

## برآوردگرهای بیزی آستانه موجک برای تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس توزیع پیشین آمیخته

محمود افشاری، ابوذر بازیاری، یگانه مرادیان، حمید کرمی‌کبیر  
گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۱/۱۴

**چکیده:** در این مقاله، برآوردگرهای موجک تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های مختلف تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا در فضای بسوف محاسبه شده است. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی، بهینگی برآوردگرهای مختلف آستانه موجک شامل میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز، آستانه عام و آستانه قطعی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که برآوردگر آستانه قطعی، میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به سایر برآوردگرهای بدست آمده دارد. **واژه‌های کلیدی:** برآوردگر آستانه موجک، تابع رگرسیون ناپارامتری، توزیع پیشین آمیخته، عامل بیز.

## ۱ مقدمه

تحلیل موجک<sup>۱</sup> یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید در علم ریاضیات است که مبتنی بر چندین دهه تحقیق و پژوهش بوده و در بسیاری از علوم از جمله مهندسی کاربرد فراوانی دارد. در تحلیل موجک، موج اصلی بر روی دسته‌ای از توابع پایه که موجک نامیده می‌شوند، تصویر شده و با استفاده از حاصل ضرب موج اصلی در تابع موجک، تحلیل موجک محاسبه می‌شود. تحلیل موجک به تحلیل در حوزه زمان-مقیاس (عکس فرکانس) می‌پردازد، به این معنی که این تحلیل اطلاعاتی در هر دو حوزه زمان و مقیاس ارائه می‌دهد.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab\_bazaryari@yahoo.com  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J07, 08G62, 60T65

<sup>1</sup>Wavelet analysis

این روش تحلیل پدیده‌های گذرا یا برای تحلیل توابعی که در بعضی از زمان‌ها تغییرات سریع دارند به کار می‌روند. موجک‌ها دوره محدودی دارند و برخلاف موج‌های سینوسی که هموار هستند، موجک‌ها ناهموار و نامتقارن هستند و به همین دلیل می‌توانند سیگنال‌های با تغییرات سریع را بهتر تحلیل کنند.

تبدیل موجکی که موج اولیه با استفاده از مجموع نامتناهی از ضرایب موجک گسسته<sup>۱</sup> بازسازی می‌شود به تبدیل موجک گسسته معروف است. نخستین تبدیل موجک گسسته توسط هار (۱۹۱۰) ارائه شده و معمول‌ترین مجموعه موجود برای تبدیل موجک توسط دابیز (۱۹۹۲) فرمول‌بندی شده است. بسیاری از مطالب پیشرفته ریاضی و آماری نظریه موجک در چوی (۱۹۹۲) آمده است. در تجزیه موجکی، موجک اصلی (تابع یا سیگنال) بر روی دسته‌ای از توابع موجک تصویر شده و با استفاده از حاصل ضرب موج اصلی و تابع موجک، تجزیه موجکی انجام می‌گیرد. موجک تابعی با میانگین صفر است که بسط بر اساس انتقال (حرکت در طول محور زمان) و اتساع (بسط موجک) آن انجام می‌شود. اساس موجک‌ها از موجک پدر<sup>۲</sup>  $\phi(\cdot)$  و موجک مادر<sup>۳</sup>  $\psi(\cdot)$  تشکیل شده است. برای هر مقدار  $0 \leq j$  و  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ، انتقال‌های مقیاسی توابع  $\phi$  و  $\psi$  به صورت  $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$  و  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$  نوشته می‌شوند، که در آن  $k \in \mathbb{Z}$  معرف انتقال بر روی بردار زمان و  $j \in \mathbb{Z}$  معرف مقیاس است. اگر  $V_j$ ها،  $j \in \mathbb{Z}$ ، دنباله‌ای از فضاها تودرتو به صورت  $V_j \subset V_{j+1}$  در نظر گرفته شود که توسط موجک‌های  $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$  تولید شده باشند، آنگاه تصویر تابع  $f$  روی فضای  $V_j$  به صورت  $P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(x)$  است، که در آن  $\alpha_{j,k} = \int_{s_x} \phi_{j,k}(x) f(x) dx$ ، همچنین اگر فضای تولید شده توسط موجک‌های  $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$  باشد، آنگاه برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  تقریب تابع  $f$  بر فضای  $V_j$  به صورت

$$\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k} = P_{j_0} f + \sum_{j \leq j_0} D_j f,$$

خواهد بود، که در آن  $\beta_{j,k} = \int_{s_x} \psi_{j,k}(x) f(x) dx$  و تابع  $D_j$  تصویر  $f$  روی فضای  $W_j$  است. در تبدیل موجکی تابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ، مجموعه‌های دوگانه نامتناهی وجود دارد که یکی روی وضوح  $j$  و دیگری

<sup>1</sup>Discrete wavelet coefficients

<sup>2</sup>Father wavelet

<sup>3</sup>Mother wavelet

روی مکان  $k$  بسته می‌شود. تبدیل موجکی این تابع و برآورد موجکی غیرخطی آن به صورت

$$f = \sum_{k \in Z} \alpha_k \phi_k + \sum_{k \in Z} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{jk} \psi_{jk}, \quad \hat{f} = \sum_{k \in Z} \hat{\alpha}_k \phi_k + \sum_{k \in Z} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_{jk} \psi_{jk},$$

خواهند بود، که در آن  $\hat{\alpha}_k = n^{-1} \sum_{i=1}^n \phi_k(x_i)$  و  $\hat{\beta}_{jk} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \psi_{jk}(x_i)$  در ادامه فرض می‌شود پایه‌های موجکی متعلق به فضای بسوف<sup>۱</sup>، یعنی کلاس توابع با نرم متناهی هستند.

**تعریف ۱.** اگر  $\Delta_h^{(r)} = \Delta_h^{(r-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(r-1)} f(x)$ ،  $r$  تفاضل از مرتبه  $r$ ،  $\Delta_h^{(0)} f(x) = f(x)$ ،  $r$  تفاضل از مرتبه صفر و برای  $\Delta_h^{(r)}$ ،  $\Delta_h^{(r)}$  تعریف شده باشد، ضریب  $r$  همواری تابع  $f \in L_p(I)$  به صورت  $w_{r,p}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^{(r)} f\|_{L_p(I_{rh})}$  تعریف می‌شود. به ازای مقادیر  $s > 0$ ،  $0 < p \leq \infty$  و  $0 < q \leq \infty$ ،  $r$  طوری انتخاب می‌شود که  $r - 1 \leq s \leq r$ . همچنین نرم فضای بسوف به صورت

$$|f|_{B_{p,q}^s} = \begin{cases} \left[ \int_0^\infty (h^{-s} w_{r,p}(f; h))^q \frac{dh}{h} \right]^{\frac{1}{q}} & 1 \leq q < \infty \\ \sup_h w_{r,p}(f; h) & q = \infty \end{cases}$$

تعریف می‌شود. اگر  $n = 1, \dots$ ،  $s = n + \alpha$ ،  $0 < \alpha \leq 1$  باشد آنگاه فضای بسوف  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  شامل همه توابع  $f$  است به طوری که  $f \in W_p^n(\mathbb{R})$  و  $\int_0^\infty \left| \frac{w_{r,p}(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right|^q \frac{dh}{h} < \infty$  و نرم آن عبارت است از

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = (\|f\|_{W_p^n(\mathbb{R})}^q + \int_0^\infty \left| \frac{w_{r,p}(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}.$$

**تعریف ۲.** تابع  $p_{\theta+\Delta}(x)/p_\theta(x)$  در  $\theta$  مشتق‌پذیر ضعیف است اگر به ازای هر تابع دلخواه  $h(\cdot)$  که در شرط  $\int h^\vee(x) p_\theta(x) d\mu(x) < \infty$ ، صدق می‌کند، تابع اندازه‌پذیر  $q(\cdot)$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int h(x) \left\{ \Delta^{-1} \left( \frac{p_{\theta+\Delta}(x)}{p_\theta(x)} - 1 \right) - q(x) \right\} p_\theta(x) d\mu(x) = 0.$$

<sup>1</sup>Besov space

۲۹۰ ..... برآوردگرهای بیزی آستانه موجک برای تابع رگرسیون ناپارامتری

در واقع شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیر ضعیف بودن، معادل با وجود تابع  $q_\theta(x)$  است، طوری که  $E[\delta(q_\theta(X))] = \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta(\delta(X))$ ، که در آن  $\delta(q_\theta(x))$  یک آماره دلخواه است، طوری که  $E_\theta(|\delta(q_\theta(X))|^2) < \infty$ .

لم ۱. (হারدلی و همکاران، ۱۹۹۸) فرض کنید  $\phi$  انتگرال‌پذیر باشد. دستگاه توابع  $\{\phi_{\circ k}, k \in \mathbb{Z}\}$  یک دستگاه یک‌معامد<sup>۱</sup> است اگر و فقط اگر

$$\sum_k |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1, \quad (a.e.). \quad (1)$$

گزاره ۱. (হারدلی و همکاران، ۱۹۹۸) فضای  $V_j$  آشیانی<sup>۲</sup>  $(V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z})$  است اگر و فقط اگر تابع  $2\pi$ -دوره‌ای<sup>۳</sup> و انتگرال‌پذیر (روی بازه  $(0, 2\pi)$ )  $m_{\circ}(\xi)$  وجود داشته باشد طوری که

$$\hat{\phi}(\xi) = m_{\circ}\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (a.e.). \quad (2)$$

دو شرایط زیر را در نظر بگیرید:

۱- تابع  $\theta_\phi(x) = \sum_k |\phi(x - k)|$  تعریف شود که  $\inf\{a \in \mathbb{R} : \theta_\phi^{-1}(x)(a, \infty) = \circ\} < \infty$   
 ۲- تابع کراندار ناصعودی  $\Phi$  وجود دارد طوری که  $\int \Phi(|u|)du < \infty$  و  $|\phi(u)| < \Phi(|u|)$ ،  $(a.e.)$ ،  
 و همچنین  $\int \Phi(|u|)|u|^{n+1}du < \infty$  به ازای یک عدد صحیح  $n \geq 0$  برقرار باشد.

قضیه ۱. (হারدلی و همکاران، ۱۹۹۸) فرض کنید برای موجک پدر  $\phi$  روابط (۱) و (۲) و شرط ۲ برقرار باشد. همچنین فرض کنید  $\phi$ ،  $n + 1$  بار مشتق‌پذیر ضعیف باشد و مشتق  $\phi^{(n+1)}$  در شرط ۱ صدق کند. آن‌گاه به ازای هر تابع انتگرال‌پذیر  $f$  و به ازای  $0 < s < n + 1$ ،  $1 \leq p, q \leq \infty$ ، داریم:  
 $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$

مثال ۱. برای تقریب هر تابع دلخواه در فضای بسوف  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  به ازای  $s < n + 1$ ، که در آن  $n$  یک عدد صحیح است، کافی است از بسط موجک پدر دوبیچ مرتبه دوم به ازای  $n + 1$   $(D2(n + 1))$  استفاده شود. با این حال بسط فضای بسوف  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  بر حسب موجک نیاز به موجک‌های پدر منظم‌تری

<sup>1</sup>Orthonormal system

<sup>2</sup>Nested

<sup>3</sup> $2\pi$ -periodic function

دارد. در واقع، با استفاده از قضیه ۱ نیاز به موجک پدر  $\phi$  هست طوری که  $n + 1$  بار مشتق پذیر ضعیف باشد. در خانواده موجک‌های دوبیچز این خاصیت فقط برای موجک‌های مرتبه  $D_{12}(n + 1)$  و بالاتر و همچنین به صورت مجانبی در صورتی که  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد برای موجک مرتبه  $D_{10}(n + 1)$  و بالاتر برقرار است.

تحلیل رگرسیون، با توجه به تابعی که ارتباط بین متغیر مستقل و وابسته را بیان می‌کند به دو رده رگرسیون پارامتری و ناپارامتری تقسیم می‌شود. در رگرسیون ناپارامتری فرم تابع نامعلوم و به صورت

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon z_i, \quad z_i \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1), \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن  $t_i = \frac{i}{n}$  و  $f$  تابعی نامعلوم و متعلق به کلاس معین توابع  $F[0, 1]$  است و باید برآورد شود. با توجه به اینکه داده‌های مربوط به متغیر مستقل و متغیر پاسخ همراه با خطا مشاهده می‌شوند، بایستی قبل از برآورد تابع  $f$  خطاهای ثبت شده به همراه داده‌ها را حذف کرد. این نوع خطاها، نوفه<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. نوفه به معنای آلودگی صوتی یا سیگنالی ناخواسته است که شکل سیگنال‌ها را تغییر می‌دهد و باعث بروز اختلال می‌شوند. نوفه اغلب دارای اجزای فرکانسی بوده و قابل تحلیل است. برای حذف نوفه نیاز به اطلاعات کافی در مورد ماهیت نوفه، راه‌های ورود آن و روش صحیح کاهش نوفه است. روش‌های مختلفی برای نوفه‌زدایی از سیگنال‌هایی که به همراه نوفه مشاهده می‌شوند، وجود دارند. **داناو و جانستون (۱۹۹۸)** روش آستانه‌ای را برای حذف نوفه‌ها ارائه دادند که به روش موجک انقباضی مشهور است. روش موجک انقباضی مبتنی بر دو پارامتر اساسی مقدار آستانه و تابع حذف است. منظور از آستانه<sup>۲</sup>، مقداری است که بر اساس آن ضرایب موجکی به دو دسته کم اهمیت و پر اهمیت تقسیم شده و با نماد  $\lambda$  نشان داده می‌شود. همچنین تابع حذف به دو صورت سخت و نرم به صورت

$$\eta_{hard}(x) = xI_{\{|x| < \lambda\}}, \quad \eta_{soft}(x) = (x + \lambda)I_{\{x < \lambda\}} + (x - \lambda)I_{\{x > \lambda\}},$$

قابل استفاده است. با مشخص شدن مقدار آستانه و تابع حذف، ابتدا از مشاهدات نوفه‌ای تبدیل موجک گسسته گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، با فرض این که ماتریس تبدیل موجکی گسسته،  $W$  و تابع مشاهدات به صورت  $y = f + \varepsilon$  باشد، ابتدا ضرایب موجکی از تبدیل موجکی  $Wy = Wf + W\varepsilon$  بدست

<sup>1</sup>Noise

<sup>2</sup>Threshold

می‌آید، که با فرض  $d^* = Wy$ ،  $d = Wf$ ،  $\epsilon = W\epsilon$ ، می‌توان آن را به صورت  $d^* = d + \epsilon$ ، بازنویسی کرد. سپس با استفاده از مقدار آستانه، ضرایب موجکی به دو دسته ضرایب پراهمیت و ضرایب کم‌اهمیت دسته‌بندی می‌شوند، به این صورت که اگر ضریب موجکی بیشتر از مقدار آستانه باشد، متعلق به دسته ضرایب پراهمیت و در غیر این صورت جزو دسته ضرایب کم‌اهمیت خواهد بود. آن‌گاه ضرایب کم‌اهمیت حذف شده و ضرایب پراهمیت با توجه به تابع حذف، اصلاح می‌شوند. به این صورت که در تابع حذف سخت، ضرایب کمتر از مقدار آستانه برابر صفر و باقی ضرایب بدون تغییر باقی می‌مانند. در تابع حذف نرم، ضرایب کمتر از مقدار آستانه برابر صفر و باقی ضرایب به اندازه مقدار آستانه به صفر نزدیک می‌شوند. در نهایت سیگنال حاصل با استفاده از وارون تبدیل موجک بازسازی می‌شود.

**مثال ۲.** تشعشع زمینه میکروویو کیهانی<sup>۱</sup> (*CMB*) برای کیهان‌شناسان به ویژه در رابطه با شناخت منشأ جهان دارای اهمیت است. این تشعشعات به طور گسترده توسط کیهان‌شناسان اندازه‌گیری می‌شوند. از آنجا که این اندازه‌گیری‌ها دارای خطا است، نیاز به بازیابی سیگنال اصلی از سیگنال دارای نوفه است. یکی از مهمترین موضوعات مرتبط با این تشعشع برآورد تابع چگالی طیف توان آن است. این برآورد به سادگی با استفاده از روش موجک انقباضی به دست می‌آید. همچنین در این زمینه **بورگن و دوراستانی (۲۰۱۷)** با در نظر گرفتن معادله رگرسیونی  $Y_i = f(X_i) + \epsilon_i$  به برآورد تابع چگالی  $f(\cdot)$  با استفاده از آستانه عام<sup>۲</sup> پرداختند. در این حالت برآورد تابع چگالی  $f(\cdot)$  به صورت

$$\hat{f}(x) = \sum_j \tau_j \sum_k \hat{\beta}_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad x \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}),$$

است، که در آن  $\hat{\beta}_{j,k}$  برآورد تجربی ضرایب موجکی و  $\tau_j$  تابع آستانه جهانی است.

کاربردهای بیشتری از این ابزار در علم آمار ارائه شده که در این زمینه می‌توان به **آنتونیادیس (۲۰۰۷)** و **ویداکیوک (۲۰۰۹)** اشاره کرد. در زمینه برآورد تابع رگرسیون بر اساس موجک‌ها تحقیقات فراوانی انجام گرفته که می‌توان به **هال و پاتیل (۱۹۹۶)**، **واسرمن و گنوس (۲۰۰۵)**، **دوستی و همکاران (۲۰۰۸)** و **افشاری (۲۰۱۳)** اشاره کرد. همچنین روش‌های مختلفی برای تعیین آستانه وجود دارد که برای جزییات بیشتر می‌توان به **داناهاو و جانستون (۱۹۹۵)** مراجعه کرد. **داناهاو و جانستون (۱۹۹۵)** برآوردگرهای موجک غیرخطی تابع رگرسیون ناپارامتری را معرفی کردند. **آنتونیادیس (۲۰۰۷)** برآوردگر موجکی تابع

<sup>1</sup>Cosmic microwave background

<sup>2</sup>Universal threshold

رگرسیون ناپارامتری را با وجود داده‌های با نوفه‌های گاوسی محاسبه و برای این داده‌ها، برآوردگر موجک را با برآوردگر انقباضی مقایسه کرد. همچنین **منتوریل و همکاران (۲۰۱۸)** با استفاده از رویکرد بسامدی برآوردگرهای بر پایه موجک را برای رگرسیون آمیخته ارائه دادند.

**مولر و ویداکویک (۱۹۹۸)** به بررسی مسئله برآورد تابع چگالی با استفاده از استنباط بیزی در موجک پرداختند. **کلاید و همکاران (۱۹۹۸)** روش موجک انقباضی توافقی با رهیافت بیزی را با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین آمیخته<sup>۱</sup> به کار بردند. در ادامه **کلاید و جورج (۱۹۹۹)** با استفاده از روش بیز سلسله مراتبی، برآوردگر بیز تجربی را در رگرسیون ناپارامتری ارائه دادند. **ویداکویک (۲۰۰۹)** توزیع پیشنهادی **کلاید و همکاران (۱۹۹۸)** را با استفاده از عامل بیز و آزمون فرضیه بیزی با در نظر گرفتن فرضیه صفر بودن ضریب مورد بررسی در برابر غیر صفر بودن آن مورد استفاده قرار داد. **افشاری و همکاران (۲۰۱۷)** یک برآوردگر برای آستانه به منظور نوفه‌زدایی پیشنهاد دادند که در آن برای برآورد تابع رگرسیون ناپارامتری، یک آستانه بیزی جدید مبتنی بر توزیع‌های آمیخته بر اساس موجک انقباضی ارائه شده است. **رمینی و ویداکویک (۲۰۱۸)** با استفاده از روش بیز سلسله مراتبی و موجک‌های مختلط به بررسی مسئله برآورد رگرسیون ناپارامتری پرداختند. این در حالی است که در مقاله حاضر برآوردگرهای موجک تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های مختلف تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا در فضای بسوف محاسبه شده است. در انتها **شیرازی (۱۳۹۹)** برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی تحت تابع زیان  $L_2$  را مورد بررسی قرار داد. بسیاری از روش‌های موجکی توسط **نسون (۲۰۱۱)** با نرم‌افزار **R** انجام شده است.

هدف این مقاله، محاسبه برآوردگرهای موجک تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های عام، میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز<sup>۲</sup> و آستانه قطعی تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا در فضای بسوف است. با استفاده از شبیه‌سازی، بهینگی برآوردگرهای مختلف آستانه موجک شامل میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز، آستانه عام و آستانه قطعی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۲، برآوردگرهای موجک تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های مختلف تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا در فضای بسوف محاسبه شده است. در بخش ۳، بهینگی برآوردگرهای مختلف آستانه موجک با شبیه‌سازی با نرم‌افزار **MATLAB** مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

<sup>1</sup>Mixture prior distribution

<sup>2</sup>Bayes factor

## ۲ برآوردگرهای بیزی آستانه موجک

در این بخش، برآوردگرهای بیزی موجکی تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های مختلف تحت تابع توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا ارائه می‌شود. فرض کنید  $f$  تابعی متناوب در فضای بسوف بوده و هدف برآورد این تابع به روش موجک است. اگر پایه‌های موجکی، متعامد و متناوب روی بازه بسته  $[0, 1]$  باشند، آن‌گاه:

$$f(t) = w_{-1,0} \varphi(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} w_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (۴)$$

که در آن  $\psi$  یک موجک مادر از رده  $r$  و

$$w_{jk} = \int_0^1 f(t) \psi_{jk}(t) dt, \quad w_{-1,0} = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt,$$

است. برای بررسی تابع رگرسیون در (۳) به روش موجک، ابتدا تابع نوفه

$$dY(t) = f(t)dt + \sigma_n dW(t), \quad (۵)$$

را در نظر بگیرید، که در آن تابع  $f$  عضو فضای بسوف  $B_{p,q}^s[0, 1]$ ،  $\sigma_n^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}$  و  $W$  یک فرآیند استاندارد است. بنابراین هر روشی برای برآورد در تابع رگرسیون ناپارامتری (۳) می‌تواند برای تابع (۵) نیز استفاده شود. با فرض اینکه  $f \in B_{p,q}^s[0, 1]$  و  $\max(0, 1/p - 1/2) < s$  و  $p, q \geq 1$  و با انجام تبدیل موجکی بر روی (۵) با استفاده از موجک مادر  $\psi$  از رده  $r$  با شرط  $r > s$ ، می‌توان نوشت:

$$Y_{jk} = w_{jk} + \sigma_n z_{jk}, j \geq -1, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1, \quad (۶)$$

که در آن  $\psi_{-1,0}(t) = \varphi(t)$ ،  $Y_{jk} = \int_0^1 \psi_{jk} dY(t)$  و  $z_{jk}$  متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال  $N(0, 1)$  است. اکنون فرض کنید که ضرایب موجکی  $w_{jk}$  دارای توزیع پیشین آمیخته

$$w_{jk} \sim \pi_j N(0, \tau_j^2) + (1 - \pi_j) \delta(0), \quad j \geq 0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1, \quad (۷)$$



باشند، که در آن  $0 \leq \pi_j \leq 1$ ،  $\delta(0)$  جرم نقطه‌ای تباهیده در صفر و  $w_{jk}$ ها متغیرهای تصادفی و مستقل هستند. برای تکمیل تابع، می‌توان یک پیشین مبهم بر روی ضریب مقیاس  $w_{-1}$  قرار داد. با توجه به توزیع پیشین داده شده (۷)، هر متغیر  $w_{jk}$  یا با احتمال  $(1 - \pi_j)$  برابر  $\delta(0)$  است یا با احتمال  $\pi_j$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\tau_j^2$  است. احتمال  $\pi_j$  سهمی غیر صفر در سطح وضوح  $j$  برای ضرایب موجکی قرار می‌دهد، در حالی که واریانس تمام آن‌ها،  $\tau_j^2$  است. لازم به ذکر است که پارامترهای پیشین  $\pi_j$  و  $\tau_j^2$  برای تمامی ضرایب داده شده در سطح وضوح  $j$  یکسان هستند. همچنین ابر پارامترهای  $\pi_j$  و  $\tau_j^2$  باید به طور مناسب انتخاب شوند، چرا که ابر پارامترهای مختلف منجر به برآوردگرهای موجک متفاوتی خواهند شد، در اینجا فرض می‌شود که برای هر  $j \geq 0$  این ابر پارامترها به فرم

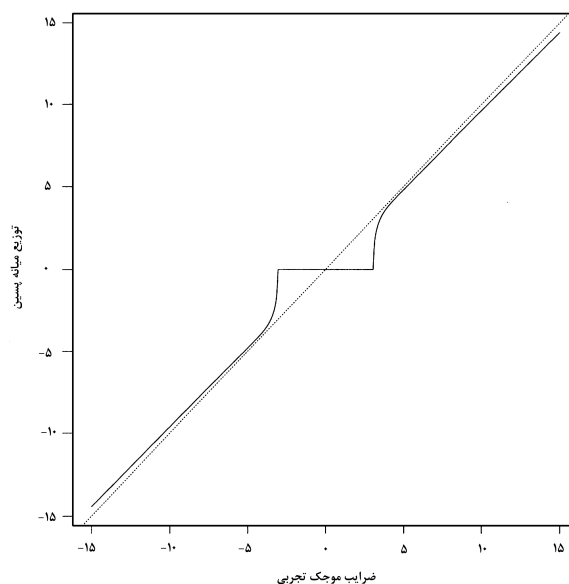
$$\tau_j^2 = c_1 2^{-\alpha j}, \quad \pi_j = \min(1, c_2 2^{-\beta j}), \quad (8)$$

باشند، که در آن  $c_1, c_2, \alpha, \beta$  و ثابت‌های غیر منفی هستند. لازم به ذکر است که اگر  $\alpha = \beta = 0$ ،  $c_1 \rightarrow \infty$  و  $c_2 \rightarrow 0$  با افزایش  $n$  به طوری که  $\sqrt{c_1}/c_2 \sigma n \rightarrow 1$ ، آستانه بدست آمده همان آستانه عام است. در شکل ۱ با انتخاب  $\tau^2 = 25$ ،  $\pi = 0.05$  و مقدار ثابت  $\sigma = 1$ ، تغییرات میانه پسین و ضرایب موجک تجربی مورد بررسی قرار گرفته است (آبراموویچ و همکاران، ۱۹۹۸). بر اساس توزیع‌های پیشین (۷) و (۸) و تابع (۶)، توزیع پسین  $w_{jk} | Y_{jk}$ ، ترکیبی از یک توزیع نرمال پسین مشابه و  $\delta(0)$  است. فرض کنید  $\Phi$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی پیشین  $w_{jk} | Y_{jk}$  به صورت

$$F(w_{jk} | Y_{jk}) = \frac{1}{1 + \eta_{jk}} \Phi\left(\frac{w_{jk} - Y_{jk} \tau_j^2 / (\sigma_n^2 + \tau_j^2)}{\sigma_n \tau_j / \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_j^2}}\right) + \frac{\eta_{jk}}{1 + \eta_{jk}} I(Y_{jk} \geq 0), \quad (9)$$

است، که در آن

$$\eta_{jk} = \frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\tau_j^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{\tau_j^2 Y_{jk}^2}{2\sigma_n^2(\tau_j^2 + \sigma_n^2)}\right), \quad (10)$$



شکل ۱. تغییرات میانه پسین و ضرایب موجک تجربی

بخت پسین<sup>۱</sup> برای مولفه در صفر است. برای تابع زیان توان دوم خطا، برآوردگر بیز برابر با میانگین پسین است. با استفاده از (۹) و (۱۰) برآورد ضرایب موجکی  $w_{jk}$  به صورت

$$\hat{w}_{jk} = E(w_{jk} | Y_{jk}) = \frac{1}{1 + \eta_{jk}} \frac{\tau_j^2}{\tau_j^2 + \sigma_n^2} Y_{jk}. \quad (11)$$

است. برآوردگر (۱۱) یک برآوردگر غیرخطی هموار است. **آبراموویچ و همکاران (۱۹۹۸)** با در نظر گرفتن تابع زیان قدر مطلق خطا، میانه پسین را به عنوان برآورد ضرایب موجکی  $w_{jk}$  به صورت

$$\tilde{w}_{jk} = Med(w_{jk} | Y_{jk}) = sign(Y_{jk}) \max(0, \gamma_{jk}),$$

<sup>1</sup>Posterior odds ratio

پیشنهاد دادند، که در آن

$$\gamma_{jk} = \frac{\tau_j^2}{\tau_j^2 + \sigma_n^2} |Y_{jk}| - \frac{\tau_j \sigma_n}{\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_j^2}} \Phi^{-1} \left( \frac{1 + \min(\eta_{jk}, 1)}{2} \right).$$

کمیت  $\gamma_{jk}$  برای تمام  $Y_{jk}$ ها در یک بازه تعریف شده ضمنی  $[-\lambda_j^{PM}, \lambda_j^{PM}]$  منفی است، از این رو میانه پسین  $Med(w_{jk} | Y_{jk})$ ، صفر است هرگاه مقدار  $|Y_{jk}|$  کمتر از آستانه  $\lambda_j^{PM}$  باشد. بنابراین میانه پسین یک برآوردگر آستانه انقباضی با آستانه  $\lambda_j^{PM}$  است که در تحقیقات آماری به عنوان آستانه بیز شناخته شده است. **داناهاو و جانستون (۱۹۹۵، ۱۹۹۸)** نشان دادند که ضرایب موجکی آستانه‌ای با انتخاب آستانه مناسب، باعث بدست آمدن برآوردگرهای بهینه مجانبی در فضای بسوف می‌شوند، که در ادامه بهینگی آن‌ها بررسی می‌شود. **ویداکویک (۱۹۹۸)** برآورد آستانه موجک بر اساس تابع زیان صفر و یک بیزی ارائه داد که در آن پس از مشاهده  $Y_{jk}$ ، آزمون فرضیه  $w_{jk} = 0$  در مقابل فرضیه دوطرفه  $w_{jk} \neq 0$  انجام می‌شود. اگر فرضیه  $H_0$  رد شود، آنگاه  $w_{jk}$  توسط  $Y_{jk}$  به صورت

$$\tilde{w}_{jk} = Y_{jk} I(\eta_{jk} < 1), \tag{۱۲}$$

برآورد می‌شود، در غیر این صورت  $w_{jk} = 0$  است، که با توجه به  $(1^0)$  نسبت احتمال پسین به صورت  $\eta_{jk} = P(H_0 | Y_{jk}) / P(H_1 | Y_{jk})$  داده شده است. **ویداکویک (۱۹۹۸)** این روش آستانه موجک را آستانه عامل بیز نامید. با استفاده از  $(1^0)$ ، عامل بیز (۱۲) را وابسته به سطح آستانه سخت می‌توان به صورت  $\tilde{w}_{jk} = Y_{jk} I(|Y_{jk}| \geq \lambda_j^{BF})$  شبیه‌سازی کرد، که در آن

$$\lambda_j^{BF} = \sqrt{\frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \tau_j^2)}{\tau_j^2} \log\left(\frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_j^2}}{\sigma_n}\right)}. \tag{۱۳}$$

قضیه ۲. فرض کنید

$$\lambda_j^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{\log n}{n}}, & j \leq J_\alpha \\ \sqrt{\frac{j^{\alpha j}}{n}}, & j > J_\alpha, \end{cases}$$

که در آن  $\lambda_j^{PM} \simeq \lambda_j^{BF} \simeq \lambda_j^*$ ، آنگاه  $J_\alpha = (1/\alpha) \log n$  خواهد بود.

برهان: مقدار  $\lambda_j^{BF}$  به طور مستقیم از (۱۳) بدست می‌آید. برای محاسبه  $\lambda_j^{PM}$  تابع

$$g(\lambda_j) = \frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right) + 2\Phi\left(-\frac{\tau_j \lambda_j}{\sigma_n \sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}\right),$$

تعریف می‌شود، به طوری که  $g(\lambda_j^{PM}) = 1$ . توجه شود که برای هر  $x \geq 0$ ، نامساوی  $\Phi(-x) \leq c\phi(x)$  برقرار است، که  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد و  $c$  مقداری ثابت و مثبت است. بنابراین  $\Phi\left(-\frac{\tau_j \lambda_j}{\sigma_n \sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}\right) \leq c\phi\left(\frac{\tau_j \lambda_j}{\sigma_n \sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}\right)$  به عبارت دیگر

$$2\Phi\left(-\frac{\tau_j \lambda_j}{\sigma_n \sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}\right) \leq 2c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right).$$

پس خواهیم داشت:

$$g(\lambda_j) \leq 2c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right) + \frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right).$$

حال اگر  $c' = 2c \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  آن‌گاه

$$g(\lambda_j) \leq g_1(\lambda_j) = \exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right) \left(\frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}{\sigma_n} + c'\right).$$

بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌شود که  $\lambda_j$  جواب معادله  $g_1(\lambda_j) = 1$  باشد، آن‌گاه:

$$\exp\left(-\frac{\tau_j^y \lambda_j^y}{2\sigma_n^y(\tau_j^y + \sigma_n^y)}\right) \left(\frac{1 - \pi_j}{\pi_j} \frac{\sqrt{\tau_j^y + \sigma_n^y}}{\sigma_n} + c'\right) = 1,$$

بنابراین:

$$\lambda_{1j}^2 = \frac{2\sigma_n^2(\tau_j^2 + \sigma_n^2)}{\tau_j^2} \log\left(\frac{1 - \pi_j \sqrt{\tau_j^2 + \sigma_n^2}}{\pi_j \sigma_n} + c'\right),$$

در نتیجه  $\lambda_{1j}^2 = (\lambda_j^{BF})^2$ . چون  $g_1(\lambda_j)$  و  $g(\lambda_j)$  توابعی نزولی از  $\lambda_j$  هستند و  $\lambda_j^{PM}$  جواب معادله  $g(\lambda_j) = 1$  است، نامساوی  $g(\lambda_j^{PM}) \leq g_1(\lambda_{1j})$  برقرار است. بنابراین  $\lambda_j^{PM} \leq \lambda_{1j}$  در نتیجه

$$\lambda_j^{PM} \leq \lambda_{1j} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{\log n}{n}}, & j \leq J_\alpha \\ \frac{\sqrt{j^{2\alpha j}}}{n}, & j > J_\alpha, \end{cases}$$

از طرفی، چون نامساوی  $\lambda_j^{PM} \geq \lambda_j^{BF}$  برقرار بود، پس اثبات کامل می‌شود.

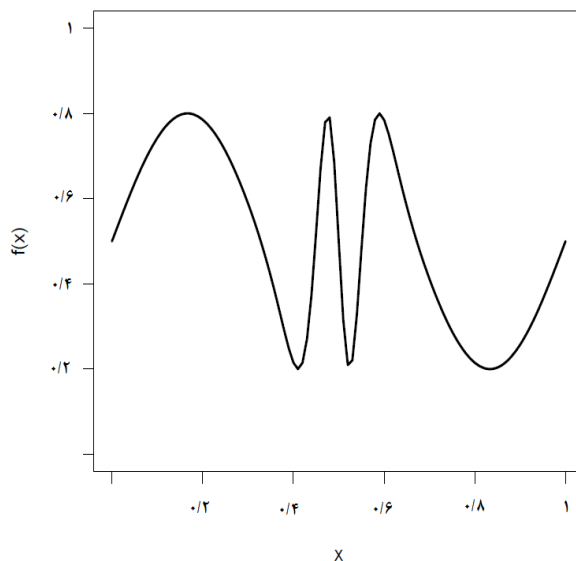
### ۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، مطالعه شبیه‌سازی برای بررسی بهینگی برآوردگرهای مختلف آستانه موجک شامل میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز، آستانه عام و آستانه قطعی انجام می‌شود، که در آن از تابع آزمون ارائه شده توسط **آبراموویچ و همکاران (۲۰۰۴)**، یعنی "سینوس زمان انتقال یافته" و "زوایا" استفاده شده است. تابع سینوس زمان انتقال یافته مثالی از یک تابع هموار به صورت

$$f(x) = \circ/3 \sin\{3\pi[g(g(g(x)))] + x\} + \circ/5,$$

است، که در آن  $g(x) = \frac{(1 - \cos(\pi x))}{4}$  است. نمودار تابع سینوس زمان انتقال یافته در شکل ۲ رسم شده است. تابع زوایا یک تابع تکه‌ای پیوسته خطی با جهش‌های بزرگ در مشتق اول بوده و به صورت

<sup>1</sup>Time shifted sine

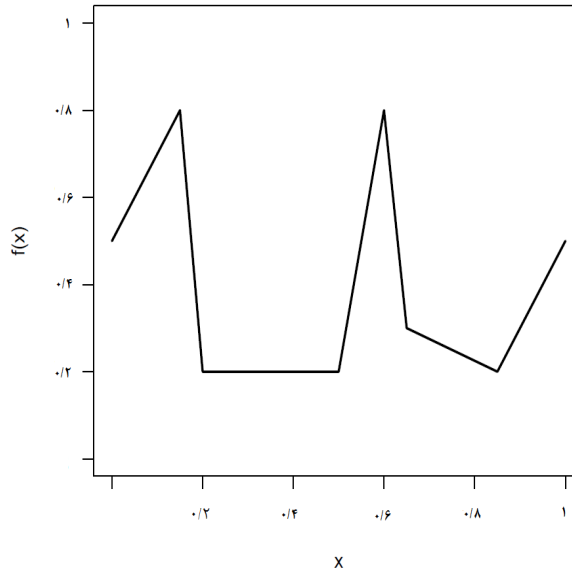


شکل ۰۲. تابع سینوس زمان انتقال یافته

$$\begin{aligned}
 f(x) = & (2x + 0/5)I_{[0, 0/15]}(x) + (-12(x - 0/15) + 0/8)I_{[0/15, 0/2]} \\
 & + 0/2I_{[0/2, 0/5]}(x) + (6(x - 0/5) + 0/2)I_{[0/5, 0/6]}(x) \\
 & + (-10(x - 0/6) + 0/8)I_{[0/6, 0/65]}(x) + (-5(x - 0/65) + 0/3)I_{[0/65, 0/85]} \\
 & + (2(x - 0/85) + 0/2)I_{[0/85, 1]},
 \end{aligned}$$

است. نمودار این تابع در شکل ۳ رسم شده است. برای هر تابع، داده‌های آلوده به نوفه برای ۵۰۰ بار تکرار، با اضافه کردن نوفه تصادفی مستقل  $\gamma_i$  از توزیع  $N(0, \varepsilon^2)$  با اندازه نمونه‌های ۲۵۶، ۵۱۲ و ۱۰۲۴ تولید شده‌اند که به صورت یکنواخت روی فاصله واحد قرار داده شدند. در این شبیه‌سازی از موجک‌های مادر کویفلت<sup>۱</sup> ۳ و ۵ به ترتیب برای سینوس زمان انتقال یافته و زوایا استفاده شده و نیکویی برازش هر برآوردها

<sup>۱</sup>Coiflet



شکل ۳. تابع زوایا

با استفاده از متوسط میانگین توان دوم خطا به صورت

$$AMSE = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{f}_i - f_i)^2, \quad (14)$$

برآورد می‌شود. در مطالعه اولیه تاثیر تغییرات  $\alpha$  و  $\beta$  برای برآوردگرهای میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز و آستانه عام و قطعی مورد مطالعه قرار گرفته است. ثابت‌های  $c_1$  و  $c_2$  در تابع پیشین (۸) به صورت عددی توسط روش‌های آبراموویچ و همکاران (۱۹۹۸) برآورد شدند.

با انتخاب مقادیر مختلف  $\beta$  و  $\alpha = 2, 3, 4, 5$  تاثیر مهمی در نتایج مشاهده نشد. برای تابع سینوس زمان انتقال یافته نرخ‌های کاهش برای  $\alpha$  های بزرگتر سریع‌تر بود در صورتی که  $\alpha$  های کوچکتر برای تابع زوایا مناسب‌تر بودند. برای تابع سینوس زمان انتقال یافته  $\alpha = 4$ ،  $\beta = 0$ ، و برای زوایا  $\alpha = 2$ ،  $\beta = 0/5$  در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در جداول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود. با افزایش مقدار  $n$ ، مقادیر متوسط میانگین توان دوم خطا در تمامی روش‌ها کاهش یافته است. از طرف دیگر مقدار متوسط میانگین توان دوم خطا مربوط به آستانه قطعی از سایر روش‌ها کمتر است که نشان از برتری این روش

جدول ۰۱. مقادیر میانگین خطا و انحراف استاندارد برای تابع آزمون زوایا

انحراف استاندارد	AMSE	روش	<i>n</i>
۱/۲۰۰	۴/۷۰۵	میانگین پسین	۲۵۶
۱/۴۸۹	۵/۱۹۳	میانه پسین	
۱/۵۲۸	۵/۲۲۳	عامل بیز	
۱/۴۲۰	۵/۰۸۱	آستانه عام	
۱/۲۸۱	۴/۰۱۵	آستانه قطعی	۵۱۲
۵/۹۱۲	۳/۱۲۸	میانگین پسین	
۶/۸۴۲	۳/۴۶۲	میانه پسین	
۷/۱۱۹	۳/۵۳۸	عامل بیز	
۶/۸۰۴	۳/۵۶۰	آستانه عام	۱۰۲۴
۵/۹۷۱	۲/۷۴۹	آستانه قطعی	
۳/۳۶۱	۱/۸۷۹	میانگین پسین	
۳/۹۰۶	۲/۱۰۶	میانه پسین	
۴/۱۴۷	۲/۱۴۰	عامل بیز	۱۰۲۴
۳/۸۴۵	۲/۲۱۴	آستانه عام	
۳/۲۱۲	۱/۶۴۷	آستانه قطعی	

دارد.

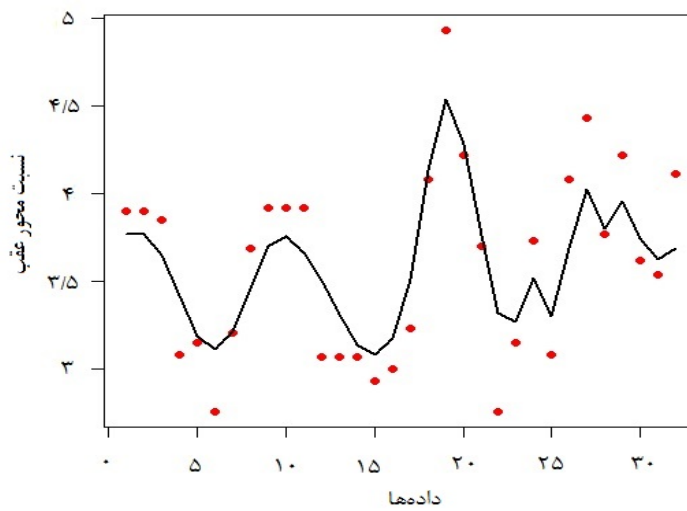
جدول ۰۲. مقادیر میانگین خطا و انحراف استاندارد برای تابع آزمون سینوس زمان انتقال یافته

انحراف استاندارد	AMSE	روش	<i>n</i>
۴/۲۱۷	۵/۲۰۸	میانگین پسین	۲۵۶
۴/۲۴۳	۵/۷۱۴	میانه پسین	
۲/۲۵۷	۵/۷۹۹	عامل بیز	
۱/۴۱۱	۵/۱۸۵	آستانه عام	
۸/۵۶۱	۳/۶۸۷	آستانه قطعی	۵۱۲
۶/۳۱۱	۲/۰۵۳	میانگین پسین	
۷/۴۱۵	۲/۱۸۶	میانه پسین	
۷/۸۱۴	۲/۲۱۸	عامل بیز	
۶/۴۷۴	۲/۱۴۱	آستانه عام	۱۰۲۴
۴/۲۸۰	۱/۷۵۸	آستانه قطعی	
۴/۲۵۶	۱/۶۰۷	میانگین پسین	
۴/۳۷۲	۱/۷۳۴	میانه پسین	
۵/۳۱۲	۱/۸۴۹	عامل بیز	۱۰۲۴
۳/۶۰۶	۱/۷۱۲	آستانه عام	
۲/۳۸۸	۱/۲۴۹	آستانه قطعی	

مثال ۰۳. برای مجموعه داده‌های *mtcars* شامل اطلاعات و ویژگی‌های مختلف ۳۲ خودرو، تابع رگرسیون



ناپارامتری موجکی برازش داده شده است. این مجموعه داده در نرم افزار  $R$  بارگذاری شده است و شامل متغیرهای زیادی است که در این مقاله تنها متغیر نسبت محور عقب (چرخ‌دنده‌های دیفرانسیل  $drat$ ) مورد بررسی قرار گرفته است. برای داده‌های مربوط به این متغیر با استفاده از آستانه  $\lambda^*$  در قضیه ۲ و موجک‌های مادر کوئفلت ۵، برآورد ناپارامتری تابع رگرسیون محاسبه و در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع رگرسیون ناپارامتری برازش مناسبی بر روی داده‌ها داشته است.



شکل ۴. برازش رگرسیون ناپارامتری برای مثال نسبت محور عقب در مجموعه داده خودرو

## بحث و نتیجه‌گیری

برآوردگرهای بیزی موجکی تابع رگرسیون ناپارامتری تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا محاسبه و بهینگی برآوردگرهای مختلف آستانه موجک شامل میانگین پسین، میانه پسین، عامل بیز، آستانه عام و آستانه قطعی با مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که برآوردگر آستانه قطعی، میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به سایر برآوردگرها دارد و با افزایش مقدار  $n$  مقادیر میانگین توان دوم خطا در حال کاهش هستند. همچنین برآوردگر آستانه قطعی دارای مقدار میانگین توان دوم خطای کوچکتری نسبت به سایر برآوردگرها است که نشان از برتری این روش دارد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، هیئت تحریریه و ویراستار مجله علوم آماری که باعث ارتقای کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

شیرازی، ا. (۱۳۹۹)، برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی تحت تابع زیان  $L_2$ ، مجله علوم آماری، پذیرفته شده.

Abramovich, F., Sapatinas, T., and Silverman, B. W. (1998), Wavelet Thresholding Via a Bayesian approach, *Journal of Royal Statistical Society*, **60**, 725-749.

Abramovich, F., Amato, U., and Angelini, C. (2004), On Optimality of Bayesian Wavelet Estimators, *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 217-234.

Afshari, M. (2013), A fast Wavelet Algorithm for Analyzing of Signal Processing and Empirical Distribution of Wavelet Coefficients with Numerical Example and Simulation, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 4156–4169.

Afshari, M., Lak, F., and Gholizadeh, B. (2017), A new Bayesian Wavelet Thresholding Estimation of Nonparametric Regression Using Conjugate Prior Distributions with Numerical Computation and Simulation, *Journal of Applied Statistics*, **44**, 649–666.

Antoniadis, A., Bigot, J., and Sapatinas, T. (2001), Wavelet Estimators in Nonparametric Regression: A comparative Simulation Study, *Journal of Statistical Software*, **6**, 1-83.

- Antoniadis, A. (2007), Wavelet Methods in Statistics, Some Recent Developments and Their Applications, *Statistical Surveys*, **1**, 16-55.
- Bourguin, S., and Durastanti, C. (2017), Wavelet Methods in Statistics, Some Recent Developments and Their Applications, *Illinois Journal of Mathematics*, **61**, 97-125.
- Chui, C. K. (1992), *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston, MA.
- Clyde, M., Parmigiani, G., and Vidakovic, B. (1998), Multiple Shrinkage and Subset Selection in Wavelets, *Biometrika*, **85**, 391-401.
- Clyde M. A., George, E. I. (1999), *Empirical Bayes Estimation in Wavelet Nonparametric Regression*, In: Müller P., Vidakovic B. (eds) Bayesian Inference in Wavelet-Based Models, Lecture Notes in Statistics, **141**, Springer.
- Daubechies, I. (1992), *Ten lectures in Wevelets*, CBMS-NSF regional conferences series in applied mathematics, SFAM, Philadelphia.
- Donoho, D. L. and Johnstone I. M. (1995), Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage, *Biometrika*, **81**, 425-455.
- Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1998), Minimax Estimation by Wavelet Shrinkage, *Technical Report, Department of Statistics, Stanford University*.
- Doosti, H., Afshari, M., and Niroomand, H. A. (2008), Wavelets for Non-parametric Stochastic Regression with Mixing Stochastic Process, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**, 373-385.

- Hall, P., and Patil, P. (1996), On the Choice of Smoothing Parameter, Threshold and Truncation in Nonparametric Regression by Non-linear Wavelet Methods, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 361–377.
- Härdle, W., Kerkycharian, G., Picard, D., and Tsybakov, A. (1998), *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*, Springer.
- Harr, A. (1910), Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen Systeme, *Mathematische Analen*, **69**, 331-371.
- Montoril, M. H., Pinheiro, A., and Vidakovic, B. (2018), Wavelet-based estimators for mixture regression, *Scandinavian Journal of Statistics*, **46**, 215-234.
- Müller, P., and Vidakovic, B. (1998), Bayesian Inference with Wavelets: Density Estimation, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **7**, 456-468.
- Nason, G. (2011), *Wavelet Methods in Statistics with R*, Springer.
- Remenyi, N., and Vidakovic, B. (2018), Bayesian Nonparametric Regression Using Complex Wavelets, <http://arxiv.org/abs/1803.02532v1>.
- Vidakovic, B. (1998), Non-linear Wavelet Shrinkage with Bayes Rules and Bayes factors, *Journal of American Statistical Association*, **93**, 173-179.
- Vidakovic, B. (2009), *Statistical Modeling By Wavelets*, Wiley, NewYork.
- Wasserman, L. and Genovese, R. (2005), Confidence sets for Nonparametric Wavelet Regression, *Institute of Mathematical Statistics*, **3**, 698–729.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2020  
Vol. 14, No. 2, pp 287-306  
DOI: 10.29252/jss.14.2.287

## **The Bayesian Wavelet Thresholding Estimators of Nonparametric Regression Model Based on Mixture Prior Distribution**

Afshari, M., Bazyari, A., Moradian, Y., and Karamikabir, H.  
Department of Statistics, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

**Abstract:** In this paper, the wavelet estimators of the nonparametric regression function based on the various thresholds under the mixture prior distribution and the mean square error loss function in Bosove space are computed. Also, using a simulation study the optimality of different wavelet thresholding estimators such as posterior mean, posterior median, Bayes factor, universal threshold and sure threshold are investigated. The results show that the average mean square error of sure threshold estimator is less than the other obtained estimators.

**Keywords:** Bayes factor, Mixture prior distribution, Nonparametric regression function, Wavelet thresholding estimator.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 08G62, 60T65.