان دنباله میانگین مانده رکوردها در مدل GRR است که بنابر قضیه ۵ توزیع F را مشخص می‌کند. همچنین توابع $\phi_n^{Rnd}(\nu)$ و $\underset{\sim}{\phi}_n^{Rnd}(\nu)$ به عنوان میانگین تفاوت دستمزد شغل جدید با ν، در صورتی که برای این شغل دستمزدی بالاتر از ν پیشنهاد شده باشد، می‌توانند برای تشخیص توزیع دستمزدها مورد استفاده قرار گیرند.

بحث و نتیجه‌گیری

در اکثر پدیده‌هایی که با آن‌ها سر و کار داریم، تعداد مشاهدات تصادفی هستند. بنابراین برای استفاده از نتایج نظریه رکوردها، توسعه این نظریه برای مدل‌های تصادفی لازم است. در این مقاله تعابیر مختلفی از مفهوم میانگین مانده رکوردها در مدل تصادفی و نمایشی برای هر یک از آن‌ها بر حسب تابع توزیع در مدل تصادفی هندسی ارائه گردید. همچنین شرایط وجود و صعودی بودن دنباله میانگین مانده رکوردها مورد بررسی قرار گرفت. سپس نشان داده شد توزیع جامعه بر اساس دنباله میانگین مانده رکوردها در مدل تصادفی هندسی قابل تشخیص است. در پایان به کاربردی از نتایج مشخص‌سازی در مدل‌های کاریابی اشاره شد که پژوهشگران می‌توانند این نتایج را در رویدادهای مشابه مانند مدل‌های شوک نیز به کار گیرند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران گرانقدر و سردبیر محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود سطح کیفی و افزایش غنای مقاله شده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

صابرزاده، ز. و رزمخواه، م. (۱۳۹۸)، میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال، مجله علوم آماری ایران، ۱۳(۱)، ۱۳۹–۱۵۶.

Abd Elgawad, M. A., Barakat, H. M. and Xiong, S. (2020), Limit Distributions of Random Record Model in a Stationary Gaussian Sequence, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **49**(5), 1099–1119.

Ahsanullah, M. (2017), *Characterizations of Univariate Continuous Distributions*, Atlantis-Press, Paris.

Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B. (2015), *Records via Probability Theory*, Springer, Berlin.

Amini, M. and Balakrishnan, N. (2015), Pooled Parametric Inference for Minimal Repair Systems, *Computational Statistics*, **30**, 605–623.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley, New York.

Asadi, M. and Bayramoglu, I. (2006), The Mean Residual Life Function of a k-out-of-n Structure at the System Level. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314–318.

Asadi, M. and Raqab, M. Z. (2010), The Mean Residual of Record Values at the Level of Previous Records, *Metrika*, **72**, 51–64.

Aswin, I. C., Sankaran, P. G. and Sunoj, S. M. (2023), Some Reliability Aspects of Record Values Using Quantile Functions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **52**, 1–21.

Balakrishnan, N., Kamps, U. and Kateri, M. (2009), Minimal Repair Under a Step-Stress Test, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1548–1558.

Barakat, H. M. (2012), Asymptotic Behavior of the Record Value Sequence, *Journal of the Korean Statistical Society*, **41**, 369–374.

Barakat, H. M., Abd Elgawad M. A. and Ting Y. (2017), Asymptotic Behavior of Record Values with Random Indices, *ProbStat Forum*, **10**, 16–22.

Barlevy, G. (2003), Estimating Models of on-the-job Search Using Record Statistics, *NBER working paper,* No. w10146.

Barlevy, G. and Nagaraja, H. N. (2006), Characterizations in a Random Record Model with a non-Identically Distributed Initial Record, *Journal of Applied Probability*, **43**, 1119–1136.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Bdair, O. M. and Raqab, M. Z. (2014), Mean Residual Life of kth Records Under Double Monitoring, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **37**(2), 457–464.

Block, H. W., Borges, W. S. and Savits, T. H. (1985), Age-Dependent Minimal Repair, *Journal of Applied Probability*, **22**, 370–385.

Bruss, F. T. (1988), Invariant Record Processes and Applications to Best Choice Modelling, *Stochastic Processes and their Applications*, **30**, 303–316.

Bunge, J. A. and Nagaraja, H. N. (1991), The Distributions of Certain Record Statistics from a Random Number of Observations, *Stochastic Processes and Their Applications*, **38**(1), 167–183.

Fashandi, M., Khosravi, A. and Ahmadi, J. (2014), Characterizations Using Entropies of Records in a Geometric Random Record Model, *Journal of The Iranian Statistical Society*, **13**(1), 31–42.

Guess, F. and Proschan, F. (1988), Mean Residual Life: Theory and Applications, In *Handbook of Statistics: Quality Control and Reliability*, Vol. 7, pp. 215–224, North-Holland, Amsterdam.

Gupta, R. C. and Kirmani, S. N. U. A. (1988), Closure and Monotonicity Properties of Nonhomogeneous Poisson Processes and Record Values, *Probability in the Engineering and Information Science*, **2**, 475–484.

Hofmann, G. and Nagaraja, H. N. (2002), A Random Power Record Model, *Statistics and Probability Letters*, **56**, 345–353.

Kamps, U. (1994), Reliability Properties of Record Values from non-Identically Distributed Random Variables, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **23**, 2101–2112.

Khaledi, B., Amiripour, F., Hu, T. and Shojaei, S. (2009), Some New Results on Stochastic Comparisons of Record Values, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **38**, 2056–2066.

Kotz, S. and Shanbhag, D. N., (1980), Some New Approaches to Probability Distributions, *Journal of Advances in Applied Probability*, **12**, 903–921.

Kundu, C. and Nanda, A. K., (2010), On Generalized Mean Residual Life of Record Values, *Statistics and Probability Letters*, **80**, 797–806.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York.

Meeker, W. and Escobar, L. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley, New York.

Nagaraja, H. N. and Barlevy, G. (2003), Charaterizations Using Record Moments in a Random Record Model and Applications, *Journal of Applied Probability*, **40**, 826–833.

Nanda, P. and Kayal, S. (2019), Mean Inactivity Time of Lower Record Values, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **48**(20), 5145–5164.

Raqab, M. Z. and Asadi, M. (2008), On the Mean Residual Life of Records, *Journal Statistical Planning and Inference*, **138**, 3660–3666.

Raqab, M. Z. and Asadi, M. (2010), Some Results on the Mean Residual Waiting Time of Records, *Statistics*, **44**(5), 493–504.

Shaked, M. and Shantikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.