مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۲، ص ۳۳۵ – ۳۵۰
DOI: 10.29252/jss.14.2.335

ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده

ابراهیم امینی‌سرشت[1] و قباد برمال‌زن[2]

[1] گروه آمار، دانشگاه بوعلی سینا همدان
[2] گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۴

چکیده:
این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مستقل مدل مقیاس با چندین دورافتاده می‌پردازد. بدین منظور، ابتدا یک سیستم k از n متشکل از مولفه‌های مستقل مدل مقیاس با چندین دورافتاده در نظر گرفته شده و سپس با استفاده از تابع پرمننت، به بررسی ترتیب نسبت درست‌نمایی در این‌گونه سیستم‌ها پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ترتیب نسبت درست‌نمایی، ترتیب تصادفی معمولی، آماره‌های مرتب، پرمننت، سیستم‌های k از n.

۱ مقدمه

یکی از مهمترین اهداف قابلیت اعتماد، تعیین ساختار سیستم‌های پیچیده و افزایش طول عمر سیستم‌ها است. برای این منظور، سیستم‌های متفاوتی در قابلیت اعتماد تعریف شده است که یکی از پرکاربردترین آنها سیستم k از n است. سیستم k از n سیستمی است که برای فعال بودن آن، فعالیت حداقل k مولفه از

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم امینی‌سرشت، e.amini64@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15, 90B25.

آن، لازم و ضروری است. با این تعریف، سیستم موازی یک سیستم ۱ از n و سیستم سری یک سیستم n از n است. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ بیانگر طول عمر مولفه‌های یک سیستم و $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ بیانگر آماره‌های مرتب، متناظر با این متغیرهای طول عمر باشند. به سادگی می‌توان مشاهد نمود که $X_{k:n}$ بیانگر طول عمر یک سیستم $n-k+1$ از n است. این ارتباط مفید باعث شده است نظریه آماره‌های مرتب در تعیین خواص سیستم‌های k از n به طور وسیع، مورد استفاده قرار گیرد. آماره‌های مرتب، در سایر شاخه‌های آمار مانند استنباط آماری، تحلیل بقا، کنترل کیفیت و آزمون‌های طول عمر، نقش مهمی را ایفا می‌کنند (بارلو و پروشان ، ۱۹۹۸۱؛ آرنولد و همکاران ، ۱۹۹۲؛ دیوید و ناگاراجا ، ۲۰۰۴).

باپات و کوچر (۱۹۹۴) ترتیب نسبت درسنمایی بین آماره های مرتب را در نظر گرفتند و نشان دادند که اگر $X_1 \leq_{\ell r} \ldots \leq_{\ell r} X_n$ برقرار باشد آنگاه تحت شرایطی نه چندان محدود کننده رابطه

$$X_{1:n} \leq_{\ell r} \cdots \leq_{\ell r} X_{n:n} \tag{1}$$

بین آماره های مرتب برقرار خواهد شد. بولند و همکاران (۱۹۹۶) نیز نشان دادند در توزیع‌های مطلقاً پیوسته، آماره‌های مرتب همواره نسبت به ترتیب تصادفی معمولی مرتب هستند. به عبارت دیگر،

$$X_{1:n} \leq_{st} \cdots \leq_{st} X_{n:n}. \tag{2}$$

این نویسندگان، ترتیب تصادفی معمولی رابطه (۲) را به ترتیب نرخ خطر

$$X_{1:n} \leq_{hr} \cdots \leq_{hr} X_{n:n} \tag{3}$$

تعمیم بخشیدند. در ادامه، بولند و همکاران (۱۹۹۶) ترتیب نرخ خطر میان آماره‌های مرتب را در حالت کلی برای توزیع‌های دلخواه ثابت کردند و نشان دادند اگر مولفه‌های سیستم مستقل، اما لزوماً هم‌توزیع نباشند ممکن است $X_{k:n}$ نسبت به ترتیب نسبت درست‌نمایی کوچکتر از $X_{k+1:n}$ نباشد. رکب و امین (۱۹۹۶) نشان دادند برای $j \leq i$ و $m-j \geq n-i$ نامساوی تصادفی $X_{j:m} \leq_{\ell r} X_{i:n}$ برقرار است. ما (۱۹۸۸) تحت شرایطی زمانی که متغیرهای تصادفی مستقل بوده اما لزوماً هم‌توزیع نباشند رابطه (۳) را به ترتیب نسبت درست‌نمایی تعمیم دادند.

در علوم آماری، مدل‌های کلی و متفاوتی معرفی و بررسی شده‌اند که یکی از مهمترین آنها، مدل مقیاس

است. متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\cdots,X_n$ به ترتیب با توابع توزیع $F_1,\cdots,F_n$ در نظر بگیرید. این متغیرها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند هرگاه یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته مانند F با تابع چگالی احتمال f و اعداد ثابت $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ وجود داشته باشند بطوری‌که برای هر $i=1,\cdots,n$ رابطه $F_i(t)=F(\lambda_i t)$ برقرار باشد. در این حالت، توزیع F را یک توزیع پایه و $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ را پارامترهای مقیاس می‌نامند. اگر $f_1,\cdots,f_n$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع چگالی احتمال متغیرهای $X_1,\cdots,X_n$ باشند آنگاه بسادگی مشاهده می‌شود $f_i(t)=\lambda_i f(\lambda_i t)$. توزیع‌های شناخته شده‌ایی مانند نرمال، نمایی، گاما و وایبول، حالت‌های خاصی از مدل مقیاس هستند. مارشال و الکین (۲۰۰۷) منبع مناسبی برای مطاله خواص مدل مقیاس و کاربردهای آن است. همچنین برای مطالعه در زمینه ترتیب‌های تصادفی در مدل مقیاس، می‌توان به برمال زن و همکاران (۱۳۹۴) مراجعه نمود.

در این مقاله، ترتیب نسبت درست‌نمایی در مدل مقیاس با چندین دورافتاده در نظر گرفته شده است و ترتیب نسبت درست‌نمایی برای مقایسه تصادفی سیستم‌های k از n بکار برده شده است. به عنوان نتیجه اصلی این مقاله نشان داده می‌شود که طول عمر سیستم‌های k از n نسبت به p نزولی و نسبت به q صعودی است. مقایسه تصادفی سیستم‌های k از n با مولفه‌های مستقل و ناهمگن، کار مشکلی است. بنابراین در بسیاری از موارد و برای کاهش ناهمگنی، پارامترها به دو دسته تقسیم می‌شود و به همین دلیل مدل‌های با چندین دورافتاده[1] تعریف شده‌اند. در این مقاله، به بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های k از n در مدل‌های مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود. مدل مقیاس با چندین دورافتاده به صورت زیر تعریف می‌شود: فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که در آن $X_1,\cdots,X_p$ دارای تابع توزیع $F(\lambda x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda f(\lambda x)$ و $X_{p+1}\cdots,X_n$ دارای تابع توزیع متفاوت دیگری مانند $F(\lambda^* x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda^* f(\lambda^* x)$ هستند. در حقیقت در مدل‌های با چندین دورافتاده، همه متغیرها هم‌توزیع نیستند و به دو دسته از نظر هم‌توزیع بودن تقسیم می‌شوند. برای مقایسه تصادفی سیستم‌ها متشکل از مولفه‌های با چندین دورافتاده می‌توان به ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۲)، برمال زن و همکاران (۲۰۱۴)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) و ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۵) مراجعه نمود.

آماره‌های مرتب و ویژگی‌های آنها از نیمه اول قرن گذشته مورد مطالعه گسترده قرار گرفته است. اما اکثر مطالعات بر روی حالاتی که متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند متمرکز شده است. با استفاده از موضوعات مرتبط با نیرومندی[2] این انگیزه ایجاد شد که مطالعات آماره‌های مرتب روی مدل‌های دورافتاده در اوایل قرن ۷۰ میلادی شروع شود. اگرچه اکثر آثار تالیفی اخیر در این راستا تنها روی حالتی که یک

[1] Multiple-outlier models
[2] Robustness

دورافتاده در نمونه باشد متمرکز شده است ، اما آثار زیادی نیز در طول ۱۵ سال گذشته بر روی مدل‌های با چندین دورافتاده و عموماً بیشتر روی آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی مستقل و ناهم توزیع وجود داشته است.

استنباط مدل‌ها با یک یا چنددورافتاده نیاز به استفاده از روش‌های خاصی دارد. بارنیت و لویس (۱۹۹۴) منبعی غنی در مورد مدل‌های تک دورافتاده است. استنباط در مورد مدل‌های با چندین دورافتاده براساس تئوری پرمننت [1] بنا نهاده شده است (بالاکریشنان ، ۲۰۰۷). به عنوان کاربردی از نتایج این مقاله، یک سیستم سری را در نظر بگیرید که از دو زیر سیستم $(n-k+1)$ از n در یک کارخانه تشکیل شده است. زیرسیستم‌ها متشکل از دو نوع از مولفه‌ها، با تعداد کل n مولفه، هستند که طول عمرها از مدل مقیاس با پارامترهای مقیاس متفاوت تبعیت می‌کنند. برای جلوگیری از زیان وارده توسط شکست سیستم، مهندس تصمیم به نگهداری[2] از این دو زیرسیستم به منظور طول عمر طولانی‌تر می‌گیرد. البته ایمن‌ترین کار این است که نگهداری از سیستم سری، زمانی که شروع به کار می‌کند انجام شود. اگر مهندس چنین تصمیمی را اتخاذ نماید خیلی پرهزینه خواهد بود. در حقیقت کافی است نگهداری از زیرسیستم‌ها براساس شکست مولفه $(k-1)$ ام در نظر گرفته شود. با استفاده از نتایج اثبات شده در این مقاله، اگر زمان شکست $(k-1)$ امین مولفه از زیرسیستم اول کوچکتر از زیرسیستم متناظر دوم باشد آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که زمان شکست زیرسیستم اول بزرگتر از زمان شکست زیر سیستم دوم با توجه به ترتیب نسبت درست‌نمایی است. در این حالت مهندس بهتر است اقدامات نگهداری را مدت زمانی بعد از شکست $(k-1)$ امین مولفه برای زیر سیستم اول در نظر بگیرد که برخی از هزینه‌ها را کاهش دهد (بصیری و صالحی ، ۱۳۹۹).

در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه پرمننت ارائه شده است. در بخش ۳ به مقایسه تصادفی نسبت درست‌نمایی سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل از مدل مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(x)$، توابع بقای $\bar{F}(x)=P(X>x)$ و $\bar{G}(x)=P(Y>x)$، توابع نرخ خطر $r_F(x)=f(x)/\bar{F}(x)$ و $r_G(x)=g(x)/\bar{G}(x)$ باشند.

[1] Permanent
[2] Maintenance

(الف) X در ترتیب تصادفی معمولی[1] بزرگتر از Y است ($X \geq_{st} Y$) هرگاه $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x), x \in \mathbb{R}$.

(ب) X در ترتیب نرخ خطر [2] بزرگتر از Y است ($X \geq_{hr} Y$) هرگاه نسبت $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ تابعی صعودی از $x \in \mathbb{R}$ باشد. بطور معادل، $X \geq_{hr} Y$ اگر و فقط اگر به ازای هر $x > ۰$ داشته باشیم $r_F(x) \leq r_G(x)$.

(ج) X در ترتیب نسبت درست‌نمایی [3] بزرگتر از Y است ($X \geq_{\ell r} Y$) هرگاه نسبت $f(x)/g(x)$ تابعی صعودی از $x \in \mathbb{R}$ باشد.

رابطه $X \geq_{\ell r} Y \Longrightarrow X \geq_{hr} Y \Longrightarrow X \geq_{st} Y.$ بین ترتیب‌های تصادفی فوق، برقرار است. برای مطالعه انواع ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها، می‌توان به مولر و استویان (۲۰۰۲)، شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) و برمال زن و حیدری (۱۳۹۸) مراجعه نمود. فرض کنید $\mathbf{A} = \{a\}_{i,j}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه پرمننت ماتریس A به صورت

$$perm\{\mathbf{A}\} = \sum_{\pi} \prod_{i=۱}^{n} \{a\}_{i,\pi(i)},$$

تعریف می‌شود، که در آن $\sum_{\pi}$ نشان‌دهنده مجموع همه $n!$ جایگشت $\pi = (\pi(۱), \ldots, \pi(n))$ از اعداد $\{۱, \ldots, n\}$ است. بنابراین تعریف پرمننت همانند دترمینان است با این تفاوت که علامت متناوبی (علامت وابسته به اینکه جایگشت از مرتبه زوج یا فرد است) ندارد. فرض کنید پرمننت ماتریس $\left(v_۱, \ldots, v_n\right)$ با نماد $[v_۱, \ldots, v_n]$ نشان داده شود. فرض کنید $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \ldots$ بردارهای تصادفی سطری در $\mathbb{R}^n$ باشند، که در آن $\mathbf{v}_i$ نشان دهنده یک ماتریس سطری با مؤلفه های v_i است. آنگاه پرمننت $[\underbrace{\mathbf{v}_۱}_{r_۱}, \underbrace{\mathbf{v}_۲}_{r_۲}, \ldots]$ با گرفتن $r_۱$ کپی از $\mathbf{v}_۱$، $r_۲$ کپی از $\mathbf{v}_۲$ و غیره حاصل می‌شود.

فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim F_i(x)$ و $X_{۱:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر با آنها باشند. در این صورت تابع چگالی احتمال k -امین آماره مرتب به صورت

$$f_{k:n}(x) = \frac{۱}{(k-۱)!(n-k)!}\, perm\{\mathbf{A}\},$$

---
[1] Usual stochastic order
[2] Hazard rate order
[3] Likelihood ratio order

است، که در آن $A = [\underbrace{\mathbf{F}(x)}_{k-1}, \mathbf{f}(x), \underbrace{\bar{\mathbf{F}}(x)}_{n-k}]$، به طوری که $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$، $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ و $\bar{\mathbf{F}}(x) = (1 - F_1(x), \cdots, 1 - F_n(x))$ (بالاکریشنان ، ۲۰۰۷). به عنوان مثال، اگر $n = 3$ و $k = 1$، آنگاه تابع چگالی احتمال کوچکترین آماره مرتب به صورت

$$f_{1:3}(x) = \frac{1}{(1-1)!(3-1)!}\, perm\{\mathbf{A}\},$$

است، که در آن

$$\mathbf{A} = [\underbrace{\mathbf{F}(x)}_{0}, \mathbf{f}(x), \underbrace{\bar{\mathbf{F}}(x)}_{2}] = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ 1 - F_1(x) & 1 - F_2(x) & 1 - F_3(x) \\ 1 - F_1(x) & 1 - F_2(x) & 1 - F_3(x) \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} perm\{\mathbf{A}\} &= f_1(x)\, perm\begin{bmatrix} 1 - F_2(x) & 1 - F_3(x) \\ 1 - F_2(x) & 1 - F_3(x)\} \end{bmatrix} \\ &+ f_2(x)\, perm\begin{bmatrix} 1 - F_1(x) & 1 - F_3(x) \\ 1 - F_1(x) & 1 - F_3(x)\} \end{bmatrix} \\ &+ f_3(x)\, perm\begin{bmatrix} 1 - F_1(x) & 1 - F_2(x) \\ 1 - F_1(x) & 1 - F_2(x)\} \end{bmatrix} \\ &= 2f_1(x)\,(1 - F_2(x))\,(1 - F_3(x)) + 2f_2(x)\,(1 - F_1(x))\,(1 - F_3(x)) \\ &+ 2f_3(x)\,(1 - F_1(x))\,(1 - F_2(x)). \end{aligned}$$

بنابراین تابع چگالی احتمال کوچکترین آماره مرتب متناظر با این نمونه ۳ تایی به صورت

$$\begin{aligned} f_{1:3}(x) &= f_1(x)\,(1 - F_2(x))\,(1 - F_3(x)) + f_2(x)\,(1 - F_1(x))\,(1 - F_3(x)) \\ &+ f_3(x)\,(1 - F_1(x))\,(1 - F_2(x)). \end{aligned}$$

است. فرض کنید $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda^*)$ و برای (p,q) داشته باشیم:

$$\left[\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}x)\right]_{p,q} = \begin{bmatrix} F(\lambda x)\mathbf{1}_p \\ F(\lambda^* x)\mathbf{1}_q \end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}x)]_{p,q} = \begin{bmatrix} \overline{F}(\lambda x)\mathbf{1}_p \\ \overline{F}(\lambda^* x)\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}x)\right]_{p,q} = \begin{bmatrix} \lambda f(\lambda x)\mathbf{1}_p \\ \lambda^* f(\lambda^* x)\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$

که در آن $\mathbf{1}_p$ و $\mathbf{1}_q$ بردارهای سطری از مرتبه p و q شامل اعداد یک هستند.

لم ۱. *(ون لانت، ۱۹۸۱) فرض کنید $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ مجموعه‌ای از بردارهای نامنفی در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{b}$ برداری دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن $n \geq 2$ است. در این صورت:*

$$\left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\right]^2 \geq \left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1}\right]\left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}, \mathbf{b}\right],$$

که در آن $[\cdot]$ نماد پرمننت است.

لم ۲. *(هو و زو، ۲۰۰۳) فرض کنید $\mathbf{H} = \left(\mathbf{h}_1, \ldots .\mathbf{h}_{n-2}\right)$ یک ماتریس از مرتبه $n \times (n-2)$ با درایه‌های نامنفی باشد. آنگاه*

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H}\right]_{p,q}\left[\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{H}\right]_{p,q} \quad &- \quad \left[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{H}\right]_{p,q}\left[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{H}\right]_{p,q} \\ &\overset{sgn}{=} \quad (a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 d_1 - b_1 d_2), \end{aligned}$$

که در آن $u \overset{sgn}{=} v$ به معنای هم علامت بودن u و v و $\mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} h_{1,i}\mathbf{1}_p \\ h_{1,i}\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$، $i = 1, \ldots, n-2$، $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1\mathbf{1}_p \\ a_2\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$، $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1\mathbf{1}_p \\ b_2\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$، $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1\mathbf{1}_p \\ c_2\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$، $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1\mathbf{1}_p \\ d_2\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$ و $p + q = n \geq 2$ است.

۳ ترتیب نسبت درست‌نمایی در سیستم‌های k از n

فرض کنید طول عمر یک سیستم k از n متشکل از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توزیع پایه F و پارامترهای مقیاس $(\underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{p}, \underbrace{\lambda^*, \cdots, \lambda^*}_{q})$ با نماد $T_{k|n}(p,q)$ نشان داده شود.

قضیه ۱. *فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی نامنفی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توزیع پایه F و پارامترهای مقیاس $(\underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{p}, \underbrace{\lambda^*, \cdots, \lambda^*}_{q})$ تبعیت می‌کنند که درآن $\lambda \geq \lambda^*$ است. اگر نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ نزولی در x باشد آنگاه $T_{k|n}(p,q) \geq_{\ell r} T_{k+1|n}(p,q)$، که درآن $1 \leq k \leq n$، $p \geq 2$ و $p+q=n$ است.*

برهان: فرض کنید $\lambda \geq \lambda^*$ باشد. تابع چگالی احتمال $T_{k|n}(p,q)$ عبارت است از:

$$f_{T_{k|n}(p,q)}(t) = \frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\lambda t), \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k-1}\big]_{p,q}.$$

بطور مشابه، تابع چگالی احتمال $T_{k+1|n}(p,q)$ به صورت

$$f_{T_{k+1|n}(p,q)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!k!}\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k-1}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda} t), \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k}\big]_{p,q}.$$

است. برای بدست آوردن نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود

$$\boldsymbol{\Psi}_1(t) = \frac{\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda} t), \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k-1}\big]_{p,q}}{\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k-1}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\lambda t), \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k}\big]_{p,q}},$$

تابعی صعودی در t است. بدین منظور، ابتدا نمادهای

$$\mathbf{A}_{p,q} = \big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda} t), \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k-1}\big]_{p,q}, \quad \mathbf{A}^{(1)}_{p,q} = \big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{n-k-1}, \underbrace{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{2}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda} t)}_{k-1}\big]_{p,q},$$

$$\mathbf{A}^{(۲)}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{۲},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۲}\big]_{p,q},\quad \mathbf{B}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k}\big]_{p,q},$$

$$\mathbf{B}^{(۱)}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۲},\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{۲},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k}\big]_{p,q},\quad \mathbf{B}^{(۲)}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{۲},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q}$$

$$\mathbf{A}^{(۳)}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}^{۲}\mathbf{f}'(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q},\quad \mathbf{B}^{(۳)}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱}\lambda^{۲}\mathbf{f}'(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k}\big]_{p,q}.$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از بسط لاپلاس و مشتق‌گیری از تابع $\boldsymbol{\Psi}_{۱}(t)$ نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}'_{۱}(t) &\overset{sgn}{=} (n-k)\mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۱)}_{p,q}+\mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۳)}_{p,q}-(k-۱)\mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۲)}_{p,q}\\ &- [(n-k-۱)\mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۱)}_{p,q}+\mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۳)}_{p,q}-k\mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۲)}_{p,q}]\\ &\geq (n-k-۱)\mathbf{J}_{۱}+\mathbf{J}_{۲}+(k-۱)\mathbf{J}_{۳},\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{۱} &= \mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۱)}_{p,q}-\mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۱)}_{p,q}, &(۴)\\ \mathbf{J}_{۲} &= \mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۳)}_{p,q}-\mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۳)}_{p,q}, &(۵)\\ \mathbf{J}_{۳} &= \mathbf{A}_{p,q}\mathbf{B}^{(۲)}_{p,q}-\mathbf{B}_{p,q}\mathbf{A}^{(۲)}_{p,q}. &(۶)\end{aligned}$$

فرض کنید:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\overline{F}(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \overline{F}(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\mathbf{c}=\begin{pmatrix}F(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ F(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}\lambda f(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},$$

و $\mathbf{H}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۲},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q}$. اکنون با بکارگیری لم ۲ در (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_۱ &\overset{sgn}{=} [\overline{F}(\lambda t)F(\lambda^* t)-\overline{F}(\lambda^* t)F(\lambda t)][F(\lambda^* t)\lambda f(\lambda t)-F(\lambda t)\lambda f(\lambda^* t)]\\ &\overset{sgn}{=} [\frac{F(\lambda^* t)}{\overline{F}(\lambda^* t)}-\frac{F(\lambda t)}{\overline{F}(\lambda t)}][\frac{\lambda f(\lambda t)}{F(\lambda t)}-\frac{\lambda^* f(\lambda^* t)}{F(\lambda^* t)}]\\ &= I_۱\times I_۲,\end{aligned}$$

فرض کنید $\lambda t=u_۱$ و $\lambda^* t=u_۲$ باشد. از $\lambda\geq\lambda^*$ نتیجه می‌شود $u_۲\leq u_۱$ است. نزولی بودن نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ معادل با $X_\lambda\leq_{\ell r}X_{\lambda^*}$ است که نشان می‌دهد $xr(x)$ و $\tilde{r}(x)$ به ترتیب توابعی صعودی و نزولی در x هستند. بنابراین

$$I_۱\overset{sgn}{=}\frac{F(u_۲)}{\overline{F}(u_۲)}-\frac{F(u_۱)}{\overline{F}(u_۱)}\geq ۰, \tag{۷}$$

$$I_۲\overset{sgn}{=}u_۱r(u_۱)-u_۲r(u_۲)\geq ۰ \tag{۸}$$

در نتیجه $\mathbf{J}_۱\geq ۰$ است. از طرف دیگر، قرار دهید

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\overline{F}(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \overline{F}(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\lambda f(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}F(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ F(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}\lambda^۲ f(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \lambda^{*۲} f(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix}$$

و $\mathbf{H}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q}$. با بگارگیری مجدد لم ۲ در (۵) داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_۲ &\overset{sgn}{=} [\overline{F}(\lambda t)F(\lambda^* t)-\overline{F}(\lambda^* t)F(\lambda t)][\lambda^* f(\lambda^* t)\lambda^۲ f'(\lambda t)-\lambda f(\lambda t)\lambda^{*۲} f'(\lambda^* t)]\\ &\overset{sgn}{=} [\frac{F(\lambda^* t)}{\overline{F}(\lambda^* t)}-\frac{F(\lambda t)}{\overline{F}(\lambda t)}][\frac{\lambda f'(\lambda t)}{f(\lambda t)}-\frac{\lambda^* f'(\lambda^* t)}{f(\lambda^* t)}]\\ &= I_۱\times I_۳,.\end{aligned}$$

بنابراین $I_۳\overset{sgn}{=}\frac{u_۱f'(u_۱)}{f(u_۱)}-\frac{u_۲f'(u_۲)}{f(u_۲)}\geq ۰$. در نتیجه $\mathbf{J}_۲\geq ۰$. سرانجام، نشان داده می‌شود $\mathbf{J}_۳$ مثبت

است. بدین منظور، قرار دهید

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\overline{F}(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \overline{F}(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\mathbf{c}=\begin{pmatrix}\overline{F}(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \overline{F}(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}\lambda f(\lambda t)\mathbf{1}_p\\ \lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{1}_q\end{pmatrix}$$

و $\mathbf{H}_{p,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k}\big]_{p,q}$. اکنون با بکارگیری لم ۲ در (۶) داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_۳ &\overset{sgn}{=} [\overline{F}(\lambda^* t)F(\lambda t)-\overline{F}(\lambda t)F(\lambda^* t)][\overline{F}(\lambda^* t)\lambda f(\lambda t)-\overline{F}(\lambda t)\lambda f(\lambda^* t)]\\ &\overset{sgn}{=} [\frac{F(\lambda t)}{\overline{F}(\lambda t)}-\frac{F(\lambda^* t)}{\overline{F}(\lambda^* t)}][\frac{\lambda f(\lambda t)}{\overline{F}(\lambda t)}-\frac{\lambda^* f(\lambda^* t)}{\overline{F}(\lambda^* t)}]\\ &= I_۴\times I_۵\end{aligned}$$

واضح است که $I_۴=-I_۱\leq ۰$ و $I_۵\overset{sgn}{=}u_۱r(u_۱)-u_۲r(u_۲)\leq ۰$. بنابراین $\mathbf{J}_۳\geq ۰$. در نتیجه $\boldsymbol{\Psi}'_۱(t)\geq ۰$ و نتیجه مطلوب، حاصل می‌شود.

قضیه ۲. *فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی نامنفی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توزیع پایه F و پارامترهای مقیاس $(\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{p},\underbrace{\lambda^*,\cdots,\lambda^*}_{q})$ تبعیت می‌کنند. اگر $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ نزولی در x باشد، چنانچه $\lambda\geq\lambda^*$ آنگاه $T_{k|n}(p,q-۱)\geq_{\ell r}T_{k|n}(p-۱,q)$.*

برهان: تابع چگالی احتمال $T_{k|n}(p-۱,q)$ به صورت

$$f_{T_{k|n}(p-۱,q)}(t)=\frac{۱}{(n-k)!(k-۱)!}\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p-۱,q}.$$

است. مشابه قضیه ۱ کافی است نشان داده شود

$$\boldsymbol{\Psi}_۲(t)=\frac{\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p-۱,q}}{\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q-۱}},$$

تابعی صعودی از t است. بدین منظور، نمادهای

$$\mathbf{A}_{p-۱,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p-۱,q},\ \mathbf{A}^{(۱)}_{p-۱,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p-۱,q}$$

$$\mathbf{A}^{(۲)}_{p-۱,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۲}\big]_{p-۱,q},\ \mathbf{B}_{p,q-۱}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\lambda t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q-۱}$$

$$\mathbf{B}^{(۱)}_{p,q-۱}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k-۱},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k}\big]_{p,q-۱},\ \mathbf{B}^{(۲)}_{p,q-۱}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}t),\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۲}\big]_{p,q-۱}$$

$$\mathbf{A}^{(۳)}_{p-۱,q}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p-۱,q},\ \mathbf{B}^{(۳)}_{p,q-۱}=\big[\underbrace{\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{n-k},\underbrace{\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda}t)}_{k-۱}\big]_{p,q-۱}.$$

در نظر گرفته می‌شوند. با مشتق‌گیری از تابع $\boldsymbol{\Psi}_۲(t)$ و استفاده از بسط لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}'_۲(t) &\overset{sgn}{=} \mathbf{B}_{p-۱,q}[(n-k)(p-۱)\lambda f(\lambda t)\mathbf{A}^{(۱)}_{p-۲,q}+(n-k)q\lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{A}^{(۱)}_{p-۱,q-۱}\\
&+ (p-۱)\lambda^۲ f'(\lambda t)\mathbf{A}^{(۳)}_{p-۲,q}+q\lambda^{*۲} f'(\lambda^* t)\mathbf{A}^{(۳)}_{p-۱,q-۱}\\
&- (k-۱)(p-۱)\lambda f(\lambda t)\mathbf{A}^{(۲)}_{p-۲,q}-(k-۱)q\lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{A}^{(۲)}_{p-۱,q-۱}]\\
&- \mathbf{A}_{p-۱,q}[(n-k)(p-۱)\lambda f(\lambda t)\mathbf{B}^{(۱)}_{p-۲,q}+(n-k)q\lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{B}^{(۱)}_{p-۱,q-۱}\\
&+ (p-۱)\lambda^۲ f'(\lambda t)\mathbf{B}^{(۳)}_{p-۲,q}+q\lambda^{*۲} f'(\lambda^* t)\mathbf{B}^{(۳)}_{p-۱,q-۱}\\
&- (k-۱)(p-۱)\lambda f(\lambda t)\mathbf{B}^{(۲)}_{p-۲,q}-(k-۱)q\lambda^* f(\lambda^* t)\mathbf{B}^{(۲)}_{p-۱,q-۱}]\\
&= (n-k)\mathbf{J}_۴+\mathbf{J}_۵+(k-۱)\mathbf{J}_۶,
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_۴ &= [pq\mathbf{A}^{(۱)}_{p-۱,q-۱}\mathbf{B}^{(۱)}_{p-۱,q-۱}-(p-۱)(q-۱)\mathbf{A}^{(۱)}_{p-۲,q}\mathbf{B}^{(۱)}_{p,q-۲}]\\
&\times [\lambda^* f(\lambda^* t)F(\lambda t)-\lambda f(\lambda t)F(\lambda^* t)],\\
\mathbf{J}_۵ &= [pq\mathbf{A}^{(۳)}_{p-۱,q-۱}\mathbf{B}^{(۳)}_{p-۱,q-۱}-(p-۱)(q-۱)\mathbf{A}^{(۳)}_{p-۲,q}\mathbf{B}^{(۳)}_{p,q-۲}]\\
&\times [\lambda^{*۲} f'(\lambda^* t)\lambda f(\lambda t)-\lambda^۲ f(\lambda t)\lambda^* f(\lambda^* t)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_6 &= [pq\mathbf{A}^{(2)}_{p-1,q-1}\mathbf{B}^{(2)}_{p-1,q-1} - (p-1)(q-1)\mathbf{A}^{(2)}_{p-2,q}\mathbf{B}^{(2)}_{p,q-2}] \\ &\times \ [\lambda f(\lambda t)\overline{F}(\lambda^* t) - \lambda^* f(\lambda^* t)\overline{F}(\lambda t)].\end{aligned}$$

بسادگی می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{A}^{(1)}_{p-1,q-1} = \mathbf{B}^{(1)}_{p-1,q-1} \ , \ \ \mathbf{A}^{(2)}_{p-1,q-1} = \mathbf{B}^{(2)}_{p-1,q-1} \ , \ \ \mathbf{A}^{(3)}_{p-1,q-1} = \mathbf{B}^{(3)}_{p-1,q-1}$$

بنابر لم ۱ داریم: $[\mathbf{A}^{(1)}_{p-1,q-1}]^2 \geq \mathbf{A}^{(1)}_{p-2,q}\mathbf{B}^{(1)}_{p,q-2}$ ، $[\mathbf{A}^{(2)}_{p-1,q-1}]^2 \geq \mathbf{A}^{(1)}_{p-2,q}\mathbf{B}^{(2)}_{p,q-2}$ و $[\mathbf{A}^{(3)}_{p-1,q-1}]^2 \geq \mathbf{A}^{(3)}_{p-2,q}\mathbf{B}^{(3)}_{p,q-2}$. بنابراین بخش‌های اول $\mathbf{J}_4$، $\mathbf{J}_5$ و $\mathbf{J}_6$ مثبت هستند. مثبت بودن بخش‌های دوم $\mathbf{J}_4$، $\mathbf{J}_5$ و $\mathbf{J}_6$ همانند اثبات قضیه قبل، حاصل می‌شود.

قضیه ۳. *فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی نامنفی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توزیع پایه F و پارامترهای مقیاس $(\underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{p}, \underbrace{\lambda^*, \cdots, \lambda^*}_{q})$ تبعیت می‌کنند. اگر نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ نزولی در x باشد آنگاه*

$$\lambda \geq \lambda^* \Longrightarrow T_{k|n}(p-1, q) \geq_{\ell r} T_{k+1|n}(p, q-1).$$

برهان: از قضیه ۱ نتیجه می‌شود $T_{k|n}(p-1, q) \geq_{\ell r} T_{k+1|n}(p-1, q)$ است. همچنین از قضیه ۲ نتیجه می‌شود $T_{k+1|n}(p-1, q) \geq_{\ell r} T_{k+1|n}(p, q-1)$. اکنون با ترکیب کردن دو نامساوی تصادفی فوق، نتیجه لازم حاصل می‌شود.

مثال ۱. *فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل گاما باشند که در آن $X_i \sim Ga(r, \lambda)$ $(i = 1, \cdots, p)$ و $X_j \sim Ga(r, \lambda^*)$ $(j = p+1, \cdots, n)$ و $p \geq 2$ و $\lambda \geq \lambda^*$ است. بسادگی می‌توان نشان داد $\frac{x f'(x)}{f(x)} = r - 1 - x$ که تابعی نزولی در x است. بنابر قضیه ۱، $T_{n-k+1|n}(p, q) \geq_{\ell r} T_{n-k|n}(p, q)$ یا $T_{k+1|n}(p, q) \geq_{\ell r} T_{k|n}(p, q)$. همچنین بنابر قضیه ۳، برای $\lambda \geq \lambda^*$ داریم $T_{n-k+1|n}(p-1, q) \geq_{\ell r} T_{n-k|n}(p, q-1)$ یا $T_{k+1|n}(p-1, q) \geq_{\ell r} T_{k|n}(p, q-1)$.*

ملاحظه ۱. *شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) ثابت کرد $X \geq_{\ell r} Y$ اگر و فقط اگر*

$$(X|a \leq X \leq b) \geq_{st} (Y|a \leq Y \leq b)$$

که در آن $a \leq b$ است. با استفاده از این واقعیت، می‌توان یک کران بالا برای $(X|a \leq X \leq b)$ با استفاده از یک نمونه ناهمگن از مدل مقیاس به دست آورد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مستقل مدل مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته شد. بدین منظور، ابتدا یک سیستم k از n متشکل مولفه‌های مستقل مدل مقیاس با چندین دورافتاده در نظر گرفته شد، سپس با استفاده از تابع پرمننت، ترتیب نسبت درست‌نمایی در این‌گونه سیستم‌ها بررسی گردید. نتایج بحاصل کمک می‌کند تا چندین کران پایین برای تابع بقای سیستم‌های k از n بدست آورده شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران محترم و ویراستار مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند. نویسنده دوم، این تحقیق را با حمایت مالی دانشگاه زابل انجام داده است. شماره گرنت: $UOZ - GR - ۹۶۱۸ - ۱۴$

مراجع

برمال‌زن، ق. و حیدری، ع. (۱۳۹۸)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های مستقل و ناهمگن تحت نرخ خطی تعمیم‌یافته، مجله علوم آماری، ۱۳، ۳۳۸–۳۱۹.

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. و معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶–۱۸۹.

بصیری، ا. و صالحی، س. م. (۱۳۹۹)، بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه در سیستم‌های سری–موازی تعمیرپذیر با نرخ شکست وانی‌شکل، مجله علوم آماری، ۱۴.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1992), *A First Course in Order Statistics*, John Wiley, New York.

Balakrishnan, N. (2007), Permanents, Order Statistics, Outliers, and Robustness. *Revista Matematica Complutense*, **20**, 7-107.

Balakrishnan, N., Haidari, A. and Masoumifard, K. (2015), Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Generalized Exponential Components, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 333-348.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T. and Haidari, A. (2014), Stochastic Comparisons of Sample Spacings in Single and Multiple-Outlier Exponential Models, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **49**, 815-830.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Silver Spring.

Barnett, V. and Lewis, T. (1994), *Outliers in Statistical Data*, 3rd ed., John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

Bapat, R. B. and Kochar, S. C. (1994), On Likelihood-rate Ordering of Order Statistics, *Linear Algebra and Its Applications*, **199**, 281-291.

Boland, P. J., Hollander, M., Joag-Dev, K. and Kochar, S. (1996), Bivariate Dependence Properties of Order Statistics, *Journal of Multivariate Analysis*, **56**, 75-89.

David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2004), *Order Statistics*, Encyclopedia of Statistical Sciences.

Karlin, S. and Rinott, Y. (1980), Classes of Orderings of Measures and Related Correlation Inequalities: Multivariate Totally Positive Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **10**, 467-498.

van Lint, J. H. (1981), Notes on Egoritsjev's Proof of the van der Waerden Conjecture, *Linear Algebra and Its Applications*, **39** 1-8.

Raqab, M. Z. and Amin, W. A. (1996), Some Ordering Results on Order Statistics and Record Values, *IAPQR Transactions*, **21**, 1–8.

Hu, T. and Zhu, Z. (2003), Stochastic Comparisons of Order Statistics from Two Samples, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **27**, 89-98.

Ma, C. (1988), Likelihood Ratio Ordering of Order Statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **70**, 255-61.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007), *Life Distributions,* Springer-Verlag, New York.

Müller, A., and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley & Sons, New York.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer-Verlag, New York.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2012), Stochastic Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Exponential Models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 159-182.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2015), Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Gamma Models, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **17**, 617-645.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2020
Vol. 14, No. 2, pp 335-350
DOI: 10.29252/jss.13.2.335

Likelihood Ratio Ordering of k-out-of-n Systems Comprising Multiple-outlier Scale Components

Amini-Seresht, E.[1], and Barmalzan, G.[2].

[1]Department of Statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
[2]Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Abstract: This paper examines the problem of stochastic comparisons of k-out-of-n systems with independent multiple-outlier scale components. In this regard, we first consider a k-out-of-n system comprising multiple-outlier scale components and then, by using a permanent function, investigate the likelihood ratio order between these systems.

Keywords: Likelihood ratio order; Usual stochastic order; Order statistics; Permanent; k-out-of-n systems.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.