مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۱، ص ۹۷ – ۱۱۸
DOI: 10.29252/jss.15.1.99
مقاله پژوهشی

میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها در تحلیل رگرسیونی گاوسی وارون

زهرا رحیمیان آزاد، افشین فلاح

گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۰۸/۰۲

چکیده: این مقاله میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی گاوسی وارون را برای تحلیل رگرسیونی در شرایطی که مشاهدات پاسخ مثبت و چوله به راست هستند، مورد توجه قرار می‌دهد. چالش‌های محاسباتی مربوط به کمیت‌های لازم برای اجرای این روش و چگونگی غلبه بر آنها، مورد بحث قرار گرفته است. یک جنبه جالب روش پیشنهادی آن است که با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین مناسب، نمایش‌های بسته‌ای برای کمیت‌های پسینی مورد علاقه فراهم آورده شده است. روش پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته و چگونگی کاربست آن در مسائل کاربردی، بوسیله یک مثال واقعی مربوط به مطالعات زلزله‌شناسی، شرح داده شده است.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها، رگرسیون، توزیع گاوسی وارون، توزیع پیش‌بین.

۱ مقدمه

میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها[1] روشی کارا در مدل‌سازی است که با پرهیز از گزینش یک مدل خاص به عنوان بهترین مدل، میانگین همه مدل‌ها یا مجموعه‌ای از بهترین آنها را مورد استفاده قرار می‌دهد و عدم حتمیت مدل‌ها را که در روش گزینش مدل نادیده گرفته می‌شود، در مدل‌سازی لحاظ می‌کند. اولین پژوهش در زمینه لحاظ کردن عدم حتمیت مدل در فرایند مدل‌سازی توسط لیمر (۱۹۷۸) انجام گرفت. مادیگان و رفتری (۱۹۹۴) دو روش پایه‌ای را برای مدنظر قرار دادن عدم حتمیت در مدل‌سازی ارایه کردند.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: افشین فلاح، a.fallah@sci.ikiu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J02,62C10.

[1]Bayesian Model Averaging (BMA)

رفتری (۱۹۹۵) و رفتری و همکاران (۱۹۹۳، ۱۹۹۷) رویکرد میانگین‌گیری بیزی را در چهارچوب مدل‌های رگرسیونی مورد مطالعه قرار دادند. هوئتینگ (۱۹۹۴) و هوئتینگ و همکاران (۱۹۹۶، ۱۹۹۹) نحوه انجام آزمون‌های معنی‌داری ضرایب رگرسیونی و تشخیص نقاط دورافتاده با استفاده از روش میانگین‌گیری بیزی را مورد بحث قرار دادند. اسحاقی و همکاران (۱۳۹۷) انتخاب مدل مبتنی بر داده‌تاکی را مد نظر قرار داده‌اند. روبرت و نوبل (۲۰۰۰) و لیپکوویچ (۲۰۰۲) میانگین‌گیری بیزی را در حالت چندمتغیره مورد توجه قرار دادند. همچنین، میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها برپایه مدل‌های آمیخته توسط نگوفاک-تساگ و زوچینی (۲۰۱۶) و کلر و کمری (۲۰۱۸) مورد بحث قرار گرفته است. هرچند پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها انجام شده، اما در اغلب پژوهش‌های انجام شده توزیع متغیر پاسخ گاوسی در نظر گرفته شده است. این در حالی است که در بسیاری از کاربردهای واقعی مانند مسائل مربوط به مدل‌بندی درامد در اقتصاد، مطالعات مهندسی آب، بیم‌سنجی و مانند آنها، مشاهدات مثبت و چوله به راست هستند و در چنین شرایطی استفاده از مدل گاوسی می‌تواند به نتایج گمراه‌کننده‌ای بیانجامد. به‌طور کلی، در ادبیات روش‌های مدل‌سازی، هنگامی که داده‌های مورد علاقه از توزیعی که نظریه برپایه آن بنا شده است پیروی نمی‌کند، دو راهکار مد نظر قرار می‌گیرد. در راهکار نخست، پژوهشگر می‌کوشد تا با انجام تبدیلی مناسب داده‌ها را به‌گونه‌ای تغییر دهد که با نظریه موجود سازگاری داشته باشد. این راهکار همواره ممکن و سودمند نیست. زیرا یافتن تبدیل مناسب مساله‌ای چالشی است و حتی در صورت وجود چنین تبدیلی، استفاده از تبدیلات در بسیاری از موارد ساختار تابعی مدل را پیچیده، و برازش و تفسیر آن را دشوار می‌سازد. در راهکار دوم، نظریه موجود به گونه‌ای تغییر داده می‌شود که با داده‌های مورد علاقه سازگار شود. در این راستا، نظریه لازم برای میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی برمبنای توزیع گاوسی وارون، توسعه داده شده است. در بخش ۲ روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی مبتنی بر متغیر پاسخ گاوسی مرور می‌شود. در بخش ۳ نظریه میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی با متغیر پاسخ دارای توزیع گاوسی وارون، توسعه داده شده است. در بخش ۴ روش پیشنهادی در مطالعه‌ای شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در بخش ۵ از نظریه پیشنهادی برای تحلیل داده‌های مربوط به یک مطالعه زلزله‌شناسی استفاده شده و نتایج مورد بحث قرار گرفته است.

۲ میانگین‌گیری بیزی مبتنی بر توزیع گاوسی

فرض کنید $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_T\}$ نشان‌دهنده فضای مدل، D مجموعه مشاهدات و Δ کمیت مورد علاقه مانند یک مشاهده در آینده یا یک پارامتر باشد. براساس اصول تفکر بیزی، هرگونه استنباطی درباره

Δ لزوماً برپایه توزیع پسین آن صورت می‌پذیرد. این توزیع پسین را می‌توان به‌صورت میانگین وزنی توزیع‌های پیش‌بین تحت مدل‌های مختلف به صورت

$$\pi(\Delta|D) = \sum_{k=۱}^{T} p(\Delta|M_k, D)\pi(M_k|D), \tag{۱}$$

نوشت، که در آن وزن‌ها احتمال‌های پسین مدل‌ها هستند (لیمر، ۱۹۷۸). در این صورت، میانگین و واریانس پسین Δ به‌ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Delta|D) &= \sum_{k=۱}^{T} \mathrm{E}(\Delta|M_k, D)\pi(M_k|D), \\ \mathrm{Var}\big(\Delta|D\big) &= \mathrm{E}_M\big(\mathrm{Var}(\Delta|D, M)\big) + \mathrm{Var}_M\big(\mathrm{E}(\Delta|D, M)\big), \end{aligned}$$

هستند. به‌دست آوردن توزیع پسین Δ با استفاده از رابطه (۱)، مهمترین مساله در روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها است. محاسبه مجموع سمت راست در این رابطه، به دلایلی که در ادامه توضیح داده می‌شوند، دشوار است. توزیع پیش‌بین کمیت مورد علاقه به‌صورت

$$p(\Delta|M_k, D) = \int p(\Delta|\boldsymbol{\theta}_k, M_k, D)\pi(\boldsymbol{\theta}_k|M_k, D)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_k, \tag{۲}$$

قابل محاسبه است، که در آن $\boldsymbol{\theta}_k$ نشان دهنده پارامترهای مدل M_k است. احتمال پسین درست بودن M_k به‌صورت

$$\pi(M_k|D) = \frac{p(D|M_k)\pi(M_k)}{\sum_{j=۱}^{T} p(D|M_j)\pi(M_j)}, \tag{۳}$$

به‌دست می‌آید، که در آن

$$p(D|M_k) = \int p(D|\boldsymbol{\theta}_k, M_k)\pi(\boldsymbol{\theta}_k|M_k)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_k, \tag{۴}$$

درستنمایی حاشیه‌ای، $p(D|\boldsymbol{\theta}_k, M_k)$ تابع درستنمایی، $\pi(M_k)$ احتمال پیشین درست بودن مدل M_k و $\pi(\boldsymbol{\theta}_k|M_k)$ توزیع پیشین پارامترها تحت این مدل است. محاسبه (۱) به دلیل تعداد زیاد جملات آن دشوار است و با افزایش تعداد متغیرهای تبیینی، در عمل امکان‌پذیر نخواهد بود. برای کاهش تعداد جملات این مجموع راهکاری تحت عنوان پنجره اوکام توسط مادیگان و رفتری (۱۹۹۴) پیشنهاد شده است، که از دو اصل پیروی می‌کند. بنابر اصل اول مدل‌هایی که در مقایسه با پیش‌بینی صورت گرفته براساس بهترین مدل‌ها دارای پیش‌بینی نامطلوب‌تری هستند، کنار گذاشته می‌شوند. اگر ثابت c آستانه‌ای را نشان دهد که توسط تحلیل‌گر تعیین می‌شود، با اجرای این اصل مدل‌هایی که در مجموعه

$$\mathcal{A}' = \big\{M_k : \frac{\max_{M_\ell \in \mathcal{M}}\{\pi(M_\ell|D)\}}{\pi(M_k|D)} \leq c\big\},$$

نباشند، در (۱) مد نظر قرار نمی‌گیرند. اصل دوم که آن را تیغ اوکام نامیده‌اند، مدل‌های پیچیده‌ای را که نسبت به همتایان ساده‌تر خود کمتر از جانب داده‌ها پشتیبانی می‌شوند، از مجموع کنار می‌گذارد. به عبارتی، مدل‌هایی که متعلق به مجموعه

$$\mathcal{B} = \big\{M_k : \exists M_\ell \in \mathcal{A} \quad s.t \quad M_\ell \subset M_k, \frac{\pi(M_\ell|D)}{\pi(M_k|D)} > ۱\big\},$$

هستند، از مجموع خارج می‌شوند. بنابراین رابطه (۱)، به‌صورت

$$\pi(\Delta|D) = \sum_{M_k \in \mathcal{A}' - \mathcal{B}} p(\Delta|M_k, D)\pi(M_k|D),$$

بازنویسی می‌شود. برای استفاده از روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها لازم است توزیع‌های پیشین پارامترهای همه مدل‌های موجود در فضای مدل را مشخص کرد. در تحلیل رگرسیونی خطی نرمال، kامین مدل به‌صورت $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}^{(k)} \sim N(\boldsymbol{X}^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \sigma^۲\boldsymbol{I}_n)$ است، که در آن $\boldsymbol{X}^{(k)}_{n\times(p_k+۱)}$ ماتریس متغیرهای تبیینی را نشان می‌دهد، $\boldsymbol{y} = (y_۱, \ldots, y_n)'$ بردار مشاهدات پاسخ و $\boldsymbol{\beta}^{(k)} = (\beta_۱, \ldots, \beta_{p_k+۱})$ بردار ضرایب رگرسیونی است. هوئتینگ (۱۹۹۴) رده توزیع‌های پیشین مزدوج نرمال - گاما به‌صورت

$$\boldsymbol{\beta}^{(k)}|\sigma^۲ \sim N_{p+۱}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^۲\boldsymbol{V}), \quad \frac{\nu\lambda}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_\nu,$$

را برای این منظور در نظر گرفت، که در آن اسکالرهای ν و λ، ماتریس $\boldsymbol{V}_{(p_k+1)\times(p_k+1)}$ و بردار (p_k+1) بعدی $\boldsymbol{\mu}$، ابرپارامترهایی هستند که به‌وسیله تحلیل‌گر مشخص می‌شوند. وی $\boldsymbol{V}$ را یک ماتریس قطری به‌صورت $\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}\big(s^2_{\boldsymbol{y}}, \frac{\phi^2}{s^2_1}, \ldots, \frac{\phi^2}{s^2_p}\big)$ در نظر گرفت، که در آن $s^2_{\boldsymbol{y}}$ واریانس نمونه‌ای $\boldsymbol{y}$، s^2_i واریانس نمونه‌ای متغیر تبیینی $x^{(k)}_i$، $i=1,\ldots,p_k$، را نشان می‌دهد و ϕ یک ابرپارامتر است.

احتمال پسین درست بودن مدل kام در (۱) را می‌توان به‌صورت $\pi(M_k|D)\propto p(D|M_k)\pi(M_k)$، نوشت. درستنمایی حاشیه‌ای مدل kام یک انتگرال p_k بعدی بوده و محاسبه دقیق آن، به دلیل پیچیده بودن انتگرال (۴)، دشوار است. برخی از پژوهشگران برای محاسبه این کمیت از روش‌های تقریبی و عددی استفاده نموده‌اند. به‌عنوان مثال، رفتری (۱۹۹۵) این درستنمایی حاشیه‌ای را در تحلیل رگرسیونی خطی گاوسی با استفاده از معیار اطلاع بیز[1] به‌صورت

$$p(D|M_k)\propto \exp\big(-0/5BIC_k\big)=\exp\big(-0/5(n\log(1-R^2_k)+p_k\log n)\big),$$

تقریب زده است، که در آن R^2_k ضریب تعیین تعدیل شده مدل kام، p_k تعداد متغیرهای تبیینی موجود در مدل kام و n تعداد مشاهدات را نشان می‌دهد. برای محاسبه $\pi(M_k|D)$ لازم است احتمال $\pi(M_k)$ برای همه مدل‌های موجود در فضای مدل مشخص شود. وقتی هیچ اطلاع پیشینی در مورد مدل‌ها وجود ندارد یا میزان اطلاعات پیشین اندک است، توزیع مدل‌ها در فضای مدل یکنواخت و به‌صورت $\pi(M_1)=\cdots=\pi(M_T)=\frac{1}{T}$ در نظر گرفته می‌شود. هنگامی که فضای مدل بزرگ نیست، این انتخاب معقول است. اما وقتی تعداد مدل‌ها زیاد است، این انتخاب ممکن است به نتایج گمراه‌کننده منجر شود. مادیگان و رفتری (۱۹۹۴) ادعا کرده‌اند که در فضاهای مدل بسیار بزرگ، چنین اثرات گمراه‌کننده‌ای را مشاهده نکرده‌اند. به هر حال، هنگامی که اطلاعات پیشین درباره اهمیت هر یک از متغیرهای تبیینی در دسترس است، احتمال پیشین درست بودن مدل M_k را می‌توان به‌صورت

$$\pi(M_k)=\prod_{j=1}^{p_j}\rho_i^{\delta_{kj}}(1-\rho_j)^{1-\delta_{kj}}, \tag{۵}$$

نوشت، که در آن ρ_j احتمال حضور jامین متغیر تبیینی در مدل و δ_{kj} تابع نشانگری است که حضور یا عدم حضور متغیر X_j در مدل M_k را مشخص می‌سازد. روبرت و نوبل (۲۰۰۰) حالتی خاص از

[1] Bayesian Information Criteria (BIC)

(۵)، را که در آن ρ_j برای همه متغیرها برابر در نظر گرفته می‌شود، پیشنهاد داده‌اند. تاپلین (۱۹۹۳) و رفتری و همکاران (۱۹۹۷) برای محاسبه توزیع پیش‌بین تقریب $p(\Delta|M_k, D) \approx p(D|M_k, \hat{\theta}_k, D)$، را پیشنهاد کرده‌اند، که در آن $\hat{\theta}_k$ براورد ماکسیمم درستنمایی بردار پارامترهای مدل kام است.

۳ میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی گاوسی وارون

فرض کنید $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_T\}$ و M_k به‌ترتیب نشان‌دهنده فضای مدل و kامین مدل در این فضا باشند. در این‌صورت، مدل رگرسیونی گاوسی وارون تحت مدل M_k به‌صورت

$$y_i|\boldsymbol{x}_i^{(k)} \sim IG(\mu(\boldsymbol{x}_i^{(k)}), \lambda) \qquad \mu_{i(k)}^{-1} = \mu^{-1}(\boldsymbol{x}_i^{(k)}) = \boldsymbol{x}_i'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

خواهد بود، که در آن $IG(\cdot,\cdot)$ توزیع گاوسی وارون را نشان می‌دهد، $\boldsymbol{\beta}^{(k)} = (\beta_1, \dots, \beta_{p_k})'$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\boldsymbol{x}_i^{(k)} = (x_{i1}, \dots, x_{ip_k})'$ بردار متغیرهای تبیینی تحت مدل kام است. تابع چگالی توزیع گاوسی وارون به‌صورت

$$f_{y_i}(y_i|\mu_{i(k)}, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_i^3}} \exp\left\{\frac{-\lambda}{2}\frac{(y_i - \mu_{i(k)})^2}{y_i\mu_{i(k)}^2}\right\} \quad y_i, \mu_{i(k)}, \lambda > 0,$$

است، که در آن $\mu_{i(k)}$ و λ به ترتیب پارامترهای مکان و شکل توزیع هستند. در رویکرد میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها، لازم است توزیع پسین کمیت مورد علاقه به صورت مجموع وزنی توزیع‌های پیش‌بین آن کمیت تحت مدل‌های مختلف محاسبه شود. در این راستا، محاسبه احتمال پسین درست بودن هر مدل و به‌دست آوردن توزیع‌های پیش‌بین مدل‌های مختلف، از جمله گام‌های ضروری است.

در این مقاله به پیروی از باتاچاریا و فرایس (۱۹۸۲) و مشکانی و همکاران (۲۰۱۶) از تابع پیوند وارون استفاده شده است. انتخابهای دیگری نیز برای این منظور وجود دارد. به عنوان مثال، چاوبی (۲۰۰۲) از تابع پیوند خطی به صورت $\mu_{i(k)} = \boldsymbol{x}_i{}^{(k)}\boldsymbol{\beta}^k$ و سپارکس و همکاران (۲۰۱۱) از تابع پیوند نمایی به صورت $\mu_{i(k)} = \exp(\boldsymbol{x}_i{}^{(k)}\boldsymbol{\beta}^k)$ استفاده نموده‌اند. توجه به این نکته ضروری است که تابع پیوند انتخابی هر چه باشد، می‌بایست محدودیت $\mu_{i(k)} > 0$ در براورد پارامترها مد نظر قرار گیرد. جذابیت تابع پیوند وارون میانگین از آن رو است که امکان ارائه نمایش‌های بسته و جذاب را برای بسیاری از توزیع‌ها و کمیت‌های پسینی مورد علاقه فراهم می‌آورد.

۳.۱ تعیین توزیع های پیشین پارامترها

لازمه تحلیل بیزی مدل (۶) آن است که برای پارامترهای آن، $(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda)$، توزیع‌های پیشین مناسبی در نظر گرفته شوند که بتوانند به خوبی باورهای پیشین تحلیل‌گر را در مدل‌سازی بازتاب دهند. شایان گفتن است که به دلیل متفاوت بودن متغیرهای تبیینی مدل‌های مختلف، بعد بردار ضرایب رگرسیونی برای مدل‌های متفاوت یکسان نیست، به این معنی که بردار ضرایب رگرسیونی برای مدل kام، برداری p_k بعدی است. با توجه به این که دامنه تغییرات ضرایب رگرسیونی مجموعه اعداد حقیقی است و پارامتر λ، تنها مقادیر مثبت را اختیار می‌کند، توزیع‌های پیشین پارامترهای مدل M_k به‌صورت

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{(k)}|\lambda \sim N_{p_k}(\boldsymbol{\eta}_\circ, \lambda^{-۱}\boldsymbol{V}_\circ) & \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \boldsymbol{\eta}_\circ \in \mathbb{R}^{p_k} \\ \lambda \sim Gamma\big(\frac{a_\circ}{۲}, \frac{b_\circ}{۲}\big) & \lambda, a_\circ, b_\circ > \circ, \end{cases}$$

در نظر گرفته می‌شوند، به‌گونه‌ای که $\boldsymbol{V}_\circ = \mathrm{diag}(v_{\circ ۱}, \ldots, v_{\circ p_k})$ یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری مثبت است و $\boldsymbol{\eta}_\circ = (\eta_{\circ ۱}, \ldots, \eta_{\circ p_k})$. خانواده توزیع‌های نرمال و گاما به اندازه کافی غنی هستند تا بتوان انتظار داشت عضوی از این خانواده‌ها به خوبی باورهای پیشین را در مدل‌سازی بازتاب دهند. بعلاوه، این توزیع‌های پیشین به دلیل مزدوج بودن با درستنمایی توزیع گامای وارون، از نقطه نظر محاسباتی نیز سودمند هستند. با توجه به این مطالب، توزیع پیشین توام به‌صورت

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda) &= \pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}|\lambda)\pi(\lambda) \\ &= \frac{۱}{(۲\pi)^{\frac{p_k}{۲}}} \frac{۱}{|\lambda^{-۱}\boldsymbol{V}_\circ|^{\frac{۱}{۲}}} \exp\big\{\frac{-۱}{۲}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)'(\lambda^{-۱}\boldsymbol{V}_\circ)^{-۱}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)\big\} \\ &\times \frac{(\frac{b_\circ}{۲})^{\frac{a_\circ}{۲}}}{\Gamma(\frac{a_\circ}{۲})} \lambda^{\frac{a_\circ}{۲}-۱} \exp\big\{-\frac{\lambda}{۲}b_\circ\big\} \\ &\propto \lambda^{\frac{a_\circ + p_k}{۲}-۱} \exp\big\{\frac{-\lambda}{۲}b_\circ\big\} \\ &\times \exp\big\{\frac{-\lambda}{۲}\big((\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)'\boldsymbol{V}_\circ^{-۱}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)\big)\big\}, \end{aligned} \tag{۷}$$

به‌دست می‌آید، که یک توزیع نرمال–گاما است. اندیس صفر در نمادها برای نشان دادن ابرپارامترهای مدل، پارامترهای توزیع‌های پیشین، به‌کار رفته است که براساس باورهای پیشین تحلیل‌گر تعیین می‌شوند.

۳.۲ محاسبه توزیع پسین توام پارامترها تحت مدل kام

تابع درستنمایی تحت مدل kام به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda | y_۱, \dots, y_n) = \frac{\lambda^{\frac{n}{۲}}}{(۲\pi y_i^۳)^{\frac{n}{۲}}} \exp\Big\{ \frac{-\lambda}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \frac{(y_i - \mu_{i(k)})^۲}{y_i \mu_{i(k)}^۲} \Big\}, \qquad (۸)$$

نوشته می‌شود. مجموع موجود در تابع نمایی رابطه (۸) را می‌توان با توجه به رابطه $\mu_{i(k)}^{-۱} = \boldsymbol{x}_i'^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)}$ و با انجام برخی محاسبات جبر ماتریس‌ها به‌صورت

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} \frac{(y_i - \mu_{i(k)})^۲}{y_i \mu_{i(k)}^۲} &= \boldsymbol{\beta}'^{(k)} \boldsymbol{X}'^{(k)} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - ۲\boldsymbol{۱}_n' \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \boldsymbol{۱}_n' \boldsymbol{Y}^{-۱} \boldsymbol{۱}_n \\
&= \boldsymbol{\beta}'^{(k)} \boldsymbol{X}'^{(k)} \boldsymbol{Y}' \boldsymbol{Y}^{-۱} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - ۲\boldsymbol{۱}_n' \boldsymbol{Y}^{-۱} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} \\
&+ \boldsymbol{۱}_n' \boldsymbol{Y}^{-۱} \boldsymbol{۱}_n \\
&= Q_۱(\boldsymbol{\beta}^{(k)}),
\end{aligned}$$

نوشت، که در آن

$$Q_۱(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = (\boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{۱}_n)' \boldsymbol{Y}^{-۱} (\boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{۱}_n),$$

یک نمایش درجه دوم برحسب $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$، و $\boldsymbol{Y}$ یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $(y_۱, \dots, y_n)$ است. بنابراین تابع درستنمایی مدل kام را می‌توان به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda | y_۱, \dots, y_n) \propto \lambda^{\frac{n}{۲}} \exp\{ \frac{-\lambda}{۲} Q_۱(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) \}, \qquad (۹)$$

نوشت. از این‌رو، توزیع پسین توام پارامترهای $(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda)$ به‌صورت

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda | \boldsymbol{y}) &\propto L(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda | \boldsymbol{y}) \pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda) \\
&= \lambda^{\frac{a_۰ + n + p_k}{۲} - ۱} \exp\Big\{ -\frac{\lambda}{۲} \big(b_۰ + (\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_۰)' \boldsymbol{V}_۰^{-۱} (\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_۰) \big) \Big\} \\
&\times \exp\Big\{ -\frac{\lambda}{۲} (\boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{۱}_n)' \boldsymbol{Y}^{-۱} (\boldsymbol{Y} \boldsymbol{X}^{(k)} \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{۱}_n) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp\big\{-\frac{\lambda}{۲}\big((\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)})'\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)}) \\ &+ (b_۰+\mathbf{۱}'_n\boldsymbol{Y}^{-۱}\mathbf{۱}_n+\boldsymbol{\eta}'_۰\boldsymbol{V}_۰^{-۱}\boldsymbol{\eta}_۰)\big)\big\}\lambda^{\frac{a_۰+n+p_k}{۲}-۱} \\ &= \lambda^{\frac{a_۰+n+p_k}{۲}-۱}\exp\big\{-\frac{\lambda}{۲}\big(Q_۲(\boldsymbol{\beta}^{(k)})+u^{(k)}\big)\big\}, \qquad (۱۰) \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که در آن

$$Q_۲(\boldsymbol{\beta}^{(k)})=(\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)})'\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)}), \qquad (۱۱)$$

یک نمایش درجه دوم بر حسب $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ را نمایش می‌دهد و

$$u^{(k)}=b_۰+\mathbf{۱}'_n\boldsymbol{Y}^{-۱}\mathbf{۱}_n+\boldsymbol{\eta}'_۰\boldsymbol{V}_۰^{-۱}\boldsymbol{\eta}_۰-\boldsymbol{d}^{(k)'}{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)}, \qquad (۱۲)$$

وابسته به مشاهدات است، که در آن $\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}=(\boldsymbol{V}_۰^{-۱}+\boldsymbol{X}^{(k)'}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{(k)})$ و $\boldsymbol{d}^{(k)}=\boldsymbol{V}_۰^{-۱}\boldsymbol{\eta}_۰+n\bar{\boldsymbol{x}}'^{(k)}$. با انتگرال‌گیری از توزیع توام (۱۰) توزیع پسین حاشیه‌ای λ به‌صورت

$$\pi(\lambda|\boldsymbol{y})\propto\lambda^{\frac{a_۰+n+p_k}{۲}-۱}\exp\{\frac{-\lambda}{۲}u^{(k)}\}\int_{\mathbb{R}^{p_k}}\exp\{\frac{-\lambda}{۲}Q_۲(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\}\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \qquad (۱۳)$$

به‌دست می‌آید. عبارت زیر انتگرال در رابطه (۱۳) متناسب با هسته یک توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین ${\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}$ و ماتریس واریانس $(\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{(k)})^{-۱}$ است. بنابراین

$$\lambda|\boldsymbol{y}\sim Gamma\big(\frac{a_۰+n}{۲},\frac{u^{(k)}}{۲}\big). \qquad (۱۴)$$

همچنین توزیع پسین حاشیه‌ای بردار ضرایب رگرسیونی در مدل M_k را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}|\boldsymbol{y}) &\propto \int_{\mathbb{R}^+}\lambda^{\frac{a_۰+n+p_k}{۲}-۱}\exp\big\{\frac{-\lambda}{۲}\big(Q_۲(\boldsymbol{\beta}^{(k)})+u^{(k)}\big)\big\}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\frac{a_۰+n+p_k}{۲})}{\big(\frac{Q_۲(\boldsymbol{\beta}^{(k)})+u^{(k)}}{۲}\big)^{\frac{a_۰+n+p_k}{۲}}} \\ &\propto \big(۱+\frac{(\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)})'{\boldsymbol{W}^{(k)}}^{-۱}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}-{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}}^{-۱}\boldsymbol{d}^{(k)})}{a_۰+n}\big)^{-\frac{a_۰+n+p_k}{۲}} \end{aligned}$$

نوشت، که متناسب با هسته یک توزیع t-استودنت غیرمرکزی با درجه آزادی $a_\circ + n$، پارامتر مکان $\boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)}$ و ماتریس مقیاس $\boldsymbol{W}^{(k)} = \frac{u^{(k)}}{(a_\circ+n)}\boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}$ است؛ یعنی

$$\boldsymbol{\beta}^{(k)}|\boldsymbol{y} \sim T_{p_k}(a_\circ + n, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)}, \boldsymbol{W}^{(k)}). \tag{۱۵}$$

بنابراین براوردگر بیزی پارامترهای λ و $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$، تحت تابع زیان توان دوم خطا، به‌ترتیب به‌صورت

$$\hat{\lambda}_B = \mathrm{E}(\lambda|\boldsymbol{y}) = \frac{a_\circ + n}{u^{(k)}}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_B^{(k)} = \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}|\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)},$$

هستند. بر اساس رابطه (۱)، براوردگرهای مبتنی بر روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها برای این دو پارامتر عبارتند از

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{BMA} &= \sum_{k=1}^{T}\hat{\lambda}_B\pi(M_k|\boldsymbol{y}) = (a_\circ + n)\sum_{k=1}^{T}\frac{\pi(M_k|\boldsymbol{y})}{u^{(k)}},\\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{BMA} &= \sum_{k=1}^{T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_B^{(k)}\pi(M_k|\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)}\pi(M_k|\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

۳.۳ محاسبه احتمال پسین درست بودن مدل‌ها

درستنمایی حاشیه‌ای مدل kام، رابطه (۴)، را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{y}|M_k) &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{p_k}}\exp\{\frac{-b_\circ}{2}\lambda\}\exp\{\frac{-\lambda}{2}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)'\boldsymbol{V}_\circ^{-1}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}_\circ)\}\\ &\times \lambda^{\frac{n}{2}}\exp\{\frac{-\lambda}{2}Q_1(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\}\lambda^{\frac{a_\circ+p_k}{2}-1}\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\lambda^{\frac{a_\circ+n+p_k}{2}-1}e^{\frac{-\lambda}{2}u^{(k)}}\int_{\mathbb{R}^{p_k}}\exp\{\frac{-\lambda}{2}Q_2(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\}\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda, \end{aligned}\tag{۱۶}$$

نوشت، که در آن تابع نمایی زیر انتگرال دوم متناسب با هسته یک توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین $\boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)}$ و ماتریس کواریانس $(\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{(k)})^{-1}$ است. بنابراین رابطه (۱۶) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{y}|M_k) &= \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{\frac{a_0+n+p_k}{2}-1} \exp\{\frac{-\lambda}{2}u^{(k)}\}(2\pi)^{\frac{p_k}{2}}|\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{p_k}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p_k}{2}}|\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}|^{-\frac{1}{2}}} \exp\{\frac{-\lambda}{2}Q_2(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\}\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda \\ &= (2\pi)^{\frac{p_k}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{\frac{a_0+n}{2}-1} \exp\{\frac{-u^{(k)}}{2}\lambda\}\mathrm{d}\lambda, \qquad (17) \end{aligned}$$

بازنویسی نمود. به‌گونه‌ای مشابه، عبارت زیر انتگرال آخر در رابطه (۱۷) متناسب با هسته یک توزیع گاما با پارامترهای $\frac{a_0+n}{2}$ و $\frac{u^{(k)}}{2}$ است. در نتیجه

$$p(\boldsymbol{y}|M_k) = \frac{\Gamma(\frac{a_0+n}{2})(2\pi)^{\frac{p_k}{2}}}{|\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}|^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}^{\frac{a_0+n}{2}}}\big(b_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} + \boldsymbol{\eta}_0'\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{d}'^{(k)}\boldsymbol{\Sigma}^{(k)^{-1}}\boldsymbol{d}^{(k)}\big)^{-\frac{a_0+n}{2}}.$$

اکنون می‌توان احتمال پسین درست بودن مدل kام را با استفاده از رابطه (۳) به دست آورد.

۳.۴ محاسبه توزیع پیش‌بین تحت مدل kام

اگر $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots . y_n)$ مشاهدات مربوط به گذشته و y_{new} مشاهده‌ای مربوط به آینده باشد، توزیع پیش‌بین متناظر با مدل kام را می‌توان به‌صورت

$$f(y_{new}|M_k, \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{p_k}} f(y_{new}|\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda, M_k)\pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda|M_k, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda,$$

نوشت، که در آن $\pi(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda|M_k, \boldsymbol{y})$ توزیع پسین توام پارامترها تحت مدل kام و

$$f(y_{new}|\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda, M_k) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_{new}^3}}\exp\big\{-\frac{\lambda}{2}\frac{(y_{new}-\mu)^2}{y_{new}\mu^2}\big\}, \qquad (18)$$

تابع چگالی توزیع گاوسی وارون است. با توجه به رابطه $\mu^{(k)^{-1}} = \boldsymbol{x}'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)}$، رابطه (۱۸) به‌صورت

$$f(y_{new}|\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda, M_k) \quad = \quad \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi y_{new}^3}} \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2} Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\Big\},$$

بازنویسی می‌شود، که در آن

$$Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = (y_{new}\boldsymbol{x}'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)} - 1)' y_{new}^{-1} (y_{new}\boldsymbol{x}'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)} - 1), \qquad (19)$$

یک نمایش درجه دوم برحسب $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
p(y_{new}|M_k, \boldsymbol{y}) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi y_{new}^3}} \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{p_k}} \lambda^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2} Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\Big\} \lambda^{\frac{a_0+n+p_k}{2}-1} \\
&\times \quad \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2}\big(Q_2(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + u^{(k)}\big)\Big\} \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi y_{new}^3}} \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^{p_k}} \lambda^{\frac{a_0+n+1+p_k}{2}-1} \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2} \\
&\times \quad \big(Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + Q_2(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + u^{(k)}\big)\Big\} \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)}\mathrm{d}\lambda, \qquad (20)
\end{aligned}$$

عبارت موجود در تابع نمایی زیر انتگرال (۲۰) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned}
Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + Q_2(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + u^{(k)} \quad &= \quad (y_{new}\boldsymbol{x}'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)} - 1)' y_{new}^{-1} (y_{new}\boldsymbol{x}'^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)} - 1) \\
&+ \quad b_0 + \boldsymbol{\beta}'^{(k)}(\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{X}'^{(k)}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{(k)})\boldsymbol{\beta}^{(k)} \\
&- \quad 2\boldsymbol{\beta}'^{(k)}(\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 + n\bar{\boldsymbol{x}}'^{(k)}) + \boldsymbol{\eta}_0'\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 \\
&+ \quad \mathbf{1}_n'\boldsymbol{Y}^{-1}\mathbf{1}_n \\
&= \quad b_0 + \boldsymbol{\beta}'^{(k)}\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{\beta}^{(k)} - 2\boldsymbol{\beta}'^{(k)}\boldsymbol{c}^{(k)} + \boldsymbol{\eta}_0'\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 \\
&+ \quad \mathbf{1}_n'\boldsymbol{Y}^{-1}\mathbf{1}_n + y_{new}^{-1} \\
&= \quad Q_3(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + g^{(k)}(y_{new}),
\end{aligned}$$

نوشت، که در آن

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{(k)} &= (\boldsymbol{V}_{\circ}^{-۱}\boldsymbol{\eta}_{\circ} + n\bar{\boldsymbol{x}}'^{(k)} + \boldsymbol{x}^{(k)}), \\ \boldsymbol{H}^{(k)} &= (\boldsymbol{V}_{\circ}^{-۱} + \boldsymbol{X}'^{(k)}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{x}^{(k)}y_{new}\boldsymbol{x}'^{(k)}), \\ Q_{۳}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) &= (\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{H}^{(k)^{-۱}}\boldsymbol{c}^{(k)})'\boldsymbol{H}^{(k)}(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \boldsymbol{H}^{(k)^{-۱}}\boldsymbol{c}^{(k)}), \\ g^{(k)}(y_{new}) &= b_{\circ} + \boldsymbol{۱}_n'\boldsymbol{Y}^{-۱}\boldsymbol{۱}_n + \boldsymbol{\eta}_{\circ}'\boldsymbol{V}_{\circ}^{-۱}\boldsymbol{\eta}_{\circ} + y_{new}^{-۱} - \boldsymbol{c}'^{(k)}\boldsymbol{H}^{(k)^{-۱}}\boldsymbol{c}^{(k)}. \end{aligned}$$

بنابراین توزیع پیش‌بین به صورت

$$\begin{aligned} f(y_{new}|M_k, \boldsymbol{y}) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi y_{new}^{۳}}} \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{\frac{a_{\circ}+n+۱+p_k}{۲}-۱} \exp\{\frac{-\lambda}{۲} g^{(k)}(y_{new})\} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{p_k}} \exp\{\frac{-\lambda}{۲} Q_{۳}(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\} \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}^{(k)} \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

است، که در آن تابع نمایی زیر انتگرال دوم، هسته توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین $\boldsymbol{H}^{(k)^{-۱}}\boldsymbol{c}^{(k)}$ و واریانس $(\lambda\boldsymbol{H}^{(k)})^{-۱}$ است. بنابراین برابری

$$f(y_{new}|M_k, \boldsymbol{y}) = \frac{(۲\pi)^{\frac{p_k}{۲}} |\boldsymbol{H}^{(k)}|^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۲\pi y_{new}^{۳}}} \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{\frac{a_{\circ}+n+۱}{۲}-۱} \exp\{\frac{-\lambda}{۲} g^{(k)}(y_{new})\} \mathrm{d}\lambda,$$

به‌دست می‌آید، که در آن عبارت زیر انتگرال هسته یک توزیع گاما با پارامترهای $\frac{a_{\circ}+n+۱}{۲}$ و $\frac{g^{(k)}(y_{new})}{۲}$ است. در نتیجه توزیع پیش‌بین تحت مدل kام عبارت است از:

$$f(y_{new}|M_k, \boldsymbol{y}) = \frac{\Gamma(\frac{a_{\circ}+n+۱}{۲})(۲\pi)^{\frac{p_k}{۲}} |\boldsymbol{H}^{(k)}|^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۲\pi y_{new}^{۳}} \big(\frac{g^{(k)}(y_{new})}{۲}\big)^{\frac{a_{\circ}+n+۱}{۲}}}, \quad y_{new} > \circ.$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای بررسی کارایی میانگین‌گیری بیزی تحت توزیع گاوسی وارون، یک مدل رگرسیون به‌صورت

$$y_i|\boldsymbol{x}_i \sim IG(\mu(\boldsymbol{x}_i), \lambda), \quad i = ۱, \ldots, n, \qquad (۲۱)$$

در نظر گرفته شده است، که در آن میانگین متغیر پاسخ با استفاده از تابع پیوند وارون میانگین به صورت

$$\mu^{-1}(\boldsymbol{x}_i) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_8 x_8,$$

با ۸ متغیر تبیینی مربوط می‌شود. مقادیر متغیرهای تبیینی به‌صورت مستقل و از توزیع نرمال استاندارد شبیه‌سازی شده‌اند. سپس با فرض $\lambda = 1$ و

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8) = (2/7, 6/4, 1/5, 5, 4/1, 3/2, 0/1, 6/6),$$

مقادیر متغیرهای پاسخ از توزیع گاوسی و به ازای مقادیر مختلف چولگی به راست شبیه‌سازی شده‌اند تا توانایی رویکرد پیشنهادی در مدل‌بندی داده‌های مثبت چوله به راست ارزیابی شود. در این حالت فضای مدل شامل $2^8 = 256$ مدل است. روش پنجره اوکام، برپایه مقایسه احتمال پسین درست بودن مدل‌ها، پنج مدل را که در جدول ۱ فهرست شده‌اند به عنوان بهترین مدل‌های موجود معرفی می‌کند. برای ارزیابی میزان برازش و پیچیدگی مدل‌ها از معیارهای اطلاع آکاییک، بیز و هانان–کویین به‌ترتیب به‌صورت

$$\begin{aligned} AIC &= -2\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\lambda}) + 2k, \\ BIC &= -2\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\lambda}) + k\log(n), \\ HQC &= -2\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\lambda}) + 2k\log(\log n), \end{aligned}$$

استفاده شده است، که در آنها $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و $\hat{\lambda}$ به ترتیب براوردگرهای بیز پارامترهای $\boldsymbol{\beta}$ و λ تحت تابع زیان توان دوم خطا، k تعداد پارامترهای مدل، n اندازه نمونه و $\ell(\cdot)$ تابع لگ‌درستنمایی متناظر با هر مدل هستند. این معیارها از دو مولفه تشکیل شده‌اند. مولفه اول که ضریبی از تابع لگ‌درستنمایی براورد شده است، میزان برازش مدل به داده‌ها را ارزیابی می‌کند و مولفه دوم که تابعی از تعداد پارامترهای مدل است، پیچیدگی مدل را اندازه می‌گیرد. این معیارها بین دو مدل با برازش یکسان، مدل پیچیده‌تر را به دلیل عدم رعایت اصل امساک، جریمه و مدل ساده‌تر را برمی‌گزینند. گرچه مقادیر معیارهای اطلاع آکاییک، بیز و هانان–کویین برای مدل‌هایی که در پنجره اوکام قرار گرفته‌اند نزدیک به یکدیگر هستند، اما مدل اول از نظر هر سه معیار و همچنین احتمال پسین، مطلوب‌تر است. در این مدل، متغیرهای تبیینی X_1 و X_7 دارای تاثیر معنی‌دار بر متغیر پاسخ نیستند. به‌منظور مقایسه دو رویکرد گزینش مدل و میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها، براورد ضرایب

جدول ۱. معیارهای AIC، BIC و HQC واحتمال پسین درست بودن مدل‌های در پنجره اوکام.

شماره مدل	مدل								AIC	BIC	HQC	احتمال پسین درست بودن
۱	.	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	.	X_8	−۲۰/۸۰۱	−۳۰/۷۸۷	−۶۵/۷۹۵	۵۷/۰
۲	X_1	X_2	.	X_4	X_5	X_6	.	X_8	−۵۳/۷۹۷	−۶۲/۷۸۳	−۹۸/۷۹۱	۱۰/۰
۳	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	.	.	X_8	−۵۷/۷۹۸	−۶۷/۷۸۴	−۰۲/۷۹۳	۱۹/۰
۴	X_1	X_2	X_3	X_4	.	X_6	.	X_8	−۴۷/۷۹۲	−۵۶/۷۷۸	−۹۲/۷۸۶	۰۱/۰
۵	.	X_2	X_3	X_4	X_5	.	X_7	X_8	−۱۷/۷۹۸	−۲۷/۷۸۴	−۶۲/۷۹۲	۱۳/۰

مدل رگرسیونی ردیف ۱ به‌همراه انحراف معیار این براوردها در جدول ۲ ارایه شده‌اند. مقادیر متناظر براورد ضرایب رگرسیونی و انحراف معیار آنها در روش میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها به‌همراه احتمال ناصفر بودن هر یک از ضرایب رگرسیونی که احتمال موثر بودن نامیده می‌شود، نیز ارایه شده‌اند. این احتمال برای متغیر تبیینی jام به‌صورت

$$P(\beta_j \neq 0|\boldsymbol{Y}) = \sum_{\mathcal{A}_j} \pi(M_k|\boldsymbol{Y}), \tag{۲۲}$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\mathcal{A}_j = \{M_k \in \mathcal{M};\ \beta_j \neq 0\}$ مجموعه همه مدل‌های شامل متغیر تبیینی X_j است.

جدول ۲. براورد ضرایب، انحراف معیار و احتمال موثر بودن در میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها و گزینش مدل.

	رویکرد				
	میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها			گزینش مدل	
ضرایب رگرسیونی	برآورد ضرایب	انحراف معیار	احتمال موثر بودن	براورد ضرایب	انحراف معیار
β_1	۰/۷۷	۱/۳۳	۰/۳۰	۰	۰
β_2	۶/۶۲	۱/۰۱	۱	۶/۴۷	۰/۹۲
β_3	۵/۶۴	۰/۸۳	۱	۵/۵۵	۰/۸۱
β_5	۳/۵۰	۰/۸۹	۰/۹۹	۳/۵۱	۰/۸۱
β_6	۱/۵۱	۱/۲۴	۰/۶۷	۲/۱۵	۰/۸۰
β_7	۰/۲۱	۰/۶۳	۰/۱۳	۰	۰
β_8	۸/۱۸	۰/۸۶	۱	۸/۳۰	۰/۸۰

چنانچه پیش از این بحث شد، یکی از نارسایی‌های روش‌های سنتی مدل‌سازی در نظر نگرفتن

عدم‌حتمیت واقعی براوردها و کم براورد نمودن عدم حتمیت است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، رویکرد میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها این نارسایی را برطرف می‌کند و خطای معیار براورد ضرایب رگرسیونی در این رویکرد، از مقادیر متناظر در رویکرد گزینش مدل بزرگ‌تر هستند. رفتری و همکاران (۱۹۹۳) نشان دادند که عدم حتمیت پسینی هر کمیت تصادفی مانند Δ در فرایند مدل‌سازی را می‌توان به صورت $Var(\Delta|D) = U_S + U_P + U_M$، به سه جزء نامنفی تجزیه کرد، که در آن U_S، U_P و U_M به ترتیب عدم حتمیت ناشی از نمونه تصادفی، پارامترهای مدل، و انتخاب مدل را نشان می‌دهند. روش‌های گزینش مدل سومین جزء این تجزیه را در نظر نمی‌گیرند و به همین دلیل یک ایراد کلی این روش‌ها آن است که واریانس کمیت‌های مورد علاقه را کمتر از مقدار واقعی آنها براورد می‌کنند. توجه به این نکته ضروری

جدول ۳. میانگین شاخص‌های نیکویی برازش برای مدل گاوسی وارون و مقادیر متناظر برای مدل گاوسی.

چولگی	مدل	AIC	BIC	HQC
۰۵/۰	گاوسی وارون	−۹۰/۷۳	−۸۸/۱۲	−۸۹/۶۷
	گاوسی	−۰/۶۸	۱/۴۷	۰/۱۹
۲۵/۰	گاوسی وارون	−۱۸۳/۱۰	−۱۷۷/۹۰	−۱۸۰/۹۹
	گاوسی	۰/۴۴	۱/۵۴	۰/۸۹
۵/۰	گاوسی وارون	−۲۳۴/۴۴	−۲۲۷/۸۷	−۲۳۱/۷۸
	گاوسی	۰/۵۸	۱/۵۸	۰/۹۸
۷۵/۰	گاوسی وارون	−۲۴۸/۷۴	−۲۴۱/۰۲	−۲۴۵/۶۱
	گاوسی	۰/۵۹	۱/۵۸۶	۰/۹۹
۹۵/۰	گاوسی وارون	−۲۵۱/۶۶	−۲۴۳/۸۸	−۲۴۸/۵۱
	گاوسی	۰/۶۰	۱/۵۹	۱/۰۰

است که دو رویکرد گزینش مدل و میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها، فلسفه‌های کاملاً متفاوتی دارند. در روش میانگین‌گیری بیزی، هیچ مدلی به‌عنوان مدل درست گزینش نمی‌شود، بلکه از اطلاعات همه مدل‌ها استفاده می‌شود. همچنین در این روش هیچ متغیر تبیینی کاملاً از مدل حذف نمی‌شود، بلکه هر متغیر به اندازه اهمیت و اطلاعاتی که دربردارد، در مدل‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مقایسه رویکرد میانگین‌گیری بیزی مدل‌ها در جوامع گاوسی و گاوسی وارون، از میانگین وزنی معیارهای آکاییک، اطلاع بیز و هانان–کویین مدل‌های قرار گرفته در پنجره اوکام، که با احتمال پسین متناظرشان وزن‌دار شده‌اند، استفاده شده است. جدول ۳ مقادیر به‌دست آمده را برای به ازای مقادیر مختلف چولگی نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مقادیر این معیارها برای رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی وارون به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای از مقادیر متناظر برای رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی کمتر هستند. همچنین با افزایش میزان چولگی، کارایی

رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی وارون افزایش و کارایی مدل مبتنی بر مدل گاوسی کاهش می‌یابد. این بدان معنی است که مدل‌هایی که در رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی وارون برای میانگین‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند، مدل‌های قرار گرفته در پنجره اوکام، به صورت میانگین از مدل‌های متناظر در رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی برازش بهتری به مشاهدات دارند.

۵ یک مثال واقعی

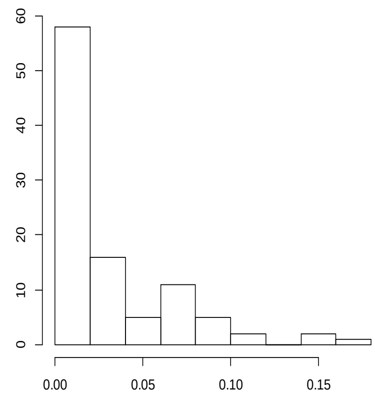
در این بخش با استفاده از یک مثال واقعی نشان داده می‌شود که رویکرد پیشنهادی برای میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی در شرایطی که مشاهدات متغیر پاسخ مثبت و چوله به راست هستند، به خوبی می‌تواند عدم تقارن مشاهدات را در فرآیند مدل‌سازی لحاظ نماید و به همین دلیل در مقایسه با رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی کارایی بیشتری دارد. برای این منظور، از مشاهدات مربوط به یک مطالعه زلزله‌شناسی در ژاپن در سال ۲۰۰۰ استفاده می‌شود. هدف از این مطالعه بررسی تاثیر سه متغیر تبیینی فاصله تا مرکز زلزله، عمق زلزله و نوع خاک بر ماکسیمم شتاب زمین[۱] است. به دلیل وجود سه متغیر تبیینی، فضای مدل شامل $۸ = ۲^۳$ مدل است. روش پنجره اوکام سه مدل را، برپایه مقایسه احتمال پسین آنها، به عنوان بهترین مدل‌های موجود معرفی می‌کند. بافت‌نگار مشاهدات پاسخ، شکل ۶ مثبت و چوله به راست بودن توزیع این مشاهدات را نشان می‌دهد. آماره آزمون کلموگروف –اسمیرنوف با مقدار ۰/۰۹۴۱۳ و p–مقدار ۰/۳۳۸، پیروی مشاهدات از توزیع گاوسی وارون را تایید می‌کند (اجمن، ۲۰۰۲).

جدول ۴. براورد ضرایب رگرسیونی، انحراف معیار براوردگر بیز و بازه باورمند بیزی ۹۵٪.

ضرایب رگرسیونی	برآورد ضرایب	انحراف معیار	بازه باورمند بیزی
$\beta_۱$	۰/۷۷۶	۰/۰۵۳۶	(۰/۶۶،۰/۸۶)
$\beta_۲$	۰/۰۶۷	۰/۰۲۰	(۰/۰۳،۰/۱۰)
$\beta_۳$	−۶/۸۹۲	۰/۹۱۸	(−۸/۴۶،−۴/۹۳)

براورد ضرایب رگرسیونی حاصل از میانگین‌گیری بیزی و گزینش مدل به همراه انحراف معیار براوردگرهای متناظر آنها به ترتیب در جداول ۴ و ۵ آورده شده‌اند. همچنین، در روش میانگین‌گیری بیزی احتمال موثر بودن هر یک از متغیرهای تبیینی برپایه رابطه (۲۲) محاسبهو در جدول ۵ ارایه شده است. چون احتمال موثر بودن متغیرهای اول و سوم برابر ۱ و احتمال موثر بودن متغیر دوم ۰/۷۷ است، می‌توان چنین نتیجه

[1]Peak Ground Acceleration (PGA)



شکل ۱. بافت نگار مشاهدات مربوط به ماکسیمم شتاب زمین.

جدول ۵. براورد ضرایب رگرسیونی، انحراف معیار براوردگرها و احتمال موثر بودن متغیرهای تبیینی.

ضرایب رگرسیونی	برآورد	انحراف معیار	احتمال موثر بودن
β_1	۰/۷۷۱	۰/۰۵۴	۱
β_2	۰/۰۵۴	۰/۰۳۴	۰/۷۷
β_3	−۶/۴۱	۱/۳۹	۱

گرفت که متغیر تبیینی دوم یعنی عمق زلزله از سطح زمین در مقایسه با سایر متغیرهای تبیینی تاثیرگذاری به مراتب کمتری بر مشاهدات پاسخ دارد. همچنین، در رویکرد گزینش مدل، بازه باورمند بیزی ۹۵٪، موثر بودن هر سه متغیر تبیینی را در مدل تایید می‌کند و از این نظر تفاوتی بین آنها قائل نمی‌شود. افزون بر این موارد، چنانچه پیش از این نیز گفته شده بود، روش میانگین‌گیری بیزی عدم حتمیت براوردگرها را به‌صورت واقعی‌تری محاسبه و ارایه می‌کند. بزرگتر بودن انحراف معیار براوردگرهای ضرایب رگرسیونی در روش میانگین‌گیری بیزی نسبت به رویکرد گزینش مدل، این موضوع را تایید می‌کند. برای ارزیابی میزان برازش مدل‌های مختلف به مشاهدات، از میانگین وزنی معیارهای اطلاع اکاییک، بیز و هانان–کویین که با احتمال پسین متناظر با هر مدل وزن‌دار شده‌اند، محاسبه شده است. از سوی دیگر، دقت پیش‌بینی یک مدل را می‌توان با استفاده از معیار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی [۱] ارزیابی نمود که با استفاده از شیوه ارزیابی متقابل [۲] محاسبه می‌شود. برای این منظور، بخشی از داده‌ها را حذف می‌کنند و مدل را

[1]Mean Square of Error Predictions (MSEP)
[2]Cross Validation (CV)

به مشاهدات باقیمانده برازش می‌دهند. سپس داده‌های حذف شده را با استفاده از مدل برازش داده شده، پیش‌بینی می‌کنند. از مقایسه داده‌های پیش‌بینی شده و مقادیر واقعی، معیار

$$CV_{MSEP} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\mu_i - \hat{\mu}_{-i})^{۲},$$

برای ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل به‌دست می‌آید، که در آن $\hat{\mu}_{-i}$ مقدار براورد شده μ_i، برپایه همه مشاهدات غیر از مشاهده iام است. نتایج در جدول ۶ ارائه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که مقادیر متناظر با رویکرد مبتنی بر توزیع گاوسی وارون به طور قابل ملاحظه‌ای از مقادیر متناظر این معیارها برای مدل مبتنی بر توزیع گاوسی (مادیگان و رفتری، ۱۹۹۴) کمتر هستند. این عملکرد بهتر به آن دلیل است که مدل پیشنهادی، برخلاف مدل‌های رقیب، عدم تقارن مشاهدات را به گونه‌ای مطلوب در مدل‌بندی مدنظر قرار می‌دهد. مقدار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای دو رویکرد گزینش مدل و میانگین‌گیری بیزی با استفاده از روش ارزیابی متقابل محاسبه و در جدول ۷ آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، مقادیر این معیارها برای مدل مبتنی بر توزیع گاوسی نتایج نشان‌دهنده کارایی پیش‌بینی بیشتر رویکرد میانگین‌گیری بیزی تحت هر دو توزیع گاوسی و گاوسی وارون نسبت به رویکرد گزینش مدل است. همچنین، مقادیر میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی مربوط به رویکرد میانگین‌گیری بیزی مبتنی بر توزیع گاوسی وارون، به دلیل قابلیت این رویکرد در مدل‌بندی عدم تقارن مشاهدات پاسخ، از مقادیر متناظر در رویکرد متناظر تحت توزیع گاوسی کوچکتر هستند. در پایان یادآوری این نکته ضروری است که مقدار آستانه در پنجره

جدول ۶. میانگین شاخص‌های نیکویی برازش برای مدل‌های قرارگرفته در پنجره اوکام.

توزیع متغیر پاسخ	AIC	BIC	HQC
گاوسی	−۰۷/۱۱۹	−۳۲/۱۱۸	−۸۹/۱۱۹
گاوسی وارون	−۵۳/۷۸۳	−۵۲/۷۸۰	−۳۱/۷۸۲

اوکام توسط تحلیل‌گر تعیین می‌شود و پهنای پنجره از آن تاثیر می‌پذیرد. هر چه پهنای این پنجره بزرگتر باشد، تعداد مدل‌هایی که در میانگین‌گیری بیزی حضور دارند، بیشتر می‌شود. گرچه افزایش تعداد مدل‌های قرارگرفته در پنجره اوکام ممکن است به افزایش کارایی رویکرد میانگین‌گیری بیزی بیانجامد، اما پیچیدگی محاسبات را نیز افزایش می‌دهد. در این مقاله، با توجه به تعداد متغیرهای تبیینی، مقدار آستانه به گونه‌ای انتخاب شده است که مصالحه‌ای بین دو جنبه یاد شده برقرار شود.

جدول ۷. میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای مدل‌سازی مبتنی بر توزیع‌های گاوسی و گاوسی وارون.

رویکرد مدل‌سازی	توزیع متغیر پاسخ	CV_{RMSE}
گزینش مدل	گاوسی	۱/۱۸۸
	گاوسی وارون	۰/۱۴۴
میانگین‌گیری بیزی	گاوسی	۰/۸۷۴
	گاوسی وارون	۰/۰۰۱

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای میانگین‌گیری بیزی مدل‌های رگرسیونی در شرایطی که متغیر پاسخ دارای توزیع گاوسی وارون است، پیشنهاد شد. نحوه محاسبه مولفه‌های مورد نیاز برای میانگین‌گیری بیزی مورد بحث قرار گرفت. نتایج ارزیابی، نشان می‌دهند که رویکرد میانگین‌گیری بیزی به دلیل عدم تکیه بر یک مدل و استفاده از اطلاعات مجموعه‌ای از بهترین مدل‌ها، در مقایسه با رویکرد گزینش مدل، هم قابلیت پیش‌بینی بهتری دارد و هم عدم حتمیت مدل‌ها را به صورت واقعی‌تری در فرایند مدل‌سازی لحاظ می‌کند. بعلاوه، روش پیشنهادی به دلیل استفاده از توزیع گاوسی وارون به خوبی می‌تواند در بسیاری از کاربردها که مشاهدات پاسخ مثبت و چوله به راست هستند، برای مدل‌بندی عدم تقارن مشاهدات به کار گرفته شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و سردبیر گرامی مجله علوم آماری برای ارائه پیشنهادهای ارزشمند در راستای افزایش کیفیت این مقاله، سپاسگزاری می‌کنند.

مراجع

اسحاقی، ص. باغیشنی، ح. اقبال، ن. (۱۳۹۷)، یک معیار جدید انتخاب مدل مبتنی بر داده تاگی، مجله علوم آماری، **۱۲**، ۲۱–۳۷.

Bhattacharyya, G. K. and Fries, A. (1982a). Inverse Gaussian Regression and Accelerated Life Tests, Survival Analysis (eds. J. Crowly and R. A.

Johnson), IMS Lecture Notes-Monograph Series, 2, 101–118, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.

Chaubey, Y. P. (2002), Estimation in Inverse Gaussian Regression: Comparison of Asymptotic and Bootstrap Distributions, Journal of Statistical Planning and Inference, **100**, 135–143.

Edgeman, R. L. (1990). Assessing the Inverse Gaussian Distribution Assumption, IEEE Transactions on Reliability, **39**, 352-355.

Hoeting, J. (1994), *Accounting for Uncertainty in Linear Regression Models*, Ph.D Dissertation, Department of Statistics, University of Washington.

Hoeting, J., Raftery, A. and Madigan, D. (1996), A Method for Simultaneous Variable Selection and Outlier Identification in Linear Regrassion Models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **22**, 251-271.

Hoeting, J., Raftery, A. and Madigan, D. (1999), Bayesian Simultaneous Variable Selection and Transformation Selection in Linear Regression Models, *Technical Report 9905*, Department of Statistics, Colorado State Univ. Avilable at www. Colostate. edu.

Leamer, E. E. (1978), *Specification Searches*, Wiley, New York.

Lipkovich, I. A. (2002), *Bayesian Model Averaging and Variable Selection in Multivariate Ecological Models*, Ph.D Dissertation, Faculty of The Virginia Polytechnic Institue and State University, Blacksbrg, Virginia.

Madigan, D. and Raftery, A. (1994), Model Selection and Accounting for Model Uncertainty in Graphical Models Using Occam's Window, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1535-1546.

Meshkani, M. R. Fallah, A. and Kavousi, A. (2016), Bayesian Analysis of Covariance under Inverse Gaussian Model, *Journal of Applied Statistics*, **43**, 280-298.

Nguefack-Tsague, G. and Zucchini, W. (2016), A Mixture-Based Bayesian Model Averaging Method, *Journal of Statistics*, **6**, 220-228.

Raftery, A. E. (1995), Bayesian Model Selection in Social Research (With Discussion), in Sociological Methodology 1995 (P. V. Marsden, ed.), 111-195. Blakwell. Cambridge, MA.

Raftery, A. E., David, M. and Jenifer, A. H. (1993), Model Selection and Accounting for Model Uncertainty in Generalized Linear Models, Technical Report, **262**.

Raftery, A. E., David, M. and Jenifer, A. H. (1997), Bayesian Model Averaging in Linear Regression Models, *Journal of the American Statistical Association*, **97**, 179-191.

Robert B. N. J. (2000), *Multivariate Applications of Bayesian Model Averaging*, Ph.D Disertation, Faculty of the Virginia Polytechnic Institue and Stat University, Blacksburg, Virginia.

Sparks, R. S., Sutton, P., Toscas, P. and Ormerod, J. T. (2011), Modeling Inverse Gaussian Data with Censored Response Values: EM Versus MCMC, *Advances in Decision Sciences*, Doi:10.1155/2011/571768.

Taplin, R. H. (1993), Robust Likelihood Calculation for Time Series, *Journal of Royal Statistical society*, Series B, **55**, 829-836.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2021
Vol. 15, No. 1, pp 97-118
DOI: 10.29252/jss.15.1.99

Bayesian Model Averahing in Inverse Gaussian Regression Analysis

Rahimian Azad, Z., Fallah, A.
Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract: This paper considers the Bayesian model averaging of inverse Gaussian regression models for regression analysis in situations that the response observations are positive and right-skewed. The computational challenges related to computing the essential quantities for executing of this methodology and their dominating ways are discussed. Providing closed form expressions for the interested posterior quantities and considering suitable prior distributions are two attractive aspects of the proposed methodology. The proposed approach has been evaluated via a simulation study, and its applicability is expressed by using a real example related to the seismic studies.

Keywords: Bayesian model averaging, Regression, Inverse Gaussian distribution, Predictive distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62J02, 62C10.