



## Multi-class Depth-based Classification for Multivariate Data

Bayat, S. , Dehghan, S. 

Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

**Corresponding author:** S. Dehghan, sa\_dehghan@sbu.ac.ir

Received: 14/1/2023 Revised: 13/8/2023 Accepted and Published Online: 17/8/2023.

### Introduction

In a supervised classification problem with  $J$  classes, we have  $n_j$  labeled observations from the  $j$ -th class,  $j = 1, \dots, J$ . We use this training sample consisting of  $n = \sum_{j=1}^J n_j$  observations to construct a decision rule for classifying an unlabeled observation  $\mathbf{x}$  to one of these  $J$  classes. Popular parametric classifiers like linear discriminant analysis and quadratic discriminant analysis are motivated by parametric model assumptions. So, they may lead to poor classification when these assumptions fail to hold. This paper presents a nonparametric multi-class depth-based classification approach for multivariate data. This approach is easy to implement rather than most existing nonparametric methods that have computational complexity. If the assumption of the elliptical symmetry holds, this method is equivalent to the Bayes optimal rule. The performance of the depth-based classifiers is evaluated using a Monte Carlo study as well as a real data example and is compared to that of several competitors.

### Material and Methods

A depth function is aimed at ordering points in a space according to their centrality with respect to a distribution  $F$ . The larger the depth of a point  $\mathbf{x}$ , the more central  $\mathbf{x}$  is with respect to  $F$ . It is a useful tool in the multidimensional case where ordering the points from the inner to the outer part of a distribution or sample is not trivial task. Formally, a depth function is a bounded function that satisfies certain properties including affine invariance, maximised somewhere in the center of the distribution, monotonicity relative to deepest point, and vanishing at infinity. Therefore, the depth functions of-

for a chance to exploit nonparametric methods in multivariate data analysis. Accordingly, several notions of multivariate depth have been proposed in the literature, and the field of applications of data depth is vast and still growing. This paper presents an overview of the depth function concept, and a non-parametric multi-class depth-based classification approach for multivariate data has been investigated. Moreover, the methodology has been verified using a simulation study and a real data set example. Calculations have been performed in R software, and R codes are available by request to the author.

### Results and Discussion

The depth-based classification approach for multivariate data is equivalent to the Bayes optimal rule under elliptic symmetry. Indeed, under elliptic symmetry, the density function of a class can be expressed as a function of affine invariant depth functions, and hence the depth contours coincide with the density contours. Using both empirical and theoretical arguments, we consider the properties of the depth-based classification methods, and show that these classifiers can be particularly effective. We have used some simulated data sets to evaluate the performance of the depth-based classifiers. Moreover, to illustrate the method developed in this paper, we have applied the classifiers on a well-known data set.

### Conclusion

In this article, the depth function and related classifiers have been investigated. We have analyzed several data sets simulated from elliptic as well as non-elliptic multivariate distributions. Moreover, the Swiss banknote data set has been analyzed for further evaluation of depth-based classifiers. The results showed that the maximum depth classifier based on the Mahalanobis and half-space depth functions has a good performance.

**Keywords:** Depth function, Classification, Bayes optimal rule, Elliptical symmetry.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62H30 62G99.



## رده‌بندی چند-رده‌ای مبتنی بر تابع ژرفا برای داده‌های چندمتغیره

سارا بیات، سکینه دهقان

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

نویسنده مسئول: سکینه دهقان، sa\_dehghan@sbu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۲۲ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۵/۲۶

**چکیده:** این مقاله به بیان یک رویکرد ناپارامتری بر اساس تابع ژرفا برای رده‌بندی داده‌های چندمتغیره به چندین رده می‌پردازد. پیاده‌سازی این روش برخلاف اغلب روش‌های ناپارامتری دارای پیچیدگی محاسباتی نیست و در صورت برقراری فرض تقارن بیضوی مشاهدات، با قاعده بهینه بیزی معادل است. ارزیابی عملکرد این رده‌بندی‌ساز بر اساس توابع ژرفای مختلف، بر اساس مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی انجام می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** تابع ژرفا، رده‌بندی، تقارن بیضوی، قاعده بهینه بیزی  
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62H30، 62G99.

### ۱ مقدمه

یکی از تمایزات بنیادین فنون یادگیری ماشین، بین روش‌های راهنماییده و ناراهنماییده است. زمانی از الگوریتم‌های یادگیری راهنماییده در رده‌بندی و پیشگویی استفاده می‌شود که داده‌هایی در دسترس است که در آن‌ها مقدار برآمد مورد نظر مشخص شده است. هنگامی که متغیر برآمدی برای پیشگویی یا رده‌بندی وجود ندارد، از الگوریتم‌های یادگیری ناراهنماییده استفاده می‌شود. قواعد پیوند، روش‌های کاهش بُعد و فنون خوشه‌بندی، همگی روش‌های ناراهنماییده هستند. به طور خاص، رده‌بندی که یک موضوع کاربردی در علم آمار است، روشی راهنماییده به منظور اختصاص یک مشاهده رده‌بندی نشده به یکی از دو یا چندین گروه یا جمعیت بر اساس اطلاعات تعدادی از متغیرها است. تجزیه و تحلیل چندمتغیره کلاسیک بر فرض نرمال چندمتغیره استوار است که از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های بیزی،



تحلیل تشخیصی خطی درجه اول و درجه دوم و ... اشاره کرد. از طرفی در بسیاری از آزمایشات تصادفی، داده‌ها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کنند. همچنین، برخی از رویکردهای پارامتری تحت تأثیر مشاهدات دورافتاده هستند؛ از این رو رویکردهای ناپارامتری برای رده‌بندی مشاهدات نسبت به رویکردهای پارامتری برتری دارند. از جمله رویکردهای ناپارامتری می‌توان به ماشین بردار تکیه‌گاه (وینیک، ۱۹۹۵)، قاعده  $K$  نزدیکترین همسایه (کاور و هارت، ۱۹۶۷) و قواعد رده‌بندی مبتنی بر توابع دورافتادگی رتبه‌ای (هوبرت و همکاران، ۲۰۱۷) اشاره کرد.

ژرفای داده ابزاری برای اندازه‌گیری میزان ژرفا<sup>۱</sup> بودن یا دور افتاده<sup>۲</sup> بودن یک نقطه معین نسبت به توده داده‌های چندمتغیره یا توزیع متناظر با آن است. هرچه یک نقطه نسبت به یک مجموعه داده و یا یک توزیع مرکزی‌تر باشد، دارای ژرفای بیش‌تری است و بالعکس میزان دورافتادگی آن کمتر است. به این ترتیب، راه‌های جدید و آسانی را برای تعیین بسیاری از ویژگی‌های پیچیده توزیع چندمتغیره، از جمله مکان، چندک‌ها، مقیاس، چولگی و کشیدگی ایجاد می‌کند. به بیان دقیق‌تر، با توجه به اینکه در روش‌های ناپارامتری یک‌متغیره، رتبه مشاهده‌ها نقش بسیار تعیین‌کننده‌ای دارد، برای تعمیم این روش‌ها به حالت چندمتغیره، باید در این حالت نیز گونه‌ای رتبه‌بندی از مشاهده‌ها امکان‌پذیر باشد. در حالت یک‌متغیره، ابتدا مشاهده‌ها را مرتب کرده و سپس رتبه‌بندی می‌کنیم. تعمیم این روش به  $RP$  برای  $p \geq 2$  به دلیل فقدان چنین ترتیبی در  $RP$ ، بی‌نتیجه است. برای جبران این نقیصه می‌توان ابتدا مرکزی برای داده‌های چندمتغیره تعیین کرد. این نقطه دارای بیشترین ژرفا خواهد بود و مابقی مشاهده‌ها هرچه از مرکز در تمامی جهات دورتر باشند، ژرفای کمتری دارند. نقطه با بزرگترین مقدار ژرفا، بیشترین رتبه و به سایر نقاط به ترتیب بر اساس مقدار ژرفایشان رتبه اختصاص داده می‌شود. بنابراین بر اساس مقدار ژرفای نقاط، مشاهده‌ها به صورت مرکز به بیرون رتبه‌بندی می‌شوند. روش‌های مختلفی برای به دست آوردن مرکز وجود دارد. تا به حال در حوزه‌های مختلف آمار بر اساس تابع ژرفا و رتبه‌بندی مبتنی بر آن پژوهش‌های بسیاری انجام شده است که از آن جمله می‌توان به شناسایی نقاط دورافتاده بر اساس تابع ژرفا از دهقان و فریدروحانی (۲۰۲۱) اشاره کرد. در این مقاله، به دنبال معرفی روش رده‌بندی چندمتغیره مبتنی بر تابع ژرفا هستیم. بدین منظور، در بخش ۲، ابتدا مفهوم تابع ژرفا بیان شده و سپس چند تابع ژرفا مرور می‌شوند. در بخش ۳، قاعده رده‌بندی مبتنی بر تابع ژرفا مطرح می‌شود. مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی نیز به ترتیب در بخش‌های ۴ و ۵ بیان می‌شوند.

## ۲ تابع ژرفا

فرض کنید اندازه احتمال  $P$  بر فضای  $RP$  داده شده و  $F$  تابع توزیع متناظر با آن باشد. ژرفای داده، اندازه‌ای از میزان ژرف بودن یا دورافتاده بودن یک نقطه نسبت به توده داده‌ها یا توزیع  $F$  است. هر تابع  $D(\cdot, F)$  که ترتیبی مرکز به بیرون از نقاط  $x$  متعلق به  $RP$  فراهم کند، تابع ژرفای متناظر با  $F$  نامیده می‌شود. بنابراین بر اساس تابع ژرفای مفروض، نقاط  $p$  متغیره به نحوی رتبه‌بندی می‌شوند که ژرفای بزرگتر نشان‌دهنده مرکزی‌تر بودن نقاط و ژرفای

<sup>1</sup>Deep

<sup>2</sup>Outlier

کوچکتر نشان دهنده دورافتاده‌تر بودن آنها است. تحت تابع ژرفای مفروض، نقطه یا میانگین نقاط با بیشترین مقدار ژرفا، مرکز را تشکیل می‌دهند. در ادامه چند تابع ژرفا مرور می‌شوند.

ژرفای نیم‌فضا<sup>۱</sup> (توکی، ۱۹۷۵) نقطه  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  نسبت به توزیع  $F$  به صورت

$$HD(\mathbf{x}, F) = \inf \left\{ P(H) : H \text{ نیم‌فضایی بسته شامل } \mathbf{x} \text{ در فضای } p \text{ بعدی است} \right\}$$

تعریف می‌شود که در آن  $P(H)$  احتمال در برداشتن نیم‌فضای  $H$  توسط توزیع  $F$  است. ژرفای نیم‌فضای نمونه‌ای نقطه  $\mathbf{x}$  نسبت به نمونه  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  در  $\mathbb{R}^p$  عبارت است از کمترین تعداد نمونه تقسیم بر تعداد کل نمونه در بین تمامی نیم‌فضاهای بسته شامل نقطه  $\mathbf{x}$ .

ژرفای زونوئید<sup>۲</sup> (دایچرهوف و همکاران، ۱۹۹۶) نقطه  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  نسبت به توزیع  $F$  به صورت

$$ZD(\mathbf{x}, F) = \max \{ \alpha : \mathbf{x} \in D_\alpha(F) \}$$

تعریف می‌شود، که در آن  $D_\alpha(F)$  ناحیه زونوئید نامیده شده،  $D_\alpha(F) = R^d$  و برای  $\alpha \in (0, 1]$  به صورت

$$D_\alpha(F) = \left\{ \int_{R^d} \mathbf{x}g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}) : 0 \leq g \leq \frac{1}{\alpha}, \int_{R^d} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}) = 1 \right\}$$

تعریف می‌شود. تابع ژرفای نمونه‌ای زونوئید نیز با جایگذاری

$$D_\alpha(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq \frac{1}{\alpha}, i = 1, \dots, n \right\}$$

به جای  $D_\alpha(F)$  در فرمول تابع ژرفای زونوئید حاصل می‌شود.

ژرفای ماهالانوبیس<sup>۳</sup> (لیو و سینگ، ۱۹۹۳) نقطه  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  نسبت به توزیع  $F$  به صورت

$$MD(\mathbf{x}, F) = \frac{1}{1 + d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_F)} = \frac{1}{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_F)^T \boldsymbol{\Sigma}_F^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_F)}$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\boldsymbol{\mu}_F$  و  $\boldsymbol{\Sigma}_F$  به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس توزیع  $F$  و  $d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_F) = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_F)^T \boldsymbol{\Sigma}_F^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_F)$  فاصله ماهالانوبیس بین  $\mathbf{x}$  و  $\boldsymbol{\mu}_F$  است. برای به دست آوردن نسخه نمونه‌ای ژرفای ماهالانوبیس نقطه  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  کافی است به جای  $\boldsymbol{\mu}_F$  و  $\boldsymbol{\Sigma}_F$  برآورد نمونه‌ای آن‌ها را جایگزین

<sup>۱</sup>Halfspace Depth

<sup>۲</sup>Zonoid Depth

<sup>۳</sup>Mahalanobis Depth

کنیم، که به طور معمول به ترتیب از بردار میانگین نمونه‌ای و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای استفاده می‌شود.

ژرفای تصویرمبنا<sup>۱</sup> (ژو، ۲۰۰۳) نقطه  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  نسبت به توزیع  $F$  به صورت

$$PD(\mathbf{x}, F) = \frac{1}{1 + \tilde{O}_P(\mathbf{x}, F)}$$

تعریف می‌شود که در آن  $\tilde{O}_P(\mathbf{x}, F)$  به صورت

$$\tilde{O}_P(\mathbf{x}, F) = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \left| \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{x} - \mu(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}})}{\sigma(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}})} \right|$$

تعریف می‌شود که  $\mu(\cdot)$  و  $\sigma(\cdot)$  به ترتیب اندازه یک‌متغیره مکان و مقیاس توزیع  $F$  هستند، به گونه‌ای که هرگاه  $\mathbf{u}^T \mathbf{x} - \mu(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}}) = \sigma(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}}) = 0$  عبارت  $\left| \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{x} - \mu(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}})}{\sigma(F_{\mathbf{u}^T \mathbf{X}})} \right|$  مقدار صفر را اختیار می‌کند. برای به دست آوردن نسخه نمونه‌ای ژرفای تصویرپایه کافی است به جای توزیع  $F$  همتای نمونه‌ای آن،  $F_n$  جایگزین شود.

ژرفای فضایی<sup>۲</sup> (وردی و ژانگ، ۲۰۰۰) نقطه  $\mathbf{x}$  نسبت به توزیع  $F$  به صورت

$$SD(\mathbf{x}, F) = 1 - \|E(S(\mathbf{x} - \mathbf{X}))\|$$

تعریف می‌شود که در آن

$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} & \mathbf{x} \neq 0, \\ 0 & \mathbf{x} = 0, \end{cases}$$

تابع علامت برداری در  $\mathbb{R}^p$  است. مقدار تابع فضایی نمونه‌ای نقطه  $\mathbf{x}$  به صورت

$$SD(\mathbf{x}, F_n) = 1 - \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) \right\|$$

تعریف می‌شود.

<sup>۱</sup>Projection based Depth

<sup>۲</sup>Spatial Depth

### ۳ قاعده رده‌بندی ژرفا مبنا

هدف هر قاعده رده‌بندی، یافتن قاعده یا ابزاری است که این امکان را فراهم کند که یک مشاهده را به یکی از چندین رده (یا کلاس) متفاوت اختصاص دهد. فرض کنید  $\mathbf{X}$  یک بردار تصادفی  $p$ -بعدی باشد که دارای یکی از  $J$ ،  $J \geq 2$ ، توزیع مطلقاً پیوسته  $F_1, \dots, F_J$  در  $R^p$  است. یک رده‌بندی‌ساز فضای  $R^p$  را به  $J$  بخش مجزا  $A_1, \dots, A_J$ ،  $\bigcup_{j=1}^J A_j = R^p$ ، تقسیم می‌کند، به طوری که  $\mathbf{x}$  به  $F_j$  اختصاص می‌یابد، اگر و تنها اگر  $\mathbf{x} \in A_j$ . به طور معادل

$$\mathbf{x} \in A_j \Leftrightarrow \text{class}(\mathbf{x}) = j.$$

فرض کنید  $f_j$  و  $\pi_j$  به ترتیب تابع چگالی و توزیع پیشین متناظر با  $F_j$  هستند،  $j = 1, \dots, J$ . قاعده بهینه بیزی، یک مشاهده را به رده یا توزیع با بیشترین احتمال پسین اختصاص می‌دهد. به عبارت دیگر  $\mathbf{x}$  به زامین کلاس اختصاص داده می‌شود، هرگاه  $\pi_j f_j(\mathbf{x})$  بیش‌ترین باشد:

$$\text{class}_B(x) = \arg \max_{1 \leq j \leq J} \pi_j f_j(x). \quad (1)$$

بر اساس این ایده و با توجه به مفهوم ژرفای داده، انتظار می‌رود که بر اساس تابع ژرفا نیز بتوان یک قاعده رده‌بندی تعریف است؛ زیرا ژرفای داده‌ها در مورد اینکه یک مشاهده چندمتغیره نسبت به توزیع مشخص  $F$  یا یک توده داده چندمتغیره چقدر دورافتاده است اطلاع می‌دهد. اگر یک مشاهده مرکزی باشد، مقدار ژرفای آن بزرگ و اگر یک مشاهده دورافتاده باشد، مقدار ژرفای آن کوچک خواهد بود. بنابراین ژرفای کوچک نشان دهنده دوری مشاهده مورد نظر نسبت به توزیع  $F$  است. **گوش و چادوری (۲۰۰۵)** یک قاعده رده‌بندی مبتنی بر تابع ژرفا برای اختصاص یک مشاهده جدید به هر یک از  $J$  رده متفاوت را به صورت

$$\text{class}_D(\mathbf{x}) = \arg \max_{1 \leq j \leq J} D(\mathbf{x}, F_j)$$

تعریف کردند. به بیان دقیق‌تر، ژرفای مشاهده مورد نظر نسبت به همه رده‌ها محاسبه می‌شود، سپس به رده‌ای با بیش‌ترین ژرفا اختصاص می‌یابد. بر اساس لم زیر نتیجه می‌شود، می‌توان تابع ژرفا را بر حسب تابع چگالی احتمال برای توزیع‌های متقارن بیضوی، بیان کرد.

لم ۱. (ژو و سرفلینگ، ۲۰۰۰) فرض کنید  $F_j$  توزیع متقارن بیضوی با پارامتر مکان  $\theta_j$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma_j$  باشد. بنابراین تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_j(\mathbf{x}) = |\Sigma_j|^{-\frac{1}{2}} h((\mathbf{x} - \theta_j)' \Sigma_j^{-1} (\mathbf{x} - \theta_j))$$

۳۲۴ ..... رده‌بندی چند-رده‌ای مبتنی بر تابع ژرفا

است که در آن  $h(\cdot)$  یک تابع اکیداً نزولی، پیوسته و اسکالر نامنفی است. اگر تابع ژرفا ناوردای آفین<sup>۱</sup> باشد، سپس تابع صعودی  $\omega(\cdot)$  وجود خواهد داشت که  $f_j(\mathbf{x}) = \omega(D(\mathbf{x}, F_j))$ .

بر اساس این لم، گوش و چادوری (۲۰۰۵) نشان دادند رده‌بندی‌ساز بیشترین ژرفا تحت برخی شرایط رده‌بندی‌ساز بیزی است. در ادامه این قضیه بیان می‌شود.

قضیه ۰۱. (گوش و چادوری، ۲۰۰۵) تحت فرض تقارن بیضوی توزیع‌های  $F_1, \dots, F_J$  با ماتریسهای کوواریانس برابر، چنانچه احتمالات پیشین برابر باشند، رده‌بندی‌ساز (۱)، رده‌بندی‌ساز بیزی است.

برهان: فرض کنید  $\text{class}_D(\mathbf{x})$  و  $\text{class}_B(\mathbf{x})$  به‌ترتیب رده‌بندی‌ساز ژرفا مبنا و بیزی برای مشاهده  $\mathbf{x}$  باشند. سپس

$$\text{class}_B(\mathbf{x}) = \arg \max_{1 \leq j \leq J} \pi_j f_j(\mathbf{x}) = \arg \max_{1 \leq j \leq J} \omega(D(\mathbf{x}, F_j)).$$

تساوی آخر از برابری  $\pi_1 = \dots = \pi_J$  و لم ۱ نتیجه شده است. حال با توجه به صعودی بودن تابع  $\omega(\cdot)$ ، یافتن مقدار  $j$  ماکسیم‌کننده  $\omega(D(\mathbf{x}, F_j))$  معادل یافتن مقدار  $j$  ماکسیم‌کننده  $D(\mathbf{x}, F_j)$  است. بنابراین نتیجه مورد نظر حاصل شد.

در عمل، به دلیل نامعلوم بودن تابع توزیع، تابع ژرفا نیز نامعلوم است؛ و باید از نسخه تجربی آن استفاده کرد. در این صورت نسخه تجربی قاعده رده‌بندی نیز بر اساس تابع ژرفای تجربی تعریف می‌شود. چنانچه تابع ژرفای تجربی در شرط سازگاری  $\circ \rightarrow \sup_{\mathbf{x}} |D(\mathbf{x}, F_n) - D(\mathbf{x}, F)|$  صدق کند، این جایگزینی توجیه‌پذیر است. خوشبختانه شرط سازگاری برای توابع ژرفای نیم‌فضا، سادگی و زونوئید برقرار است، (ژو، ۲۰۰۳). همچنین تحت متناهی بودن گشتاورهای مرتبه دوم برای تابع ژرفای ماهالانوبیس و تصویر-مبنا نیز برقرار است، (لیو و سینگ، ۱۹۹۳).

## ۴ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد روش پیشنهادی بر اساس توابع ژرفای مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته و با الگوریتم  $k$  نزدیکترین همسایه، K-NN، که یکی از الگوریتم‌های راهنمایی‌دهنده در یادگیری ماشین برای رده‌بندی داده‌ها است، مقایسه می‌شود. ایده رده‌بندی K-NN شامل دو مرحله است؛ نخست نزدیکترین همسایه‌ها را تعیین می‌کند و در مرحله دوم رده‌ها با استفاده از آن همسایگان تعیین می‌شوند. مزیت عمده روش K-NN نداشتن فرضیه‌های پارامتری است، اما دارای پیچیدگی‌های محاسباتی است، به طوری که یافتن همسایه‌ها در یک مجموعه داده حجیم

<sup>۱</sup>Affine invariant



بسیار زمان بر است. فرض کنید  $\pi_1$  و  $\pi_2$  توزیع‌های دو متغیره متقارن بیضوی به ترتیب با مرکز تقارن  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma_1$  و  $\Sigma_2$  باشند. همچنین فرض کنید احتمالات پیشین برابر هستند. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $\pi_1$  و  $Y_1, \dots, Y_m$  یک نمونه تصادفی از  $\pi_2$  باشند. بردارهای تصادفی جدید  $Z_1, \dots, Z_m$  از  $\pi_1$  و  $Z_{m+1}, \dots, Z_{2m}$  از  $\pi_2$  تولید می‌شوند. اندازه نمونه  $n$  و  $m$  برابر با ۱۰۰ و تعداد تکرار شبیه‌سازی ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. نمونه‌ها از توزیع نرمال دو متغیره و توزیع لاپلاس دو متغیره تولید می‌شوند و رده‌بندی‌سازها بر اساس توابع ژرفای نیم‌فضا، ماها لانویس، تصویر-مینا، فضایی و زنوئید محاسبه شده‌اند. برای محاسبه توابع ژرفا از بسته آماری ddalpha در نرم افزار R استفاده شده است. برای مقایسه عملکرد رده‌بندی‌سازها از نرخ بدرده‌بندی<sup>۱</sup> و معیارهای حساسیت<sup>۲</sup> و مشخص‌سازی<sup>۳</sup> استفاده می‌شود. واضح است خطایی که ممکن است در هنگام رده‌بندی رخ دهد، اختصاص دادن مشاهده جدید به یک زیر جامعه است در حالی که در اصل به زیر جامعه دیگری تعلق داشته

باشد. بنابراین احتمال بدرده‌بندی به صورت  $\Delta = \sum_{j=1}^J \pi_j P(x \notin A_j | F_j)$  تعریف می‌شود.

معیارهای حساسیت و مشخص‌سازی از دیگر معیارهای تشخیص درستی رده‌بندی هستند. فرض کنید  $C_1$  و  $C_2$  رده ۱ و ۲ باشند. تعریف کنید  $n_{1,1}$  تعداد اعضای  $C_1$  که به درستی رده‌بندی شده‌اند،  $n_{2,2}$  تعداد اعضای  $C_2$  که به درستی رده‌بندی شده‌اند،  $n_{1,2}$  تعداد اعضای  $C_1$  که به نادرستی در  $C_2$  رده‌بندی شده‌اند و  $n_{2,1}$  تعداد اعضای  $C_2$  که به نادرستی در  $C_1$  رده‌بندی شده‌اند. فرض کنید رده‌بندی درست عضویت در رده  $C_1$ ، از رده  $C_2$  مهم‌تر باشد، در این صورت حساسیت یک رده‌بندی کننده، توانایی آن در تشخیص عضویت در رده مهم، اعضای  $C_1$  است، که به صورت  $\frac{n_{1,1}}{n_{1,1} + n_{1,2}}$  تعریف می‌شود. همچنین مشخص‌سازی یک رده‌بندی کننده، به صورت  $\frac{n_{2,2}}{n_{2,2} + n_{2,1}}$  تعریف می‌شود. ادامه فرض کنید،  $C_1$  رده‌ای باشد که در آن نمونه‌ها بر اساس  $\mu_1$  و  $\Sigma_1$  و  $C_2$  رده‌ای باشد که در آن نمونه‌ها بر اساس  $\mu_2$  و  $\Sigma_2$  تولید می‌شوند.

در اولین سناریوی شبیه‌سازی به بررسی عملکرد روش‌های مورد نظر در صورت اختلاف مکان بین رده‌ها می‌پردازیم.  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ترتیب  $(0, 0)^T$  و  $(\delta, 0)^T$  و  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_2$  در نظر گرفته می‌شوند، که  $\delta \in [-2, 2]$ . متوسط نرخ بدرده‌بندی، معیار حساسیت و معیار مشخص‌سازی برای توزیع نرمال و لاپلاس دو متغیره به ترتیب در جدول ۱ نمایش داده شده است. ملاحظه می‌شود، با توجه به متوسط خطای بدرده‌بندی متناظر با هر یک از توزیع‌ها، متوسط خطای بدرده‌بندی در توزیع لاپلاس دو متغیره تقریباً کمتر از متوسط خطای بدرده‌بندی در توزیع نرمال دو متغیره است و معیار حساسیت و مشخص‌سازی در توزیع لاپلاس دو متغیره تقریباً بیشتر از معیار حساسیت و مشخص‌سازی در توزیع نرمال دو متغیره است. همچنین در هر دو توزیع ذکر شده، تابع ژرفای نیم‌فضا بهترین عملکرد را در بین سایر توابع ژرفای بررسی شده دارد؛ چرا که متوسط خطای بدرده‌بندی متناظر با آن در هر دو توزیع کمتر و معیار حساسیت و مشخص‌سازی متناظر با آن در هر دو توزیع بیشتر است. همچنین رده‌بندی‌سازهای مبتنی بر تابع ژرفا در مقابل روش K-NN متوسط خطای کمتر و معیار حساسیت و مشخص‌سازی بیشتری دارند.

<sup>1</sup>Misclassification rate

<sup>2</sup>Sensitivity

<sup>3</sup>Specificity

جدول ۱. اختلاف مکان تحت توزیع‌های دو متغیره

$KNN$	$ZD$	$SD$	$PD$	$MD$	$HD$	$\delta$	توزیع	
۰.۶۵۰	۰.۴۴۶	۰.۵۰۱	۰.۵۰۰	۰.۴۹۹	۰.۴۲۰	۰	نرمال	نرخ بدرده‌بندی
	۰.۴۵۰	۰.۳۰۶	۰.۲۶۰	۰.۳۲۲	۰.۳۱۴	۰.۲۹۶	۱	
	۰.۳۷۵	۰.۱۵۸	۰.۱۲۹	۰.۱۶۷	۰.۱۶۰	۰.۱۵۳	۲	
۰.۵۸۰	۰.۴۲۸	۰.۵۰۰	۰.۵۰۰	۰.۵۰۰	۰.۴۲۸	۰	لاپلاس	
	۰.۴۰۰	۰.۲۴۹	۰.۳۱۶	۰.۲۶۰	۰.۲۵۷	۰.۲۳۵	۱	
	۰.۱۸۰	۰.۱۲۱	۰.۱۶۱	۰.۱۳۰	۰.۱۲۶	۰.۱۱۵	۲	
۰.۹۱۰	۰.۹۶۵	۰.۹۶۸	۰.۹۱۵	۰.۹۷۶	۰.۹۸۵	۰	نرمال	معیار حساسیت
	۰.۹۲۸	۰.۹۶۳	۰.۹۶۰	۰.۹۷۳	۰.۹۷۲	۰.۹۵۵	۱	
	۰.۹۴۲	۰.۹۸۰	۰.۹۷۱	۰.۹۸۷	۰.۹۸۴	۰.۹۸۶	۲	
۰.۹۲۷	۰.۹۵۴	۰.۹۵۴	۰.۹۲۷	۰.۹۳۵	۰.۹۵۷	۰	لاپلاس	
	۰.۹۴۲	۰.۹۷۸	۰.۹۷۱	۰.۹۶۱	۰.۹۵۳	۰.۹۷۵	۱	
	۰.۹۵۴	۰.۹۹۱	۰.۹۸۴	۰.۹۸۷	۰.۹۹۱	۰.۹۹۴	۲	
۰.۸۱۹	۰.۹۳۷	۰.۹۳۲	۰.۹۹۱	۰.۹۲۹	۰.۹۹۵	۰	نرمال	معیار مشخص‌سازی
	۰.۸۳۷	۰.۹۷۲	۰.۹۸۱	۰.۹۵۸	۰.۹۷۳	۰.۹۸۷	۱	
	۰.۸۴۲	۰.۹۸۹	۰.۹۸۹	۰.۹۸۸	۰.۹۸۶	۰.۹۸۶	۲	
۰.۹۲۷	۰.۹۶۳	۰.۹۳۷	۰.۹۶۷	۰.۹۵۹	۰.۹۶۸	۰	لاپلاس	
	۰.۹۴۲	۰.۹۷۴	۰.۹۷۰	۰.۹۸۱	۰.۹۸۲	۰.۹۹۴	۱	
	۰.۹۵۴	۰.۹۸۲	۰.۹۸۹	۰.۹۸۹	۰.۹۸۴	۰.۹۹۶	۲	

حال در سناریوی دوم عملکرد رده‌بندی‌ساز مبتنی بر تابع ژرفای نیم‌فضا را تحت اختلاف همزمان مکان و مقیاس بین رده‌ها بررسی می‌کنیم. نتایج در جدول ۲ ملاحظه می‌شود.  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ترتیب  $(\circ, \circ)^T$  و  $(\delta, \circ)^T$  که  $\delta \in [-2, 2]$  و  $\Sigma_1 = \mathbf{I}_2$  و  $\Sigma_2 = 9\mathbf{I}_2$  در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به اختلاف مقیاس در بین دو رده، همچنان تابع ژرفای نیم‌فضا عملکرد خوبی دارد و برای توزیع لاپلاس دو متغیره بهتر از توزیع نرمال دو متغیره عمل می‌کند.

حال در این بخش از شبیه‌سازی به بررسی عملکرد مجدد روش‌های مورد نظر در حالت چندمتغیره می‌پردازیم. بدین منظور، اندازه نمونه  $n$  و  $m$  برابر با ۱۰۰ و تعداد تکرار شبیه‌سازی ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. نمونه‌ها از توزیع نرمال پنج متغیره و توزیع لاپلاس پنج متغیره تولید می‌شوند.  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ترتیب  $(\circ, \circ, \circ, \circ, \circ)^T$  و  $(\delta, \circ, \circ, \circ, \circ)^T$  و  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \mathbf{I}_5$  در نظر گرفته می‌شوند، که  $\delta \in [-2, 2]$ . متوسط نرخ بدرده‌بندی، معیار حساسیت و معیار مشخص‌سازی برای توزیع نرمال و لاپلاس پنج متغیره به ترتیب در جداول ۳ نمایش داده شده است. برخلاف شبیه‌سازی از توزیع‌های دو متغیره، با توجه به متوسط خطای بدرده‌بندی متناظر با هر یک از توزیع‌ها، متوسط خطای بدرده‌بندی در توزیع نرمال پنج متغیره تقریباً کمتر از متوسط خطای بدرده‌بندی در توزیع لاپلاس پنج متغیره است.

جدول ۰۲. رده‌بندی ساز مبتنی بر تابع ژرفای نیم‌فضا برای اختلاف در مکان و مقیاس

		$\delta$						
		۲	۱	۰	-۱	-۲	توزیع دومتغیره	
نرخ بدرده‌بندی	نرمال	۰/۳۸۰	۰/۴۵۹	۰/۴۹۰	۰/۴۶۰	۰/۳۸۰	نرمال	
	لاپلاس	۰/۲۹۹	۰/۴۰۶	۰/۴۸۴	۰/۴۰۹	۰/۲۹۹	لاپلاس	
معیار حساسیت	نرمال	۰/۹۸۷	۰/۹۶۴	۰/۹۴۸	۰/۹۷۹	۰/۹۷۹	نرمال	
	لاپلاس	۰/۹۸۷	۰/۹۸۲	۰/۹۴۸	۰/۹۷۱	۰/۹۸۹	لاپلاس	
معیار مشخص‌سازی	نرمال	۰/۹۸۴	۰/۹۸۳	۰/۹۵۴	۰/۹۶۳	۰/۹۸۸	نرمال	
	لاپلاس	۰/۹۸۹	۰/۹۷۸	۰/۹۷۱	۰/۹۷۸	۰/۹۹۳	لاپلاس	

ملاحظه می‌شود، معیار حساسیت در توزیع لاپلاس پنج‌متغیره تقریباً کمتر از معیار حساسیت در توزیع نرمال پنج‌متغیره است، در حالی که معیار مشخص‌سازی توزیع لاپلاس پنج‌متغیره تقریباً بیشتر از معیار حساسیت و مشخص‌سازی در توزیع نرمال پنج‌متغیره است. همچنین در هر دو توزیع ذکر شده، تابع ژرفای زونوئید بهترین عملکرد را در بین سایر توابع ژرفای بررسی شده دارد. همچنین رده‌بندی سازهای مبتنی بر تابع ژرفا در مقابل روش K-NN مجدد متوسط خطای کمتر و معیار حساسیت و مشخص‌سازی بیشتری دارند.

حال عملکرد رده‌بندی‌ساز مبتنی بر تابع ژرفای زونوئید را تحت اختلاف همزمان مکان و مقیاس بین رده‌ها بررسی می‌کنیم. نتایج در جدول ۴ ملاحظه می‌شود.  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ترتیب  $(0, 0, 0, 0, 0)^T$  و  $(\delta, 0, 0, 0, 0)^T$  که  $\delta \in [-2, 2]$  و  $\Sigma_1 = I_5$  و  $\Sigma_2 = 9I_5$  در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به اختلاف مقیاس در بین دو رده، همچنان تابع ژرفای زونوئید عملکرد خوبی دارد و برای توزیع لاپلاس پنج‌متغیره بهتر از توزیع نرمال پنج‌متغیره عمل می‌کند.

## ۵ رده‌بندی داده‌های اسکناس سوئیسی

در این بخش برای نشان دادن عملکرد روش رده‌بندی مبتنی بر تابع ژرفا یک مجموعه داده واقعی تحلیل می‌شود. داده‌ها شامل ۱۰۰ اسکناس اصلی و ۱۰۰ اسکناس جعلی ۱۰۰۰ فرانکی قدیمی سوئیس هستند؛ که شش متغیر طول اسکناس (برحسب میلی‌متر)، عرض سمت چپ اسکناس (برحسب میلی‌متر)، عرض سمت راست اسکناس (برحسب میلی‌متر)، عرض حاشیه پایین اسکناس (برحسب میلی‌متر)، عرض حاشیه بالا اسکناس (برحسب میلی‌متر) و قطر اسکناس (برحسب میلی‌متر) برای آن‌ها ثبت شده است. عملکرد رده‌بندی‌ساز پیشنهادی تحت توابع ژرفای مختلف برای رده‌بندی اسکناس‌ها به دو رده‌ی اسکناس اصل و اسکناس تقلبی بررسی شد. ابتدا فرض نرمال چندمتغیره، سپس فرض تقارن بیضوی مجموعه داده‌های شش متغیره را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بسته‌های آماری "MVN" و "ellipticalsymmetry" در نرم افزار R به ترتیب شامل آزمون‌هایی برای بررسی نرمال چندمتغیره و تقارن بیضوی چندمتغیره مشاهدات هستند. بر اساس بسته آماری "MVN"، آماره‌های آزمون نرمال

جدول ۳. اختلاف مکان تحت توزیع‌های پنج‌متغیره نرمال و لاپلاس

<i>KNN</i>	<i>ZD</i>	<i>SD</i>	<i>PD</i>	<i>MD</i>	<i>HD</i>	$\delta$	توزیع	
۰.۵۹۳	۰.۲۵۸	۰.۵۰۱	۰.۵۰۱	۰.۴۹۸	۰.۲۶۴	۰	نرمال	نرخ بدرده‌بندی
	۰.۰۸۲	۰.۱۴۳	۰.۱۵۱	۰.۱۴۴	۰.۲۵۸	۰.۲۴۴	۱	
	۰.۰۰۳	۰.۰۱۵	۰.۱۶۶	۰.۰۱۵	۰.۰۰۱	۰.۱۸۲	۲	
۰.۶۹۳	۰.۳۳۰	۰.۵۰۲	۰.۵۰۱	۰.۴۹۹	۰.۳۳۵	۰	لاپلاس	
	۰.۰۶۳	۰.۱۲۲	۰.۱۲۴	۰.۱۲۲	۰.۰۵۹	۰.۲۶۳	۱	
	۰.۰۰۵	۰.۰۲۶	۰.۲۷۵	۰.۰۲۶	۰.۰۰۳	۰.۲۱۲	۲	
۰.۹۲۳	۰.۹۷۵	۰.۹۲۸	۰.۹۵۳	۰.۹۴۴	۰.۹۷۲	۰	نرمال	معیار حساسیت
	۰.۹۶۲	۰.۹۹۲	۰.۹۹۰	۰.۹۷۵	۰.۹۹۲	۰.۹۹۱	۱	
	۰.۹۹۱	۱	۱	۱	۰.۹۹۸	۱	۲	
۰.۹۲۶	۰.۹۷۵	۰.۹۶۶	۰.۹۹۳	۰.۹۳۸	۰.۹۵۴	۰	لاپلاس	
	۰.۹۶۲	۰.۹۹۸	۰.۹۸۳	۰.۹۷۶	۰.۹۸۰	۰.۹۸۳	۱	
	۰.۹۷۳	۱	۰.۹۹۸	۰.۹۹۶	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۲	
۰.۹۲۳	۰.۹۸۶	۰.۹۷۹	۰.۹۴۲	۰.۹۵۲	۰.۹۷۶	۰	نرمال	معیار مشخص‌سازی
	۰.۹۷۵	۰.۹۹۲	۰.۹۸۷	۰.۹۹۰	۰.۹۹۰	۰.۹۹۳	۱	
	۰.۹۸۶	۱	۱	۰.۹۹۷	۱	۱	۲	
۰.۹۳۰	۰.۹۵۳	۰.۹۴۲	۰.۹۷۴	۰.۹۵۶	۰.۹۸۱	۰	لاپلاس	
	۰.۹۷۵	۰.۹۹۱	۰.۹۹۴	۰.۹۹۱	۰.۹۹۲	۰.۹۹۵	۱	
	۰.۹۸۶	۱	۰.۹۹۷	۱	۰.۹۹۸	۰.۹۹۸	۲	

جدول ۴. رده‌بندی‌ساز مبتنی بر تابع ژرفای زونوئید برای اختلاف در مکان و مقیاس

		$\delta$						
		۲	۱	۰	-۱	-۲	توزیع پنج‌متغیره	
نرخ بدرده‌بندی	نرمال	۰.۲۹۱	۰.۴۸۲	۰.۵۰۰	۰.۴۸۴	۰.۲۹۷	نرمال	
	لاپلاس	۰.۲۱۲	۰.۳۹۲	۰.۴۹۱	۰.۳۹۳	۰.۲۰۷	لاپلاس	
معیار حساسیت	نرمال	۱	۰.۹۹۱	۰.۹۷۵	۰.۹۹۲	۱	نرمال	
	لاپلاس	۱	۰.۹۹۷	۰.۹۴۰	۰.۹۹۱	۰.۹۹۶	لاپلاس	
معیار مشخص‌سازی	نرمال	۱	۰.۹۹۴	۰.۹۸۴	۰.۹۹۲	۱	نرمال	
	لاپلاس	۱	۰.۹۹۴	۰.۹۸۷	۰.۹۹۴	۱	لاپلاس	

چندمتغیره از رویستون (۱۹۸۲)، هنز و زیرکلر (۱۹۹۰) و سیکلی و ریزو (۲۰۱۷) که به ترتیب با  $HZ_n$ ،  $R_n$  و  $SR_n$  نشان داده می‌شوند، و بر اساس بسته آماری "ellipticalsymmetry" آماره آزمون تقارن بیضوی بایبک و همکاران (۲۰۲۱) که با  $Ba_n$  نشان داده می‌شود، برای اسکنااس‌های اصلی و جعلی محاسبه شده‌اند و نتایج در جدول ۵ آمده است. فرض نرمال چندمتغیره برای اسکنااس‌های اصلی بر اساس آماره  $R_n$  در سطح ۰/۰۱ و

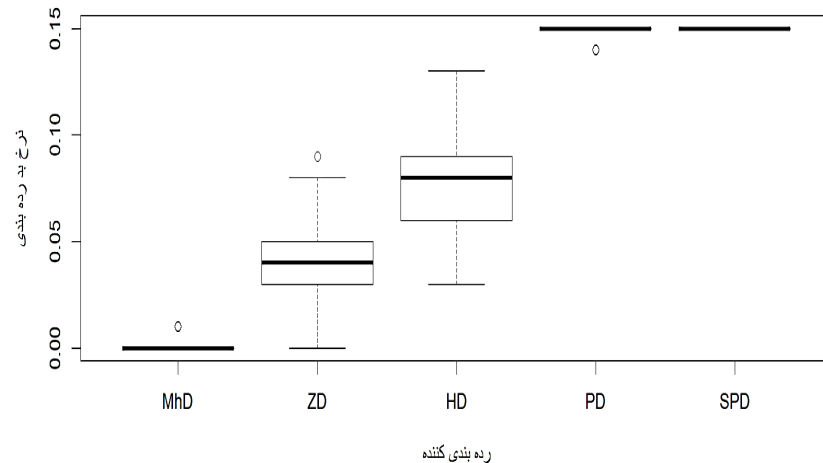
جدول ۵. نتایج آزمون‌های نرمال چندمتغیره و تقارن بیضوی چندمتغیره

آزمون	اسکنااس اصلی		اسکنااس جعلی	
	آماره آزمون	p-value	آماره آزمون	p-value
$R_n$	۳۳/۶۵۸۲	$۵/۵ \times ۱۰^{-۶}$	۴۶/۶۶۳۶	$۱/۲ \times ۱۰^{-۸}$
$HZ_n$	۰۰/۸۸۱۶	۰/۶۹۱۵	۰۱/۳۰۰۳	$۲/۲ \times ۱۰^{-۱۱}$
$SR_n$	۰۰/۱۳۵۱	۰/۰۶۸۰	۰۲/۱۶۵۳	۰/۰۰۰۰
$Ba_n$	۱۰/۶۲۰۰	۰/۱۰۰۹	۴۴/۰۸۷۰	$۷/۱ \times ۱۰^{-۸}$

بر اساس آماره  $SR_n$  در سطح ۰/۱ رد می‌شود ولی بر اساس آماره‌های  $HZ_n$  و  $Ba_n$  به ترتیب دلیلی برای رد فرض نرمال چندمتغیره و فرض تقارن بیضوی داده‌های اسکنااس‌های اصلی وجود ندارد. همچنین هر دو فرض مورد بررسی بر اساس همه آزمون‌ها برای اسکنااس‌های جعلی در سطح ۰/۰۱ رد می‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، قواعد رده‌بندی مبتنی بر فرضیات پارامتری برای این مجموعه داده قابل استفاده نیست. حال قواعد رده‌بندی مبتنی بر تابع ژرفا را برای رده‌بندی اسکنااس‌های اصلی به یکی از رده‌های اصلی و جعلی به کار می‌بریم. رده‌بندی‌سازهای مبتنی بر توابع ژرفای نیم‌فضا، تصویر-مبنا و زنونید به درستی همه ۱۰۰ اسکنااس را در رده اسکنااس‌های اصلی رده‌بندی می‌کنند. رده‌بندی‌سازهای مبتنی بر توابع ژرفای ماهالانوبیس و فضایی به درستی ۹۹ اسکنااس را در رده اسکنااس‌های اصلی رده‌بندی می‌کنند ولی اسکنااس ۱۷م را به اشتباه به عنوان جعلی رده‌بندی می‌کنند. حال برای مقایسه دقیق‌تر رده‌بندی سازها، ۱۰۰۰ مرتبه به تصادف ۸۵ درصد مشاهدات را به عنوان داده‌های آموزشی و ۱۵ درصد مابقی به عنوان داده‌های آزمون انتخاب می‌شوند. متوسط نرخ بدرده‌بندی برای رده‌بندی ساز مبتنی بر تابع ژرفای نیم‌فضا، ماهالانوبیس، تصویر-مبنا، فضایی، زنونید و روش  $k-NN$  به ترتیب برابر با ۰/۰۷۹۲، ۰/۰۰۰۹، ۰/۱۴۹۰، ۰/۱۵۰۰، ۰/۴۱۱ و ۰/۱۹۶۰ است. ملاحظه می‌شود، رده‌بندی سازهای مبتنی بر تابع ژرفاهای ماهالانوبیس و زنونید بهترین عملکرد را در بین سایر رده‌بندی سازها دارند.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش رده‌بندی چندمتغیره ماکسیم ژرفا مورد بررسی قرار گرفت. پیاده‌سازی این روش نسبت به بیشتر روش‌های چندمتغیره که دارای پیچیدگی محاسباتی هستند، ساده‌تر است. بر اساس مطالعات داده‌های اسکنااس



شکل ۱. نمودار جعبه‌ای نرخ بدرده‌بندی مرتبط با رده‌بندی‌سازها برای داده‌های اسکنا سونوئسی

سونوئسی، عملکرد رده‌بندی‌ساز ماکسیم ژرفا بر اساس توابع ژرفای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد، رده‌بندی‌ساز ماکسیم ژرفا بر اساس تابع ژرفای ماهالانوبیس و نیم‌فضا دارای عملکرد مطلوب‌تری است.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که نظرات ارزشمندشان باعث بهبود مطالب ارائه شده در این مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

## مراجع

دهقان، س. و فریدروحانی، م. (۱۴۰۰)، شناسایی نقاط دورافتاده چندمتغیره بر اساس تابع دورافتادگی ژرفا-مبنا، مجله علوم آماری، ۱۵(۲)، ۴۴۳-۴۶۲.

Babić, S., Gelbgras, L., Hallin, M., & Ley, C. (2021), Optimal Tests for Elliptical Symmetry: Specified and Unspecified Location, *Bernoulli*, 27(4), 2189-2216.

- Cover, T. M., Hart, P. E. (1967), Nearest Neighbor Pattern Classification, *IEEE Transactions on Information Theory*, **13**(1), 21–27.
- Dyckerhoff, R., and Mosler, K., and Koshevoy, G. (1996), Zonoid Data Depth: Theory and Computation. *Proceedings in Computational Statistics 12th Symposium held in Barcelona*, 235-240.
- Ghosh, A. K., and Chaudhuri, P. (2005), On maximum Depth and Related Classifiers, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**(2), 327-350.
- Henze, N. and Zirkler, B. (1990), A Class of Invariant Consistent Tests for Multivariate Normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **19**(10): 3595-3618.
- Hubert, M., Rousseeuw, P., and Segaeert, P. (2017), Multivariate and Functional Classification Using Depth and Distance, *Advances in Data Analysis and Classification*, **11**(3), 445-466.
- Liu, R. Y., and Singh, K. (1993), A quality Index Based on Data Depth and Multivariate Rank Tests, *Journal of the American Statistical Association*, **88**(421), 252–260.
- Royston, J.P. (1982), An Extension of Shapiro and Wilks W Test for Normality to Large Samples, *Applied Statistics*, **31**(2), 115-124.
- Székely, G. J., and Rizzo, M. L. (2017), The Energy of Data, *Annual Review of Statistics and Its Application*, **4**, 447-479.
- Tukey, J. W. (1975), Mathematics and the Picturing of Data, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, **2**, 523–531.
- Vardi, Y. and Zhang, C. H. (2000), The Multivariate L1-median and Associated Data Depth, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **97**(4), 1423-1426.
- Vapnik, V. (1995), *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer-Verlag.

Zuo, Y. (2003), Projection-based Depth Functions and Associated Medians, *The Annals of Statistics*, **31**(5), 1460–1490.

Zuo, Y., and Serfling, R. J. (2000), Structural Properties and Convergence Results for Contours of Sample Statistical Depth Functions, *Annals of Statistics*, **28**(2), 483-499.