

برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای به روش استنباط حاشیه‌ای

علی سخایی، پرویز نصیری

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸ تاریخ آخرین بازننگری: ۱۳۹۷/۵/۲۱

چکیده: فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن با تابع شدت دوره‌ای کوتاه مدت برای مدل‌بندی پیشامدهایی که فراوانی وقوع آنها دارای الگوی فصلی یا روند دوره‌ای است به کار می‌رود. در این مقاله ضمن معرفی دقیق فرآیند فوق، برای توصیف ساختار همبستگی بین جهش‌های فرآیند از مفصل لوی استفاده می‌شود. سپس روش استنباط حاشیه‌ای برای برآورد پارامترهای مدل معرفی می‌گردد. در پایان با ذکر مثالی عددی از داده‌های بیمه اتومبیل، با روش فوق فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای کوتاه مدت به داده‌ها برازش داده شده و نتایج آن با روش ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌گردد. با نتایج حاصل شده از آزمون نیکویی برازش نشان داده می‌شود که مدل فوق به خوبی داده‌های مورد نظر را توصیف می‌کند. **واژه‌های کلیدی:** دوره‌ای کوتاه مدت، روش استنباط حاشیه‌ای، فرآیند پواسون ناهمگن، فرآیند لوی، مفصل لوی.

۱ مقدمه

طی دو دهه اخیر، فرآیند پواسون مرکب به طور فزاینده‌ای در مدل‌بندی داده‌های واقعی به کار گرفته شده است. اوزل (۲۰۱۱ الف و ب، ۲۰۱۳) از این فرآیند در آمار بیمه برای مدل‌بندی یک پرتفوی تجاری شامل دو مخاطره که به لحاظ فراوانی و شدت خسارت وابسته‌اند، استفاده نمود.

در فرآیند پواسون مرکب تعداد اتفاقات در یک بازه زمانی دارای فرآیند پواسون است که این فرآیند می‌تواند همگن یا ناهمگن باشد. یک فرآیند پواسون ناهمگن شبیه فرآیند پواسون همگن است با این تفاوت

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: علی سخایی، a_sakhaei@pnu.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05، 60J75، 62H12.

که نرخ سررسید اتفاقات با زمان تغییر می‌کند. بنابراین، در این فرآیند نرخ سررسید در طول دوره مورد بررسی ثابت نیست.

ثابت نبودن تابع شدت در فرآیند پواسون مرکب ممکن است به دلیل اثرات فصلی یا روندهای دوره‌ای رخ دهد. در چنین حالتی فرآیند پواسون مرکب را دوره‌ای گویند. به عنوان مثال پدیده‌های جوی مانند مه‌گرفتن یا بارش برف باعث افزایش تعداد تصادفات خودروها می‌شود و به همین دلیل فراوانی وقوع تصادفات در زمستان نسبت به دیگر فصل‌ها بیشتر است. همچنین ورزش‌تندبادهای در ماه‌های گرم سال در وقوع آتش‌سوزی تاثیر قابل ملاحظه‌ای دارد. بنابراین یک فرآیند پواسون دوره‌ای برای مدل‌بندی فراوانی رخداد اینگونه اتفاقات معقولانه و منطقی است.

یک فرآیند پواسون مرکب با تابع شدت دوره‌ای توسط آسموسن و رولسکی (۱۹۹۴) و رولسکی و دیگران (۱۹۹۹) مورد بحث قرار گرفته است. همچنین گاریدو و لو (۲۰۰۲) و لو و گاریدو (۲۰۰۵) نوعی فرآیند پواسون مرکب دوره‌ای را بررسی کردند که در دوره‌های کوتاه مدت ویژگی دوره‌ای بودن آن به طور مشابه تکرار نمی‌شود. نمونه‌ای از این توابع شدت، سینوسی-بتا و بتا-بتا هستند. سپس این مدل‌های پارامتری به فراوانی وقوع تندبادهای اتلانتیک بین سالهای ۱۸۹۹ تا ۲۰۰۰ برآزش یافته‌اند.

یکی از روش‌های مدل‌بندی وابستگی در فرآیندهای لوی چندمتغیره استفاده از مفصل لوی است. این مفصل‌ها به طور نظری در کانت و تانکوف (۲۰۰۴) و کالسن و تانکوف (۲۰۰۶) معرفی شده‌اند. بوکر و کلپلبرگ (۲۰۰۸ و ۲۰۰۹) از مفصل‌های لوی برای مدل‌بندی وابستگی در فرآیند پواسون مرکب چندمتغیره به منظور تحلیل ریسک عملیاتی یک موسسه استفاده نمودند. اسماعیلی و کلپلبرگ (۲۰۱۰) از روش ماکسیمم درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره همگن محاسبه نمودند، طوری‌که ساختار همبستگی بین جهش‌ها توسط مفصل کلایتون-لوی مدل‌بندی شده است. ولسن (۲۰۱۲) روشی جدید برای برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره همگن وقتی به صورت گسسته مشاهده شده باشد، پیشنهاد نمود.

در این مقاله یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن با تابع شدت دوره‌ای کوتاه مدت معرفی می‌شود طوری‌که ساختار همبستگی بین جهش‌های فرآیند با استفاده از مفصل لوی مدل‌بندی شده است. هدف، برآورد پارامترهای مدل با روشی موسوم به روش استنباط حاشیه‌ای و مقایسه آن با روش ماکسیمم درست‌نمایی است.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲ فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن معرفی می‌شود. در بخش ۳ مفصل‌های لوی و اهمیت استفاده از آنها برای مدل‌بندی وابستگی در فرآیندهای لوی مطرح می‌شود. در بخش ۴ با استفاده از تابع درستنمایی، روش استنباط حاشیه‌ای برای برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن مطرح می‌شود. در بخش ۵ مدل مورد نظر را روی داده‌های واقعی با روش مورد نظر و در حضور سه مفصل لوی مختلف برازش داده و با انجام یک آزمون نیکویی برازش، کارایی برازش مدل نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن

یک فرآیند پواسون مرکب دو متغیره $(S(t))_{t \geq 0}$ روی فضای احتمال فیلتر شده $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ به صورت

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \quad t \geq 0, \quad (1)$$

تعریف می‌شود، طوری که $(N(t))_{t \geq 0}$ یک فرآیند پواسون همگن با شدت λ است و $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای مستقل و هم‌توزیع از بردارهای تصادفی در \mathbb{R}^2 هستند. این فرآیند دارای نمونه‌های مستقل و مانا است و $(N(t))_{t \geq 0}$ و $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ مستقل و $P(Z_i = 0) = 0$. به عبارت دیگر وقتی N یک جهش داشته باشد، حداقل یکی از مولفه‌های S نیز دارای یک جهش خواهد بود (تقریباً به طور حتم). با استفاده از تجزیه لوی-ایتو برای یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره به صورت $S(t) = (S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ برای هر $\omega \in \Omega$ می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^\perp(t) + S_1^\parallel(t) \\ S_2^\perp(t) + S_2^\parallel(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

فرآیندهای $S_1^\perp(t)$ و $S_2^\perp(t)$ مولفه‌های مستقل $S(t)$ نامیده می‌شوند که به ترتیب روی $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times 0)$ و $(0 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ تعریف می‌گردند. مولفه وابسته $S(t)$ نیز با $(S_1^\parallel(t), S_2^\parallel(t)) = S^\parallel(t)$ مطابقت می‌کند که روی $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ تعریف می‌شود. مولفه‌های $S_1^\perp(t)$ ، $S_2^\perp(t)$ و $S^\parallel(t)$ از لحاظ آماری از یکدیگر مستقلند و هم‌زمان با هم رخ نمی‌دهند. به علاوه هر سه این مولفه‌ها دارای فرآیند پواسون مرکب

هستند، (اسماعیلی و کلایلیگ، ۲۰۱۰). در ادامه، هدف تعمیم مدل (۱) به حالت ناهمگن است. برای این منظور فرض کنید $\lambda(\cdot)$ تابعی انتگرال‌پذیر، نامنفی و اندازه‌پذیر باشد. یک فرآیند پواسون ناهمگن $(N(t))_{t \geq 0}$ فرآیندی است که نقطه‌های تصادفی را بر حسب زمان با شدت $\lambda(t)$ تولید می‌کند. در این فرآیند، اگر $N(T)$ تعداد نقطه‌های تصادفی در بازه زمانی $(0, T]$ باشد آنگاه $N(T)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\Lambda(T)$ است، به عبارت دیگر

$$P(N(T) = n) = \frac{e^{-\Lambda(T)} \Lambda(T)^n}{n!}; \quad n \in \mathbb{N},$$

که $\Lambda(\cdot)$ (تابع شدت تجمعی) به صورت

$$\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(v) dv; \quad T \geq 0,$$

تعریف می‌شود. حالتی را در نظر بگیرید که تابع شدت فرآیند پواسون ناهمگن تابعی دوره‌ای با دوره یکسال باشد. در این صورت فرآیند پواسون را دوره‌ای کوتاه مدت می‌نامند. مطابق با دیمیتروف و دیگران (۱۹۹۷) تابع شدت تجمعی این فرآیند برای $t \geq 0$ دارای ویژگی خطی

$$\Lambda(t) = [t] \Lambda(1) + \Lambda(t - [t]),$$

است، که در آن $[t]$ جزء صحیح t است.

موقعیت‌هایی همچون طوفان‌های فصلی، تندبادها و پدیده‌های جوی ناپایدار جزء مواردی هستند که رخداد آنها مقادیر ادعای خسارت بیمه‌های اتومبیل یا آتش‌سوزی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. بنابراین استفاده از فرآیندهای پواسون ناهمگن دوره‌ای برای توصیف فراوانی وقوع چنین پیشامدهایی منطقی است. یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن به صورت

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (Z_{1i}, Z_{2i}) = \left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_{1i}, \sum_{i=1}^{N(t)} Z_{2i} \right) \quad t \geq 0, \quad (3)$$

مشابه فرآیند پواسون مرکب دومتغیره همگن تعریف می‌شود، با این تفاوت که $(N(t))_{t \geq 0}$ یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع شدت $\lambda(t)$ است.

۳ مفصل‌های لوی

یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره نوعی فرآیند لوی است که برای مدل‌بندی ساختار همبستگی بین جهش‌های آن می‌توان از مفصل لوی استفاده نمود. این رهیافت دو مزیت مهم دارد:

۱. ایجاد مدلی با تعداد پارامترهای کمتر در مقایسه با حالت معمول.

۲. انعطاف‌پذیری در ساخت مدلی با ترکیب اطلاعات توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار همبستگی بین آنها.

به این ترتیب در این روش مدل‌بندی وابستگی، اگر تابع مفصل معلوم باشد، با مشخص بودن پارامترهای توزیع‌های پواسون حاشیه‌ای و توزیع‌های اندازه جهش در فرآیندهای $(S_1(t))_{t \geq 0}$ و $(S_2(t))_{t \geq 0}$ می‌توان فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن را ایجاد کرد.

در این مقاله یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن با جهش‌های نامنفی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این فرض در تحلیل ریسک‌های عملیاتی کاربرد زیادی دارد. بنابراین مفهوم مفصل لوی برای فرآیندهای پواسون مرکب نامنفی ارائه می‌شود.

تعریف ۱: فرض کنید Π اندازه لوی یک فرآیند لوی دوبعدی با جهش‌های نامنفی باشد. انتگرال دمی این فرآیند، تابعی همچون $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ است که به صورت

$$\bar{\Pi}(x_1, x_2) = \Pi([x_1, \infty) \times [x_2, \infty)) \quad (x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$$

تعریف می‌شود و دارای سه ویژگی زیر می‌باشد:

۱. $\bar{\Pi}(0, 0) = \infty$

۲. اگر حداقل یکی از آرگومان‌های آن ∞ باشد آنگاه $\bar{\Pi}$ برابر صفر است،

۳. $\bar{\Pi}(x_1) = \bar{\Pi}(x_1, \infty)$ و $\bar{\Pi}(x_2) = \bar{\Pi}(\infty, x_2)$ انتگرالهای دمی حاشیه‌ای $\bar{\Pi}$ هستند.

تعریف ۲: یک مفصل لوی مثبت دو بعدی تابعی به صورت $[0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)^2$ با سه ویژگی زیر است:

۱. برای هر $(u_1, u_2) \in [0, \infty)^2$ و $(v_1, v_2) \in [0, \infty)^2$ با $u_1 \geq v_1$ و $u_2 \geq v_2$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{C}(u_1, u_2) - \mathcal{C}(u_1, v_2) - \mathcal{C}(v_1, u_2) + \mathcal{C}(v_1, v_2) \geq 0$$

$$\mathcal{C}(u_1, 0) = 0 \text{ و } \mathcal{C}(0, u_2) = 0, \mathcal{C}(0, 0) = 0. ۲$$

$$\mathcal{C}(\infty, u_2) = u_2 \text{ و } \mathcal{C}(u_1, \infty) = u_1. ۳$$

مثال ۳: یک خانواده مهم تک پارامتری از مفصلهای لوی روی $[0, \infty)^2$ خانواده موسوم به کلایتون است که به صورت

$$\mathcal{C}(u, v; \alpha) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}; \quad u, v > 0; \alpha > 0. \quad (۴)$$

تعریف می‌شود. این مفصل تنها همبستگی‌های مثبت را مدل‌بندی می‌کند. یکی از ویژگی‌های خوب تابع مفصل کلایتون لوی آن است که برای یک بازه زمانی به طول T ، تابع مفصل تغییری نمی‌کند به عبارت دیگر $\mathcal{C}_T(u, v; \alpha) = \mathcal{C}(u, v; \alpha)$. همچنین با افزایش α وابستگی بیشتر بین u و v در مقادیر بزرگتر آنها (دم راست) اتفاق می‌افتد.

مثال ۴: خانواده ارشمیدسی مفصلهای لوی توسط کانت و تانکوف (۲۰۰۴) معرفی شدند. در حالت دومتغیره مفصل ارشمیدسی نوع ۱ به صورت

$$\mathcal{C}(u, v; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1 - e^{-\alpha(u+v)}}{e^{-\alpha u} - 2e^{-\alpha(u+v)} + e^{-\alpha v}}\right); \quad u, v > 0; \alpha > 0. \quad (۵)$$

تعریف می‌شود. الگوی وابستگی این تابع مفصل شبیه مفصل کلایتون لوی است با این تفاوت که با α یکسان شدت وابستگی بین u و v در مفصل ارشمیدسی نوع ۱ کمتر از کلایتون لوی است. اگر $\mathcal{C}(u, v; \alpha)$ مفصل ارشمیدسی نوع ۱ برای بازه زمانی به طول واحد باشد، برای بازه زمانی به طول T مفصل ارشمیدسی نوع ۱ $\mathcal{C}_T(u, v; \alpha) = \mathcal{C}(u, v; \frac{\alpha}{T})$ خواهد بود. مفصل ارشمیدسی نوع ۲ در حالت دومتغیره به صورت

$$\mathcal{C}(u, v; \alpha) = \ln\{[(e^u - 1)^{-\alpha} + (e^v - 1)^{-\alpha}]^{-\frac{1}{\alpha}} + 1\}; \quad u, v > 0; \alpha > 0, \quad (۶)$$

تعریف می‌شود. ساختار وابستگی در این مفصل از دو مفصل قبلی متمایز است. در واقع این مفصل علاوه بر وابستگی مثبت، وابستگی منفی را نیز مدل‌بندی می‌کند. با افزایش α وابستگی بین u و v مثبت و با کاهش α وابستگی به منفی تغییر پیدا می‌کند. اگر مفصل ارشمیدسی نوع ۲ برای بازه زمانی به طول واحد $\mathcal{C}(u, v; \alpha)$ باشد آنگاه برای بازه زمانی به طول T مفصل ارشمیدسی نوع ۲ $\mathcal{C}_T(u, v; \alpha) = 2$

$T.C(\frac{u}{T}, \frac{v}{T}; \alpha)$ خواهد بود، (آوانزی و دیگران، ۲۰۱۱).

حال به دنبال آن هستیم که ساختار همبستگی در فرآیند پواسون مرکب $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ با جهش‌های مثبت را به وسیله انتگرال دمی آن و انتگرال‌های دمی حاشیه‌ای مربوطه از طریق مفصل لوی مدل‌بندی کنیم. قضیه زیر که شکل دیگری از قضیه اسکالر است این مهم را تحقق می‌بخشد.

قضیه ۱: (کانت و تانکوف، ۲۰۰۴). فرض کنید $(S(t))_{t \geq 0}$ یک فرآیند لوی دوبعدی دارای جهش‌های مثبت با انتگرال دمی $\bar{\Pi}$ و انتگرال‌های دمی حاشیه‌ای $\bar{\Pi}_1$ و $\bar{\Pi}_2$ باشد. در این صورت یک مفصل لوی مثبت دوبعدی \mathcal{C} وجود دارد که ساختار همبستگی فرآیند لوی مورد نظر را به صورت

$$\bar{\Pi}(x_1, x_2) = \mathcal{C}(\bar{\Pi}_1(x_1), \bar{\Pi}_2(x_2); \alpha); \quad x_1, x_2 \in [0, \infty] \quad (7)$$

توصیف می‌کند. اگر $\bar{\Pi}_2$ و $\bar{\Pi}_1$ پیوسته باشند، مفصل لوی یکتاست در غیر این صورت روی دامنه $\bar{\Pi}_1 \times \bar{\Pi}_2$ یکتاست.

برعکس: فرض کنید $(S_1(t))_{t \geq 0}$ و $(S_2(t))_{t \geq 0}$ دو فرآیند لوی یک بعدی دارای جهش‌های مثبت با انتگرال‌های دمی $\bar{\Pi}_2$ و $\bar{\Pi}_1$ باشند و \mathcal{C} یک مفصل لوی مثبت دوبعدی باشد. آنگاه یک فرآیند لوی دوبعدی وجود دارد که انتگرال دمی آن به وسیله (۷) مشخص می‌شود.

فرض کنید $\bar{\Pi}_2$ و $\bar{\Pi}_1$ انتگرال‌های دمی حاشیه‌ای فرآیند $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ در مدل (۳) باشند. $\bar{\Pi}_2$ و $\bar{\Pi}_1$ برحسب انتگرال دمی مولفه‌های مستقل و وابسته در (۲) به صورت

$$\bar{\Pi}_i = \bar{\Pi}_i^\perp + \bar{\Pi}_i^\parallel; \quad i = 1, 2,$$

نوشته می‌شوند. با استفاده از رابطه اخیر می‌توان تابع بقای اندازه جهش‌های مولفه‌های مستقل و وابسته در مدل (۳) را بر حسب توابع شدت و توزیع‌های اندازه جهش فرآیند بیان کرد. نتایج در لم زیر خلاصه شده‌اند.

لم ۱: فرض کنید $\mathcal{C}(\cdot, \cdot; \alpha)$ یک مفصل لوی با پارامتر α باشد. جهش‌های مشترک در $S^\parallel(t)$ در بازه زمانی $[0, T]$ با شدت $\Lambda^\parallel(T) = \mathcal{C}(\Lambda_1(T), \Lambda_2(T); \alpha)$ و تابع بقای توام

$$\bar{F}_T^\parallel(x_1, x_2) = \frac{1}{\Lambda^\parallel(T)} \mathcal{C}(\Lambda_1(T) \bar{F}_1(x_1), \Lambda_2(T) \bar{F}_2(x_2); \alpha); \quad x_1, x_2 > 0. \quad (8)$$

سررسید می‌شوند. به این ترتیب توابع بقای حاشیه‌ای مربوطه عبارتند از:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\nu T}^{\parallel}(x_{\nu}) &= \frac{1}{\Lambda^{\parallel}(T)} \mathcal{C}(\Lambda_{\nu}(T) \bar{F}_{\nu}(x_{\nu}), \Lambda_{\nu}(T); \alpha), \\ \bar{F}_{\nu T}^{\parallel}(x_{\nu}) &= \frac{1}{\Lambda^{\parallel}(T)} \mathcal{C}(\Lambda_{\nu}(T), \Lambda_{\nu}(T) \bar{F}_{\nu}(x_{\nu}); \alpha).\end{aligned}\quad (9)$$

جهش‌های مستقل $S_i^{\perp}; i = 1, 2$ در بازه زمانی $(\circ, T]$ با شدت

$$\Lambda_i^{\perp}(T) = \Lambda_i(T) - \Lambda^{\parallel}(T)$$

و تابع بقای اندازه جهش

$$\bar{F}_{iT}^{\perp}(x) = \frac{1}{\Lambda_i^{\perp}(T)} (\Lambda_i(T) \bar{F}_i(x) - \Lambda^{\parallel}(T) \bar{F}_{iT}^{\parallel}(x)). \quad (10)$$

سررسید می‌شوند.

۴ برآورد پارامترها

یک فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن به صورت $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ را در نظر بگیرید که در بازه زمانی $(\circ, T]$ به طور پیوسته مشاهده شده باشد. فرض کنید تابع شدت و تابع توزیع اندازه جهش فرآیند پواسون مرکب $(S_1(t))_{t \geq 0}$ به ترتیب با $\lambda_1(t)$ و $F_1(\cdot, \theta_1)$ و برای فرآیند $(S_2(t))_{t \geq 0}$ با $\lambda_2(t)$ و $F_2(\cdot, \theta_2)$ نشان داده شود. اگر n تعداد جهش‌ها در بازه زمانی مورد نظر باشد می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه نمود:

n_{ν}^{\perp} : تعداد جهش‌ها در مولفه مستقل اول

n_{ν}^{\parallel} : تعداد جهش‌ها در مولفه مستقل دوم

n^{\parallel} : تعداد جهش‌ها در مولفه وابسته فرآیند (جهش‌های مشترک فرآیند).

اندازه جهش‌های مولفه‌های مستقل اول و دوم را به ترتیب با $((y_{1\nu}^{\perp}, \dots, y_{1n_{\nu}^{\perp}}^{\perp}))$ و $(y_{\nu 1}^{\perp}, \dots, y_{\nu n_{\nu}^{\perp}}^{\perp})$ و اندازه جهش‌های مشترک فرآیند را نیز با $((y_{1n^{\parallel}}^{\parallel}, y_{2n^{\parallel}}^{\parallel}), \dots, (y_{1n^{\parallel}}^{\parallel}, y_{2n^{\parallel}}^{\parallel}))$ نشان می‌دهیم. با استفاده

از (۲) تابع درستنمایی را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \Lambda_1(T), \Lambda_2(T), \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) &= (\Lambda_1^\perp(T))^{n_1^\perp} e^{-\Lambda_1^\perp(T)} \prod_{i=1}^{n_1^\perp} [f_{1T}^\perp(y_{1i}^\perp; \boldsymbol{\theta}_1)] \\
 &\times (\Lambda_2^\perp(T))^{n_2^\perp} e^{-\Lambda_2^\perp(T)} \prod_{i=1}^{n_2^\perp} [f_{2T}^\perp(y_{2i}^\perp; \boldsymbol{\theta}_2)] \\
 &\times (\Lambda^\parallel(T))^{n^\parallel} e^{-\Lambda^\parallel(T)} \prod_{i=1}^{n^\parallel} [f_T^\parallel((y_{1i}^\parallel, y_{2i}^\parallel); \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)]
 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

نوشت، که در آن

$$f_{1T}^\perp(x; \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{d}{dx} F_{1T}^\perp(x; \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\Lambda_1(T) f_1(x; \boldsymbol{\theta}_1)}{\Lambda_1^\perp(T)} \left[1 - \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{C}(u, \Lambda_2(T); \alpha) \Big|_{u=\Lambda_1(T) \bar{F}_1(x; \boldsymbol{\theta}_1)} \right],$$

$$f_{2T}^\perp(y; \boldsymbol{\theta}_2) = \frac{d}{dy} F_{2T}^\perp(y; \boldsymbol{\theta}_2) = \frac{\Lambda_2(T) f_2(y; \boldsymbol{\theta}_2)}{\Lambda_2^\perp(T)} \left[1 - \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{C}(\Lambda_1(T), v; \alpha) \Big|_{v=\Lambda_2(T) \bar{F}_2(y; \boldsymbol{\theta}_2)} \right]$$

و

$$\begin{aligned}
 f_T^\parallel(x, y; \boldsymbol{\theta}_1; \boldsymbol{\theta}_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_T^\parallel(x, y; \boldsymbol{\theta}_1; \boldsymbol{\theta}_2) = \frac{\Lambda_1(T) \Lambda_2(T) f_1(x; \boldsymbol{\theta}_1) f_2(y; \boldsymbol{\theta}_2)}{\Lambda^\parallel(T)} \\
 &\times \left[\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathcal{C}(u, v; \alpha) \Big|_{u=\Lambda_1(T) \bar{F}_1(x; \boldsymbol{\theta}_1), v=\Lambda_2(T) \bar{F}_2(y; \boldsymbol{\theta}_2)} \right].
 \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارات فوق در (۱۱) لگاریتم تابع درستنمایی به صورت کلی

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \Lambda_1(T), \Lambda_2(T), \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) &= n_1 \ln(\Lambda_1(T)) - \Lambda_1(T) + \sum_{i=1}^{n_1} \ln(f_1(x_i; \boldsymbol{\theta}_1)) \\
 &+ n_2 \ln(\Lambda_2(T)) - \Lambda_2(T) + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(f_2(y_i; \boldsymbol{\theta}_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{n_1^+} \ln\left(1 - \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{C}(u, \Lambda_{\nu}(T); \alpha) \Big|_{u=\Lambda_1(T) \bar{F}_1(y_{\nu i}^+; \theta_1)}\right) \\
 & + \sum_{i=1}^{n_2^+} \ln\left(1 - \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{C}(\Lambda_1(T), v; \alpha) \Big|_{v=\Lambda_2(T) \bar{F}_2(y_{\nu i}^+; \theta_2)}\right) \\
 & + \mathcal{C}(\Lambda_1(T), \Lambda_2(T); \alpha) \\
 & + \sum_{i=1}^{n^{\parallel}} \ln\left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathcal{C}(u, v; \alpha) \Big|_{u=\Lambda_1(T) \bar{F}_1(y_{\nu i}^{\parallel}; \theta_1), v=\Lambda_2(T) \bar{F}_2(y_{\nu i}^{\parallel}; \theta_2)}\right).
 \end{aligned}$$

بیان می‌شود، که نشان می‌دهد تابع درستنمایی مدل (۳) را می‌توان به طور کامل برحسب پارامترهای توزیع‌های پواسون مرکب حاشیه‌ای و تابع مفصل لوی بیان کرد.

۱.۴ روش برآورد استنباط حاشیه‌ای

یکی از روش‌های برآورد پارامترهای رابطه (۱۲) روش پارامتری است. این روش زمانی به کار می‌رود که توزیع‌های حاشیه‌ای مدل معلوم باشند. دو روش پارامتری معمول روش ماکسیم درستنمایی کامل (روش ماکسیم درستنمایی معمول) و روش استنباط حاشیه‌ای هستند. در روش ماکسیم درستنمایی کامل پارامترها به طور همزمان برآورد می‌شوند. اما در حالتی که تعداد پارامترها زیاد است این روش وقت‌گیر و خسته کننده می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل جوی و زو (۱۹۹۶) روشی دومرحله‌ای موسوم به روش استنباط حاشیه‌ای را پیشنهاد کردند. در این روش ابتدا پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای را با ماکسیم کردن رابطه

$$\begin{aligned}
 l^*(\alpha, \Lambda_1(T), \Lambda_2(T), \theta_1, \theta_2) & = n_1 \ln(\Lambda_1(T)) - \Lambda_1(T) + \sum_{i=1}^{n_1} \ln(f_1(x_i; \theta_1)) \\
 & + n_2 \ln(\Lambda_2(T)) - \Lambda_2(T) + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(f_2(y_i; \theta_2))
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

نسبت به پارامترهای مورد نظر برآورد نموده سپس با جایگذاری آنها در (۱۲)، پارامتر(های) تابع مفصل را برآورد می‌کنیم. به عبارت دیگر

$$\hat{\alpha}_{IFM} = \arg \max_{\alpha} l(\alpha, \hat{\Lambda}_1(T), \hat{\Lambda}_r(T), \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) \quad (13)$$

جدول ۱: تعداد جهش‌های مستقل و وابسته در هر ماه برای متغیرهای میزان خسارت وارده به اتومبیل (X) و جراحات‌های بدنی سرنشینان (Y)

ماه	X	Y	فراوانی	ماه	X	Y	فراوانی
	خسارت	خسارت	۹		خسارت	خسارت	۷
فروردین	خسارت	بدون خسارت	۱۲	اردیبهشت	خسارت	بدون خسارت	۷
	بدون خسارت	خسارت	۱		بدون خسارت	خسارت	۱
	خسارت	خسارت	۱۰		خسارت	خسارت	۱۲
خرداد	خسارت	بدون خسارت	۱۶	تیر	خسارت	بدون خسارت	۸
	بدون خسارت	خسارت	۰		بدون خسارت	خسارت	۱
	خسارت	خسارت	۴		خسارت	خسارت	۷
مرداد	خسارت	بدون خسارت	۱۰	شهریور	خسارت	بدون خسارت	۱۱
	بدون خسارت	خسارت	۲		بدون خسارت	خسارت	۳
	خسارت	خسارت	۴		خسارت	خسارت	۳
مهر	خسارت	بدون خسارت	۸	آبان	خسارت	بدون خسارت	۴
	بدون خسارت	خسارت	۱		بدون خسارت	خسارت	۰
	خسارت	خسارت	۳		خسارت	خسارت	۵
آذر	خسارت	بدون خسارت	۶	دی	خسارت	بدون خسارت	۵
	بدون خسارت	خسارت	۱		بدون خسارت	خسارت	۱
	خسارت	خسارت	۷		خسارت	خسارت	۹
بهمن	خسارت	بدون خسارت	۸	اسفند	خسارت	بدون خسارت	۷
	بدون خسارت	خسارت	۳		بدون خسارت	خسارت	۲

۵ تحلیل داده‌های واقعی

داده‌ها شامل دو متغیر میزان خسارت‌های وارده به اتومبیل بیمه شدگان (X) و میزان جراحات‌های بدنی وارده به سرنشینان اتومبیل (Y) در اثر وقوع تصادف است. داده‌های مورد استفاده مربوط به خسارت‌های

سال ۱۳۸۵ شرکت بیمه آسیا هستند که به صورت ماهیانه گزارش شده‌اند. بنا به گفته بیمه‌گر به علت ریزش‌های جوی بیشتر، پدیده مه‌گرفتگی و لغزندگی جاده‌ها، در ماه‌های پایانی هر سال، ادعاهای خسارت بیشتری به بیمه‌گر واصل می‌شود. با فرض اینکه تعداد ادعاهای خسارت دارای توزیع پواسون باشد، لذا یک مدل پواسون ناهمگن دوره‌ای کوتاه مدت برای توصیف فراوانی ادعاهای خسارت مناسب است. جدول ۱ تعداد مولفه‌های مستقل و وابسته فرآیند پواسون را طی یک سال مورد نظر به تفکیک هر ماه نشان می‌دهد. مقادیر شاخص‌های توصیفی متغیرهای مورد بررسی در جدول ۲ آمده‌اند. ضرایب چولگی دو متغیر حاکی از آن است که داده‌ها دارای توزیع دم سنگین نیستند.

جدول ۲: مقادیر شاخص‌های توصیفی متغیرهای خسارت وارده به اتومبیل و جراحتهای بدنی وارده به سرنشینان آن

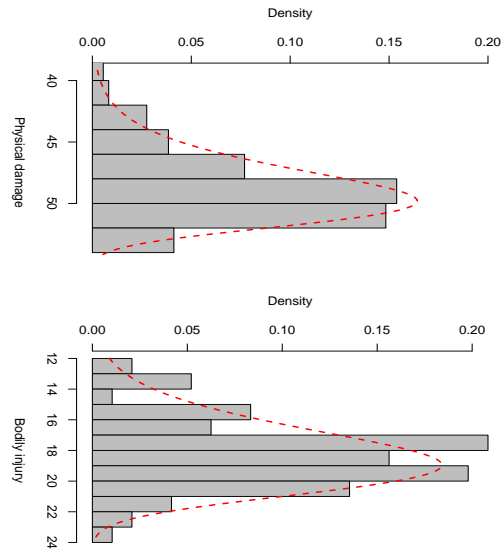
آماره	خسارت وارده به اتومبیل	جراحتهای بدنی وارده به سرنشینان
میانگین	۴۸٫۶۸	۱۸٫۲۱
انحراف معیار	۲٫۸۱	۲٫۲۶
ضریب چولگی	-۰٫۸۹	-۰٫۴۵
کمترین مقدار	۳۹٫۳۸	۱۲٫۸۵
بیشترین مقدار	۵۳٫۹۵	۲۳٫۱۷

تحلیل اکتشافی داده‌ها با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف نشان می‌دهد که مقادیر ادعاهای خسارت متغیرهای خسارت وارده به اتومبیل و جراحتهای بدنی از توزیع وایبل تبعیت می‌کنند. به عبارت دقیق‌تر $D_X = ۰٫۴۰۹۹$ ($P = ۰٫۸۱۹۸$) و $D_Y = ۰٫۵۲۳۵۳$ ($P = ۰٫۸۴۲۶$) فرض توزیع وایبل به ترتیب برای متغیرهای میزان خسارت وارده به اتومبیل و میزان جراحتهای بدنی وارده به سرنشینان را تایید می‌کند. به این ترتیب چگالی برازش داده شده به متغیرهای X و Y عبارتند از:

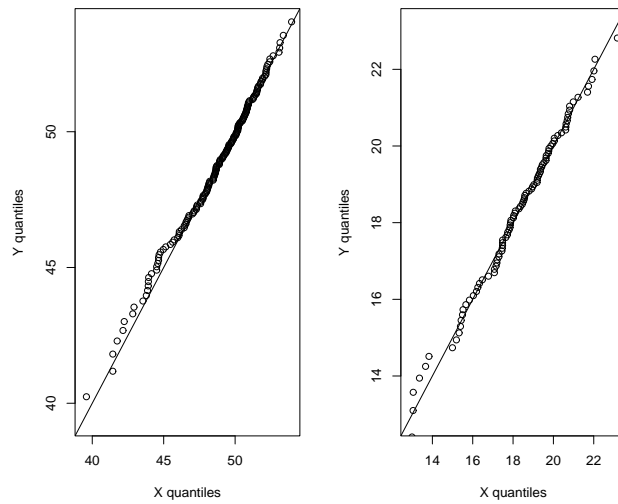
$$f_X(x) = \frac{۲۲٫۲۷}{۴۹٫۹۱} \left(\frac{x}{۴۹٫۹۱}\right)^{۲۱٫۲۷} \exp\left\{-\left(\frac{x}{۴۹٫۹۱}\right)^{۲۲٫۲۷}\right\}; \quad x > ۰$$

$$f_Y(y) = \frac{۹٫۵۴}{۱۹٫۱۷} \left(\frac{y}{۱۹٫۱۷}\right)^{۸٫۵۴} \exp\left\{-\left(\frac{y}{۱۹٫۱۷}\right)^{۹٫۵۴}\right\}; \quad y > ۰$$

شکل ۱ نمودار بافت‌نگار و چگالی برازش داده شده دومتغیر و شکل ۲ نمودار چندک-چندک آنها را نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمودار بافت‌نگار و چگالی برآزش داده شده متغیرهای خسارت وارده به اتومبیل (چپ) و جراحتهای بدنی (راست).



شکل ۲: نمودار چندک-چندک متغیرهای خسارت وارده به اتومبیل (چپ) و جراحتهای بدنی وارده به سرنشینان (راست).

فرض کنید $(S_1(t))_{t \geq 0}$ فرآیند پواسون مرکب ناهمگن برای متغیر X و $(S_2(t))_{t \geq 0}$ فرآیند پواسون مرکب ناهمگن برای متغیر Y باشد. برای توصیف همبستگی بین دو فرآیند مذکور از مفصل لوی C با پارامتر α استفاده می‌شود. به علاوه پارامترهای شکل و مقیاس توزیع وایبل را برای خسارت اول به ترتیب با a_1 و b_1 و برای خسارت دوم به ترتیب با a_2 و b_2 نشان می‌دهیم. به این ترتیب بردار پارامترها یک بردار 7 بعدی است. به منظور برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای (۳) از دو روش ماکسیم درستنمایی کامل و استنباط حاشیه‌ای استفاده نموده و نتایج با هم مقایسه می‌شوند.

۱.۵ برآورد ماکسیم درستنمایی کامل

در این روش با ماکسیم کردن تابع درستنمایی (۱۲)، پارامترها به طور همزمان برآورد می‌شوند. به منظور یافتن بهترین تابع مفصل بین سه مفصل لوی مورد بحث برای مدل‌بندی وابستگی در فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای، مقادیر ماکسیم تابع لگ درستنمایی داده‌ها برای ۳ تابع مفصل مورد نظر در جدول ۳ آورده شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۳، بهترین تابع مفصل برای مدل‌بندی وابستگی بین جهش‌ها مفصل کلایتون لوی و ضعیف‌ترین تابع مفصل، ارشمیدسی نوع ۲ است. نتایج برآورد پارامترها با استفاده از مفصل کلایتون لوی در جدول ۴ آمده‌اند. خطای استاندارد برآوردها (اعداد داخل پرانتز) با استفاده از ریشه دوم درایه های قطر اصلی وارون ماتریس هسین محاسبه شده‌اند.

جدول ۳: مقادیر ماکسیم تابع لگ درستنمایی پارامترها به روش ماکسیم درستنمایی کامل

ماه	تابع مفصل	
	کلایتون لوی	ارشمیدسی نوع ۱
فروردین	-۲۹,۷۳۵	-۳۳,۰۰۶
اردیبهشت	-۳۳,۰۹۲	-۳۸,۰۹۰
خرداد	-۲۲,۲۱۳	-۲۸,۵۴۳
تیر	-۱۲,۵۴۰	-۱۸,۳۷۶
مرداد	۰,۸۲۴	-۶,۰۶۵
شهریور	۱۷,۰۹۹	۹,۹۴۹
مهر	۳۲,۹۷۴	۲۵,۲۵۴
آبان	۴۰,۳۳۲	۳۲,۵۸۸
آذر	۵۶,۴۵۰	۴۸,۱۸۵
دی	۷۱,۲۶۸	۶۲,۹۳۸
بهمن	۹۶,۰۷۱	۸۴,۴۰۶
اسفند	۱۱۱,۴۸۷	۱۰۲,۱۳۱

جدول ۴: برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای به روش ماکسیمم درست‌نمایی کامل برای هر ماه و خطای استاندارد مربوط به آنها (اعداد داخل پرانتز).

پارامترها	α	$\Lambda_1(T)$	$\Lambda_2(T)$	a_1	b_1	a_2	b_2
فروردین	۲۹۴۸ (۰/۹۹۸)	۲۱/۶۲۷ (۴/۶۲۸)	۱۰/۳۴۲ (۳/۱۷۴)	۲۲/۳۷۷ (۳/۲۳۷)	۴۹/۷۲۱ (۰/۵۰۶)	۹۸/۲۴ (۱/۷۵۶)	۱۹/۲۲۱ (۰/۶۰۸)
اردیبهشت	۲۷۳۸ (۰/۶۹۸)	۳۶/۱۳۵ (۵/۹۷۲)	۱۷/۵۷۶ (۴/۱۵۳)	۲۳/۱۸۵ (۲/۷۰۵)	۴۹/۹۴۵ (۰/۳۷۹)	۱۰/۲۲۴ (۱/۵۲۶)	۱۹/۳۹۲ (۰/۴۵۱)
خرداد	۲۷۰۲ (۰/۵۵۱)	۶۱/۹۸۰ (۷/۸۳۹)	۲۷/۲۱۸ (۵/۱۱۷)	۲۱/۸۹۴ (۱/۹۵۷)	۴۹/۹۰۴ (۰/۳۰۴)	۱۰/۶۳۰ (۱/۳۲۱)	۱۹/۸۰۰ (۰/۳۵۳)
تیر	۲۷۰۷ (۰/۴۶۸)	۸۲/۱۹۷ (۹/۰۲۵)	۳۹/۳۲۸ (۶/۱۱۳)	۲۱/۸۸۰ (۱/۶۳۰)	۴۹/۹۷۳ (۰/۲۶۲)	۱۰/۳۵۰ (۱/۰۴۰)	۱۹/۶۱۰ (۰/۳۰۰)
مرداد	۲۳۵۸ (۰/۳۷۳)	۹۶/۹۹۴ (۹/۷۸۳)	۴۶/۰۳۸ (۶/۶۲۵)	۲۱/۳۸۶ (۱/۴۵۶)	۴۹/۹۱۴ (۰/۲۴۷)	۱۰/۵۴۸ (۰/۹۷۲)	۱۹/۵۲۹ (۰/۲۷۱)
شهریور	۲/۰۴۹ (۰/۲۹۰)	۱۱۵/۴۰۶ (۱۰/۶۶۳)	۵۶/۹۸۹ (۷/۴۱۹)	۲۲/۰۴۴ (۱/۳۸۳)	۴۹/۹۲۰ (۰/۲۲۰)	۹/۶۵۸ (۰/۷۸۰)	۱۹/۴۲۵ (۰/۲۶۶)
مهر	۱/۹۹۳ (۰/۲۶۹)	۱۲۷/۶۱۱ (۱۱/۲۳۲)	۶۲/۳۹۶ (۷/۷۷۶)	۲۲/۲۳۳ (۱/۳۳۵)	۴۹/۸۹۷ (۰/۲۰۸)	۹/۵۲۱ (۰/۷۳۸)	۱۹/۳۸۶ (۰/۲۵۷)
آبان	۱/۹۸۹ (۰/۲۶۱)	۱۳۴/۲۹۸ (۱۱/۵۰۰)	۶۵/۴۱۹ (۷/۹۵۱)	۲۱/۹۹۰ (۱/۲۹۰)	۴۹/۸۶۰ (۰/۲۰۴)	۹/۵۲۸ (۰/۷۱۸)	۱۹/۳۵۲ (۰/۲۵۱)
آذر	۱/۹۶۸ (۰/۲۵۲)	۱۴۳/۴۸۰ (۱۱/۸۷۲)	۶۹/۰۴۹ (۸/۱۵۲)	۲۲/۰۲۴ (۱/۲۵۲)	۴۹/۸۴۲ (۰/۱۹۷)	۹/۸۰۸ (۰/۷۲۲)	۱۹/۳۹۷ (۰/۲۳۷)
دی	۱/۹۳۶ (۰/۲۳۷)	۱۵۳/۵۷۲ (۱۲/۲۶۸)	۷۴/۶۸۴ (۸/۴۷۹)	۲۲/۵۱۸ (۱/۲۴۰)	۴۹/۸۸۰ (۰/۱۸۶)	۹/۷۸۴ (۰/۶۹۶)	۱۹/۳۵۰ (۰/۲۲۷)
بهمن	۱/۹۰۶ (۰/۲۲۰)	۱۶۹/۹۴۵ (۱۲/۹۴۰)	۸۵/۸۰۳ (۹/۱۶۰)	۲۲/۷۲۹ (۱/۱۸۹)	۴۹/۸۶۳ (۰/۱۷۶)	۹/۷۷۴ (۰/۶۵۵)	۱۹/۲۶۵ (۰/۲۱۳)
اسفند	۱/۸۴۹ (۰/۲۰۱)	۱۸۵/۸۸۸ (۱۳/۵۰۳)	۹۵/۹۴۸ (۹/۶۳۴)	۲۲/۹۷۰ (۱/۱۵۲)	۴۹/۸۸۰ (۰/۱۶۶)	۹/۲۷۲ (۰/۶۰۰)	۱۹/۱۰۹ (۰/۲۰۹)

۲.۵ برآورد به شیوه استنباط حاشیه‌ای

در روش برآورد استنباط حاشیه‌ای برآورد پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای فرآیند پواسون مرکب ناهمگن با ماکسیمم کردن رابطه (۱۲) نسبت به پارامترهای آن بدست می‌آید. سپس با جایگزین کردن آنها به جای پارامترهای مربوطه در رابطه (۱۲)، پارامتر تابع مفصل برآورد می‌شود. جدول ۵ ماکسیمم تابع لگ درست‌نمایی برای سه مفصل مورد بحث در مقاله را و برای تمام ماههای سال با روش استنباط حاشیه‌ای نشان می‌دهد.

جدول ۵: مقادیر ماکسیمم تابع لگ درستنمایی پارامترها به روش استنباط حاشیه‌ای

ماه	تابع مفصل	
	ارشمیدسی نوع ۱	ارشمیدسی نوع ۲
فروردین	-۳۳۹۱۹	-۳۶۵۱۸
اردیبهشت	-۳۹۳۵۶	-۴۵۰۱۸
خرداد	-۲۹۸۸۵	-۳۹۱۴۶
تیر	-۱۹۷۶۰	-۳۶۷۳۲
مرداد	۰/۳۸۳	-۳۲/۴۳۸
شهریور	۱۶۳۱۲	-۳۸/۷۷۸
مهر	۳۲/۱۱۴	-۳۵/۰۴۲
آبان	۳۹/۳۳۱	-۳۲/۵۵۰
آذر	۵۵/۳۵۷	-۲۳/۵۴۴
دی	۷۰/۲۶۸	-۱۸/۰۴۰
بهمن	۹۴/۹۸۰	-۱۲/۲۲۹
اسفند	۱۱۰/۸۸۷	-۱۵/۱۰۶

همانند روش ماکسیمم درستنمایی کامل، مفصل کلایتون لوی، بهترین تابع مفصل و مفصل ارشمیدسی نوع ۲ ضعیف‌ترین تابع مفصل برای مدل‌بندی وابستگی در فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای است. نتایج برآورد پارامترها به روش استنباط حاشیه‌ای با خطای استاندارد آنها (اعداد داخل پرانتز) در جدول ۶ آمده است.

بررسی دو جدول ۴ و ۶ نشان می‌دهد که با افزایش طول بازه زمانی مورد نظر (افزایش ماههای مورد بررسی)، دقت برآورد پارامتر تابع مفصل افزایش پیدا می‌کند. همچنین خطای استاندارد برآورد پارامتر تابع مفصل برای هر ماه در روش استنباط حاشیه‌ای کمتر از روش ماکسیمم درستنمایی است. بنابراین نتیجه می‌شود روش استنباط حاشیه‌ای دقت بالاتری دارد.

۳.۵ آزمون نیکویی برازش

به منظور ارزیابی نیکویی برازش وابستگی بین حاشیه‌ها با استفاده از مفصل کلایتون لوی در فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای کافی است انتگرال دمی نظری و تجربی داده‌ها را با هم مقایسه نمود. این مقایسه به تفکیک برای مولفه‌های مستقل و وابسته مدل انجام می‌شود. در بازه زمانی $(0, T]$ ، انتگرال دمی

جدول ۶: برآورد پارامترهای فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن به روش استنباط حاشیه‌ای برای هر ماه و خطای استاندارد مربوط به آنها (اعداد داخل پرانتز)

پارامترها	α	$\Lambda_1(T)$	$\Lambda_2(T)$	a_1	b_1	a_2	b_2
فروردین	۲,۹۶۴ (۰,۷۳۵)	۲۱ (۴,۵۸۲)	۱۰ (۳,۱۶۲)	۱۹,۸۷۵ (۳,۴۴۷)	۴۹,۶۷۳ (۰,۵۷۴)	۱۰,۴۵۲ (۲,۵۲۲)	۱۹,۴۸۰ (۰,۶۲۴)
اردیبهشت	۲,۵۵۹ (۰,۴۶۴)	۳۵ (۵,۹۱۶)	۱۸ (۴,۲۴۳)	۲۰,۶۸۳ (۲,۸۷۰)	۴۹,۹۳۰ (۰,۴۲۸)	۱۱,۵۳۹ (۲,۱۲۲)	۱۹,۵۲۷ (۰,۴۲۲)
خرداد	۲,۶۶۶ (۰,۳۹۰)	۶۱ (۷,۸۱۰)	۲۸ (۵,۲۹۲)	۲۰,۷۳۴ (۲,۱۵۴)	۴۹,۸۸۱ (۰,۳۲۴)	۱۱,۶۰۸ (۱,۷۴۶)	۱۹,۸۷۴ (۰,۳۴۲)
تیر	۲,۶۶۸ (۰,۳۲۴)	۸۱ (۹,۰۰۰)	۴۱ (۶,۴۰۳)	۲۱,۹۲۶ (۱,۹۳۵)	۵۰,۰۰۷ (۰,۲۶۶)	۱۰,۵۴۴ (۱,۲۸۰)	۱۹,۵۴۵ (۰,۳۰۶)
مرداد	۲,۳۷۶ (۰,۲۷۱)	۹۵ (۹,۷۴۷)	۴۷ (۶,۸۵۶)	۲۱,۱۰۵ (۱,۷۲۲)	۴۹,۹۵۷ (۰,۲۵۵)	۱۰,۹۴۵ (۱,۲۳۸)	۱۹,۵۴۶ (۰,۲۷۵)
شهریور	۲,۰۹۱ (۰,۲۲۰)	۱۱۳ (۱۰,۶۳۰)	۵۷ (۷,۵۵۰)	۲۱,۳۳۴ (۱,۵۸۸)	۴۹,۹۴۶ (۰,۲۳۲)	۱۰,۳۰۰ (۱,۰۲۷)	۱۹,۵۳۲ (۰,۲۶۶)
مهر	۲,۰۳۸ (۰,۲۰۵)	۱۲۵ (۱۱,۱۸۰)	۶۲ (۷,۸۷۴)	۲۱,۳۸۹ (۱,۵۱۶)	۴۹,۹۲۳ (۰,۲۱۹)	۱۰,۰۹۶ (۰,۹۶۹)	۱۹,۴۹۷ (۰,۲۶۰)
آبان	۲,۰۲۶ (۰,۱۹۸)	۱۳۲ (۱۱,۴۸۹)	۶۵ (۸,۰۶۲)	۲۱,۱۳۴ (۱,۴۵۸)	۴۹,۸۷۴ (۰,۲۱۶)	۱۰,۱۹۰ (۰,۹۵۲)	۱۹,۴۷۱ (۰,۲۵۱)
آذر	۱,۹۹۸ (۰,۱۹۰)	۱۴۱ (۱۱,۸۷۴)	۶۹ (۸,۳۰۷)	۲۱,۱۵۱ (۱,۴۱۳)	۴۹,۸۵۴ (۰,۲۰۹)	۱۰,۴۹۰ (۰,۹۵۲)	۱۹,۵۱۱ (۰,۲۳۷)
دی	۱,۹۶۸ (۰,۱۷۹)	۱۵۱ (۱۲,۲۸۸)	۷۵ (۸,۶۶۰)	۲۱,۷۳۶ (۱,۴۰۳)	۴۹,۸۹۸ (۰,۱۹۶)	۱۰,۴۱۷ (۰,۹۱۰)	۱۹,۴۴۶ (۰,۲۲۸)
بهمن	۱,۹۳۶ (۰,۱۶۷)	۱۶۶ (۱۲,۸۸۴)	۸۵ (۹,۲۲۰)	۲۱,۸۱۸ (۱,۳۴۶)	۴۹,۸۷۶ (۰,۱۸۶)	۱۰,۳۲۷ (۰,۸۵۱)	۱۹,۳۶۴ (۰,۲۱۵)
اسفند	۱,۸۹۴ (۰,۱۵۴)	۱۸۲ (۱۳,۴۹۱)	۹۶ (۹,۷۹۸)	۲۲,۲۶۸ (۱,۳۰۹)	۴۹,۹۰۹ (۰,۱۷۵)	۹,۵۳۹ (۰,۷۵۳)	۱۹,۱۷۲ (۰,۲۱۶)

تجربی مولفه‌های مستقل به صورت

$$\bar{\Pi}_{iT}^{\perp}(x) = \frac{\text{تعداد جهش‌های مولفه مستقل } i \text{ که بزرگتر از } x \text{ هستند}}{T},$$

و انتگرال دمی تجربی مولفه‌های وابسته نیز به صورت

$$\bar{\Pi}_{iT}^{\parallel}(x) = \frac{\text{تعداد جهش‌های وابسته در مولفه } i \text{ که بزرگتر از } x \text{ هستند}}{T}$$

تعریف می‌شوند. انتگرال دمی نظری مولفه وابسته اول، مولفه وابسته دوم و مولفه‌های مستقل در بازه

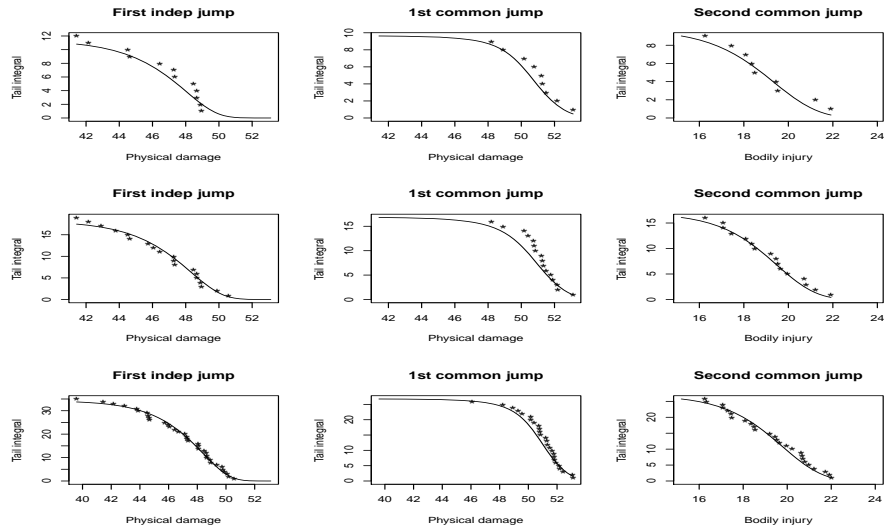
زمانی $[0, T]$ مطابق تعاریف و مفاهیم بخش ۳ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_{\vee T}^{\parallel}(x) &= \mathcal{C}(\Lambda_{\vee}(T), \bar{F}_{\vee}(x), \Lambda_{\vee}(T); \alpha), \\ \bar{\Pi}_{\wedge T}^{\parallel}(x) &= \mathcal{C}(\Lambda_{\wedge}(T), \Lambda_{\wedge}(T), \bar{F}_{\wedge}(x); \alpha), \\ \bar{\Pi}_{iT}^{\perp}(x) &= \Lambda_i(T) \bar{F}_i(x) - \bar{\Pi}_{iT}^{\parallel}(x) \quad ; \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

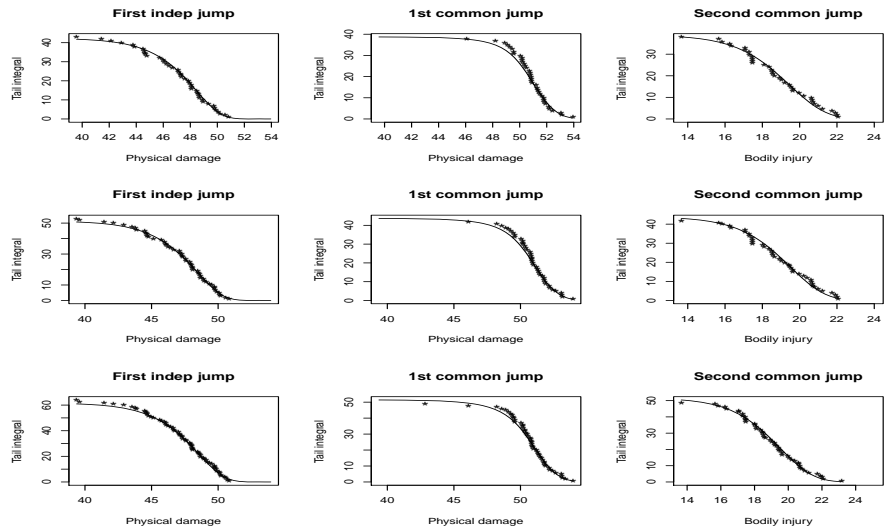
شکل‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ نمودار انتگرال‌های دمی نظری برآورد شده را به همراه انتگرال‌های دمی تجربی برای هر ماه نشان می‌دهند. انتگرال‌های دمی تجربی با علامت * نشان داده شده‌اند. در تمامی این شکل‌ها، شکل اول از سمت چپ مربوط به مولفه مستقل اول، شکل دوم مربوط به مولفه وابسته اول و شکل سوم مربوط به مولفه وابسته دوم است. به گفته بیمه‌گر معمولاً تعداد ادعاهای خسارت تنها مربوط به جراحات‌های بدنی وارده به سرنشینان (مولفه مستقل دوم) به ندرت صورت می‌گیرد و به همین جهت تعداد مشاهدات مربوط به مولفه مستقل دوم کم است. لذا از رسم نمودارهای فوق برای این مولفه صرف‌نظر شده است. مشاهده می‌شود که انتگرال‌های دمی تجربی به نظری خیلی نزدیک هستند و بنابراین مدل (۳) گزینه مناسبی برای توصیف داده‌های واقعی است.

بحث و نتیجه‌گیری

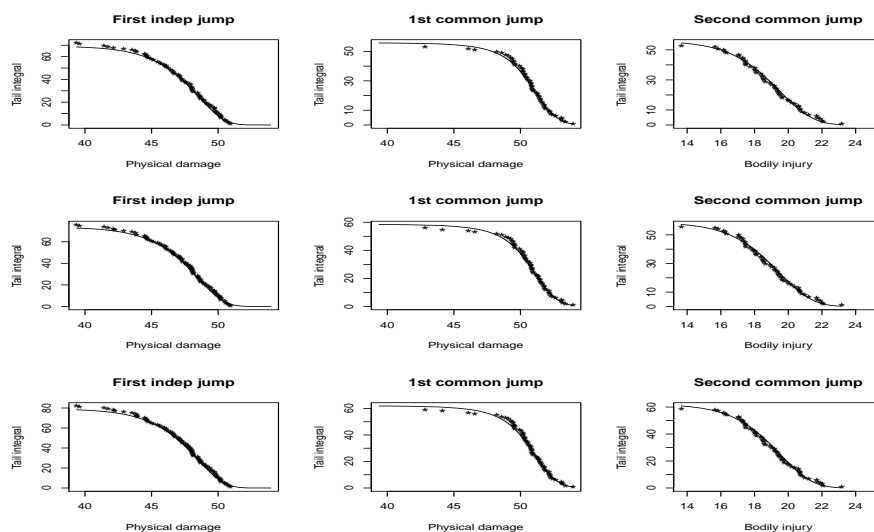
در این مقاله نوعی فرآیند پواسون مرکب دومتغیره ناهمگن معرفی شد، که تعداد جهش‌های آن از فرآیند پواسون با تابع شدت دوره‌ای کوتاه مدت تبعیت می‌کند. همبستگی بین جهش‌های این فرآیند ناهمگن با استفاده از مفصل لوی مدل‌بندی شده است. برای برآورد پارامترهای مدل یک روش پارامتری موسوم به استنباط حاشیه‌ای را معرفی نمودیم که سریع‌تر از روش ماکسیمم درست‌نمایی است. به عنوان کاربردی از مدل پیشنهادی در صنعت، این مدل روی داده‌های بیمه اتومبیل با دو متغیر خسارت‌های وارده به اتومبیل بیمه شدگان و میزان جراحات‌های بدنی وارده به سرنشینان اتومبیل در اثر تصادف، با دو روش ماکسیمم درست‌نمایی کامل و استنباط حاشیه‌ای برازش داده شد. مقایسه نتایج عددی دو روش برآورد نشان داد که دقت روش استنباط حاشیه‌ای برای برآورد پارامترها بیشتر است. همچنین آزمون نیکویی برازش حاصل از مقایسه انتگرال‌های دمی تجربی و نظری برآورد شده مشخص کرد که فرآیند پواسون مرکب دومتغیره دوره‌ای کوتاه مدت با همبستگی مدل‌بندی شده توسط مفصل کلایتون لوی به خوبی داده‌ها را توصیف می‌کند.



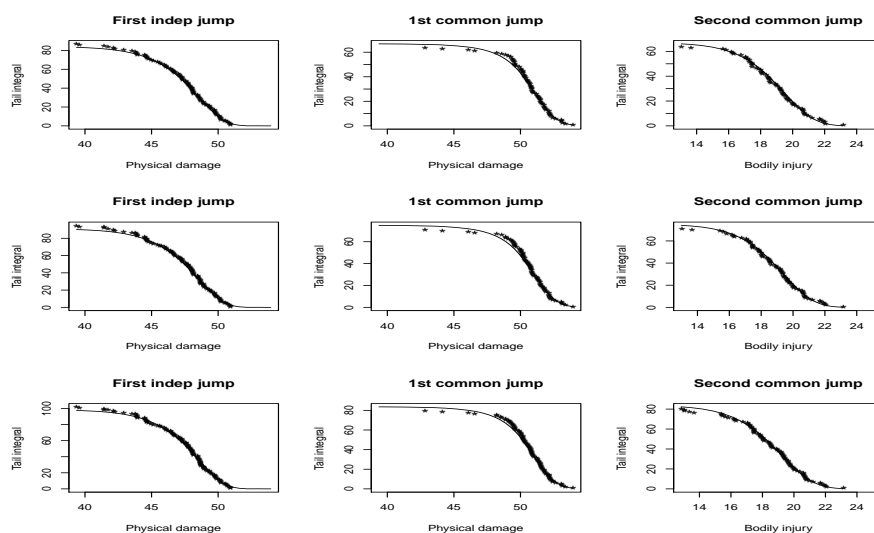
شکل ۳: انتگرال دمی نظری و تجربی متغیرهای X و Y برای ماه‌های فروردین (بالا)، اردیبهشت (وسط) و خرداد (پائین)



شکل ۴: انتگرال دمی نظری و تجربی متغیرهای X و Y برای ماه‌های تیر (بالا)، مرداد (وسط) و شهریورماه (پائین)



شکل ۵: انتگرال دمی نظری و تجربی متغیرهای X و Y برای ماه‌های مهر (بالا)، آبان (وسط) و آذر (پائین)



شکل ۶: انتگرال دمی نظری و تجربی متغیرهای X و Y برای ماه‌های دی (بالا)، بهمن (وسط) و اسفند (پائین)

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله ضمن تشکر از سردبیر محترم مجله از پیشنهادهای و نظرات ارزشمند داوران و ویراستار محترم مقاله که موجب ارتقاء سطح آن گردید کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- Asmussen, S. and Rolski, T. (1994), Computational Method in Risk Theory: a Matrix-Algorithmic Approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, **10**, 259-274.
- Avanzi, B., Cassar, L. C. and Wong, B. (2011), Modelling Dependence in Insurance Claims Processes with Lévy Copulas., *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **41**, 575-609.
- Bocker, K., and Kluppelberg, C. (2008), Modelling and Measuring Multivariate Operational Risk with Lévy Copulas., *The Journal of Operational Risk*, **3**, 3-27.
- Bocker, K., and Kluppelberg, C. (2009), First Order Approximations to Operational Risk-Dependence and Consequences., *Operational Risk Toward Basel III, Best Practices and Issues in Modeling, Management and Regulation*, Wiley, New York, 219-245.
- Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Dimitrov, B., Green Jr, D., and Chukova, S. (1997), Probability Distributions in Periodic Random Environment and Their Applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 501-517.
- Esmaeili, H., and Kluppelberg, C. (2010), Parameter Estimation of a Bivariate Compound Poisson Process. *Insurance: Mathematics and Economics*, **47**, 224-233.
- Garrido, J., and Lu, Y. (2002), On Double Periodic Non-homogeneous Poisson Processes, *Universidad Carlos III, Departamento de Economía de la Empresa, Business Economics Working Papers*, **2**.
- Joe, H. and Xu, J. J. (1996), The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. *Technical Report 166*, UBC, Department of Statistics.

- Kallsen, J., and Tankov, P. (2006), Characterization of Dependence of Multidimensional Lévy Processes Using Lévy Copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, **97**, 1551-1572.
- Lu, Y., and Garrido, J. (2005), Doubly Periodic Non-homogeneous Poisson Models for Hurricane Data. *Statistical Methodology*, **2**, 17-35.
- Özel, G. (2011a), On Certain Properties of a Class of Bivariate Compound Poisson Distributions and an Application to Earthquake Data. *Revista Colombiana de Estadística*, **34**, 545-566.
- Özel, G. (2011b), A New Method for Evaluation of Bivariate Compound Poisson Distribution for Aggregate Claims. *Gazi University Journal of Science*, **24**, 241-248.
- Özel, G. (2013), On the Moment Characteristics for the Univariate Compound Poisson and Bivariate Compound Poisson Processes with Applications. *Revista Colombiana de Estadística*, **36**, 59-77.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York.
- Velsen, J. L. (2012), Parameter Estimation of a Lévy Copula of a Discretely Observed Bivariate Compound Poisson Process with an Application to Operational Risk Modelling. <https://arxiv.org/abs/1212.0092>.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2019
Vol. 13, No. 2, pp 461-482
DOI: 10.29252/jss.13.2.461

Estimating the Parameters of Periodic Bivariate Compound Poisson Process by Inference for Margins Method

A. Sakhaei, and P. Nasiri

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran, P.O.Box
۱۹۳۹۵-۴۶۹۷.

Abstract: The non-homogeneous bivariate compound Poisson process with short term periodic intensity function is used for modeling the events with seasonal patterns or periodic trends. In this paper, this process is carefully introduced. In order to characterize the dependence structure between jumps, the Lévy copula function is provided. For estimating the parameters of the model, the inference for margins method is used. As an application, this model is fitted to an automobile insurance dataset with inference for margins method and its accuracy is compared with the full maximum likelihood method. By using the goodness of fit test, it is confirmed that this model is appropriate for describing the data.

Keywords: Inference for margins method, Lévy process, Lévy copula, Non homogeneous Poisson Process, Short-term periodic.

Mathematics Subject Classification (2010): 62H12, 60J75, 62P05