

برآورد آنتروپی با روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف و کاربرد آن در آزمون نرمال بودن

عاطفه پورکاظمی، هادی علیزاده نوقابی، سارا جمهوری

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۶/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۵/۲۱

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی دو روش بوت‌استرپ و جک‌نایف پرداخته و آنتروپی به کمک این روش‌ها برآورد شده‌اند. سپس برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف به کمک شبیه‌سازی از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی در سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف با برآوردگرهای معروف دیگر به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه شده‌اند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگرهای جک‌نایف و بوت‌استرپ عملکرد نسبتاً خوبی نسبت به سایر برآوردگرهای آنتروپی دارند. سپس تعدادی آزمون نرمال بودن براساس برآوردگرهای پیشنهادی معرفی و توان آن‌ها با توان سایر آزمون‌ها مقایسه شده‌اند. **واژه‌های کلیدی:** آزمون نرمال بودن، آنتروپی، بوت‌استرپ، توان آزمون، جک‌نایف.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x)$ با تابع چگالی مطلقاً پیوسته $f(x)$ باشد. شانون (۱۹۴۸) آنتروپی این متغیر تصادفی را به صورت

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log(f(x)) dx, \quad (1)$$

تعریف کرد.

با توجه به کاربردهای فراوان مفهوم آنتروپی در مباحث آماری، مساله برآورد آنتروپی بر مبنای نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n توسط محققین زیادی از جمله واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردگرها، برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) به واسطه سادگی در محاسبات بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ آماره‌های مرتب نظیر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از توزیع F باشند، در این صورت برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) به صورت

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{\sqrt{m}}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right), \quad (2)$$

است، که در آن m یک عدد کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است. ضمناً، به ازای $1 < i$ ، $X_{(i)} = X_{(1)}$ و به ازای $i > n$ ، $X_{(i)} = X_{(n)}$. ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) برآوردگر

$$HVE_{mn} = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (\log(X_{(i+m)} - X_{(i)})) + \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \quad (3)$$

را برای آنتروپی معرفی نمود. وی نشان داد برآوردگر (۳) سازگار است و تحت برخی شرایط

$$n^{1/2}(HVE_{mn} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx) \xrightarrow{D} N(0, \text{var}(\log(f(X_1)))). \quad (4)$$

ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برآوردگر خود را بر مبنای اصلاح ضرایب برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) در نقاط انتهایی c_i ‌ها وقتی که $i \leq m$ و $i \geq n - m + 1$ ، با تعریف

$$c_i = \begin{cases} m+i-1 & 1 \leq i \leq m \\ \sqrt{m} & m+1 \leq i \leq n-m \\ m+n-1 & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

به صورت

$$HE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{c_i} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right) \quad (5)$$

معرفی کردند، که برای $i < 1$ ، $X_{(i)} = X_{(1)}$ و به ازای $i > n$ ، $X_{(i)} = X_{(n)}$.

مطالعات شبیه‌سازی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) نشان می‌دهد که برآوردگر پیشنهادی آن‌ها اریبی و توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. کوریا (۱۹۹۵) برآوردگر دیگری برای آنتروپی پیشنهاد داد که میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. این برآوردگر به صورت

$$HC_{mn} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(b_i) \quad (6)$$

است، که در آن

$$b_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)}) \left(\frac{j-i}{n}\right)}{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})^2}$$

و

$$\bar{X}_{(i)} = \sum_{j=i-m}^{i+m} \frac{X_{(j)}}{2m+1}.$$

ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برآوردگر آنتروپی

$$HW_{mn} = HV_{mn} - \log(n) + \log(2m) + c, \quad (7)$$

را پیشنهاد کردند، که در آن

$$c = -\left(1 - \frac{2m}{n}\right) \Psi(2m) + \Psi(n+1) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m \Psi(i+m-1), \quad (8)$$

و $\Psi(x)$ تابع دی گاما است که به صورت $\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ تعریف و در حالت کلی به صورت $\Psi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i}\right) - \gamma$ محاسبه می‌شود که در آن $\gamma = 0.57721566490\dots$ نویسنده‌گان قبلی بعد از معرفی برآوردگرشان آن را با برخی از برآوردگرها مقایسه و عملکرد برآوردگر پیشنهادی‌شان را بررسی کردند. در این مقاله برآوردگرهایی به کمک روش‌های باز نمونه‌گیری معرفی و سپس به مقایسه آن‌ها پرداخته می‌شود. یک مطالعه کلی بین برآوردگرها و مقایسه‌ای جامع از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برای حجم نمونه‌های مختلف انجام و همچنین رفتار و عملکرد تمامی برآوردگرها برای داده‌های واقعی بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی در مسائل آماری کاربرد فراوان دارند. برای مثال در مبحث آزمون‌های نیکویی برازش از برآوردگرهای آنتروپی استفاده می‌کنند و آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی می‌سازند. حبیبی‌راد و ارقامی (۱۳۸۶) براساس برآوردگر آنتروپی و واسیچک آزمون برای تقارن یک توزیع معرفی و سپس توان آزمون خود را با سایر آزمون‌های تقارن مقایسه و نتیجه گرفتند که آزمون براساس آنتروپی از توان خوبی نسبت به سایر آزمون‌های موجود برخوردار است. علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷) آزمون‌های نرمال بودن و نمایی بودن براساس آنتروپی را در نظر گرفتند، و به کمک شبیه‌سازی نشان دادند که برای برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان خوبی برخوردارند. علیزاده و همکاران (۱۳۸۷) به بررسی برآوردگرهای مختلف آنتروپی پرداختند و سپس این برآوردگرها را برای آزمون نمایی بودن بکار بردند. آن‌ها از مقایسه توان این آزمون‌ها با توان سایر آزمون‌ها نتیجه گرفتند که آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان بالایی برخوردارند. زمان‌زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و زمان‌زاده (۱۳۹۲) ابتدا برآوردگرهای اصلاح شده‌ای برای آنتروپی معرفی کردند و سپس براساس این برآوردگرها آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال و نمایی ساختند و نتیجه گرفتند که آزمون‌های جدید در مقابل برخی فرضیه‌های جانشین، از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های قبلی برخوردار هستند. عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) و عباس‌نژاد و محمدی (۱۳۸۹) براساس برآوردی از اطلاع رنی به ترتیب آزمون‌هایی برای توزیع نمایی و تقارن یک توزیع ساختند و سپس به مقایسه توان آزمون‌های ساخته شده با سایر آزمون‌های قبلی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که آزمون‌های مبتنی بر اطلاع رنی از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی برخوردار هستند. بعلاوه محققانی همچون یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸)، علیزاده و ارقامی (۲۰۱۱)، حبیبی‌راد و همکاران (۲۰۱۱)، زمان‌زاده و ارقامی (۲۰۱۱)، بالاکریشنان و حبیبی‌راد (۲۰۰۷)، چو و کیم (۲۰۰۶)، استبان و همکاران (۲۰۰۱)، لیم و پارک (۲۰۰۷)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲)، پارک (۲۰۰۵)، ردرايگز (۲۰۰۹)، برات‌پور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲) آزمون‌هایی بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معرفی کردند. لذا برآوردگرهای آنتروپی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند که در اینجا به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

۲ روش‌های باز نمونه‌گیری

بوت‌استرپ و جک‌نایف دو روش باز نمونه‌گیری هستند که به طور مختصر به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود. تکنیک‌های به کار گرفته شده در این تعاریف به تحقیقات بردلی و گیل (۱۹۸۳) برمی‌گردد.

بوت‌استرپ به روش‌های مونت‌کارلو اطلاق می‌شود که نمونه تصادفی اولیه را به عنوان چارچوب جامعه در نظر می‌گیرد و سپس نمونه‌های مونت‌کارلو را از خود نمونه اولیه با جایگذاری انتخاب می‌کند. در این روش هیچ فرض پارامتری در مورد جامعه‌ای که نمونه مورد نظر از آن تولید شده وجود ندارد. برای این کار یک توزیع یکنواخت گسسته روی نمونه تصادفی در دسترس در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به هر واحد در نمونه تصادفی، احتمال $1/n$ تخصیص داده می‌شود. حال از نمونه اولیه $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نمونه تصادفی با جایگذاری $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ انتخاب می‌شود. در نمونه با جایگذاری انتخاب شده، ممکن است بعضی از x_i ها بیش از یک بار مشاهده شوند و بعضی نیز اصلاً مشاهده نشوند. حال فرض کنید B بار این کار تکرار شود و نمونه‌های $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$ ساخته شوند. نمونه x^{*i} را یک نمونه بوت‌استرپ از x نامند. در بسیاری از مسائل آماری هدف یافتن برآوردی از پارامتر مجهول θ با استفاده از یک آماره و نمونه تصادفی x به صورت $\hat{\theta} = T(x)$ است. در مواردی که برآورد پیچیده و مشکل است، روش بوت‌استرپ می‌تواند برای برآورد پارامتر θ و حتی برآورد انحراف استاندارد و اریبی برآوردگر به کار گرفته شود. فرض کنید

$$\hat{\theta}^{*i} = T(x^{*i}), \quad i = 1, \dots, B.$$

در این صورت، $\hat{\theta}^{*i}$ ها را تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ می‌نامند. با استفاده از این تکرارهای بوت‌استرپ می‌توان یک توزیع تجربی از آماره $\hat{\theta} = T$ را بدست آورد. برای برآورد خطای استاندارد در روش بوت‌استرپ ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندارد $\hat{\theta}$ ، با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}^{*i} - \bar{\theta}^*)^2},$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}^{*i}.$$

بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که در برآورد خطای استاندارد مقادیر B بهتر است بین ۵۰ تا ۲۰۰ باشد. برای محاسبه میزان اریبی یک برآوردگر، بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ برآورد میزان اریبی را می‌توان به صورت

$$\widehat{bias}(\theta) = \bar{\theta}^* - \hat{\theta} \quad (۹)$$

محاسبه نمود، که در آن $\bar{\theta}^*$ متوسط تکرارهای بوت‌استرپ و $\hat{\theta}$ مقدار بدست آمده برآوردگر از روی نمونه تصادفی اولیه است. بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ در برآورد میزان اریبی می‌بایست بیشتر از تعداد نمونه‌ها در برآورد خطای استاندارد باشد. همچنین می‌توان میزان اریبی بدست آمده را از مقدار برآوردگر کم کرد (اریبی را تصحیح کرد) و به برآوردگر جدیدی با اریبی کمتر به شکل

$$\hat{\theta}_{boot} = \hat{\theta} - \widehat{bias}(\theta) = 2\hat{\theta} - \bar{\theta}^*,$$

رسید. البته ممکن است برآوردگر جدید $\hat{\theta}_{boot}$ نسبت به برآوردگر اولیه $\hat{\theta}$ دارای واریانس بیشتری باشد. لذا پیشنهاد می‌شود که انحراف استاندارد و اریبی هر دو با روش بوت‌استرپ برآورد شوند و اگر مقدار میزان اریبی نسبت به خطای استاندارد زیادتر بود، سپس اقدام به تصحیح اریبی کرد. در بسیاری از زمینه‌های آماری هدف ساختن یک مدل مناسب برای بیان ارتباط بین چند متغیر است. ولی متأسفانه در بسیاری از اوقات محققان بی‌تجربه مدلی بر اساس داده‌های یک مجموعه می‌سازند و مجدداً از داده‌های همان مجموعه استفاده می‌کنند تا اعتبار مدلشان را برآورد کنند. مشکل این کار این است که مدلی که بر پایه یک مجموعه از داده‌ها ساخته می‌شود معمولاً نسبت به آن مجموعه کمترین خطای ممکن را دارد.

هدف روش جک‌نایف همانند روش بوت‌استرپ، برآورد میزان اریبی و خطای استاندارد یک برآوردگر است. در این روش نیز هیچ فرض پارامتری در مورد توزیع جامعه وجود ندارد. فرض کنید هدف برآورد پارامتر θ و $\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n)$ برآوردگر پارامتر باشد. در روش جک‌نایف یکی از داده‌های x_i از نمونه اصلی خارج و نمونه جک‌نایف به صورت $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ حاصل می‌شود. مقدار برآوردگر T با استفاده از $i-1$ -امین نمونه جک‌نایف به صورت $\hat{\theta}_{-i} = T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

و i -امین تکرار جک‌نایف نامیده می‌شود. با تکرار این کار تا اینکه تمامی داده‌های نمونه یکبار از نمونه خارج شوند، دنباله‌ای از n تکرار جک‌نایف بدست خواهد آمد. برآورد اریبی آماره T با روش جک‌نایف به صورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = (n - 1)(\bar{\theta}_\circ - \hat{\theta}), \quad (10)$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$\bar{\theta}_\circ = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \hat{\theta}_{-i}.$$

همچنین خطای استاندارد برآورد شده با روش جک‌نایف به صورت

$$\widehat{SE}_{Jack}(\hat{\theta}) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=0}^n (\hat{\theta}_{-i} - \bar{\theta}_\circ)^2$$

تعریف می‌شود، که در آن $\widehat{SE}_{Jack}(T)$ یک برآوردگر ناریب برای خطای استاندارد آماره T است. برآوردگر تصحیح شده جک‌نایف نیز به صورت

$$\hat{\theta}_{Jack} = \hat{\theta} - \widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n - 1)\bar{\theta}_\circ.$$

تعریف می‌شود، که $\hat{\theta}_{Jack}$ اریبی کمتری نسبت به $\hat{\theta}$ دارد. هدف این مقاله به‌کارگیری روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف بر برآوردگرهای آنتروپی و مقایسه‌ای بین برآوردگرهای آنتروپی بدست آمده با استفاده از این روش‌ها از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا است. در بخش ۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف محاسبه شده‌اند. در بخش ۴ برآوردگرهای آنتروپی به کمک شبیه‌سازی از نظر اریبی و جذر میانگین مربعات خطا با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در بخش ۵ از برآوردگرهای پیشنهادی استفاده و آزمون‌هایی برای نرمال بودن توزیع جامعه معرفی شده‌اند. در پایان از کارهای انجام شده نتیجه‌گیری خواهد شد.

۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک بوت‌استرپ و جک‌نایف

با اعمال روش بوت‌استرپ بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{H}(f)_{boot} = \widehat{H}(f) - \widehat{bias}(H(f)) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \widehat{H}(f)^{*i} - \overline{\widehat{H}(f)}^*,$$

تعریف می‌شود. برای برآورد خطای استاندارد ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\widehat{H}(f)$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندارد $\widehat{H}(f)$ با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\widehat{H}(f)) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\widehat{H}(f)^{*i} - \overline{\widehat{H}(f)}^*)^2},$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\overline{\widehat{H}(f)}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \widehat{H}(f)^{*i}.$$

بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ، برآورد میزان اریبی را می‌توان به صورت

$$\widehat{bias}(H(f)) = \overline{\widehat{H}(f)}^* - \widehat{H}(f). \quad (11)$$

محاسبه کرد. با اعمال روش جک‌نایف بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش جک‌نایف به صورت

$$\widehat{H}(f)_{Jack} = \widehat{H}(f) - \widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H}(f)) = n\widehat{H}(f) - (n-1)\overline{\widehat{H}(f)}_o, \quad (12)$$

تعریف می‌شود. که در آن

$$\overline{\widehat{H}(f)}_o = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \widehat{H}(f)_{-i}.$$

برآورد اریبی و خطای استاندارد این برآوردگر به ترتیب به صورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H}(f)) = (n-1)(\overline{\widehat{H}(f)}_o - \widehat{H}(f))$$

$$\widehat{SE}_{Jack}(\widehat{H}(f)) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=0}^n (\widehat{H}(f)_{-i} - \overline{\widehat{H}(f)})^2$$

تعریف می‌شود. حال با جایگزین کردن پنج برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ونای اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) بجای $\widehat{H}(f)$ برآوردگرهای آنتروپی بر حسب بوت‌استرپ و جک‌نایف بدست می‌آیند.

واسیچک (۱۹۷۶)، بر اساس خاصیت ماکسیمم آنتروپی توزیع نرمال، آزمونی را معرفی نمود. سپس آن را با دیگر آزمون‌ها مقایسه و مشاهده کرد که این آزمون برای برخی فرضیه‌های جانشین دارای توان بالاتری نسبت به دیگر آزمون‌ها است. دادویچ و وندرمولن (۱۹۸۱)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲) و چو و کیم (۲۰۰۶) برای برخی توزیع‌ها آزمون‌هایی را بر اساس خاصیت ماکسیمم آنتروپی معرفی نمودند و نشان دادند که آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی دارای توان نسبتاً خوبی هستند. یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸) ابتدا یک برآوردگر پیشنهادی برای تابع توزیع پیشنهاد و سپس به کمک آن آزمون‌های نیکویی برازش بر اساس آنتروپی را انجام دادند. عزیززاده نوقابی (۲۰۱۰)، بر اساس برآوردگر پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت ساخت. زمان‌زاده و ارقامی (۲۰۱۱) بر اساس برآوردگری پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال و نمایی ساختند. برات‌پور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲)، یک آماره آزمون بر اساس آنتروپی تجمعی ارائه کردند.

۴ مقایسه برآوردگرهای آنتروپی

در این بخش دقت برآوردگرهای آنتروپی معرفی شده برای توزیع‌های پیوسته نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۰, ۱) از لحاظ اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌شود. برای این منظور از این توزیع‌ها نمونه‌ای به حجم n تولید کرده و آنتروپی را با استفاده از برآوردگرهای نام برده در بخش قبل محاسبه و مقادیر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها به صورت

$$Bias(\widehat{H}(f)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widehat{H}(f)_{(i)} - H(f)$$

$$RMSE(\widehat{H}(f)) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widehat{H}(f)_{(i)} - H(f))^2}$$

محاسبه می‌شود، که در آن‌ها N تعداد دفعات شبیه‌سازی می‌باشد. $\widehat{H}(f)_i$ مقدار برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) در نمونه شبیه‌سازی شده i ام و $H(f)$ مقدار آنتروپی جامعه است. مثلاً برای توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱، ۰) مقدار آنتروپی به ترتیب برابر ۱٫۴۱۹، ۱ و ۰ است.

برای محاسبه برآوردگرهای آنتروپی، ابتدا بایستی مقدار m مشخص شود. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که مقدار بهینه m ، که به ازای آن مقدار جذرمیانگین توان دوم خطا (یا اریبی)، می‌نیم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع واقعی جامعه تحت بررسی وابسته است، و چون در عمل، توزیع جامعه نامعلوم است، لذا نمی‌توان مقدار بهینه‌ای را برای m با فرض معلوم بودن حجم نمونه پیشنهاد داد و هنوز مساله انتخاب بهینه m به عنوان یک مساله باز، باقی‌مانده است. ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) پیشنهاد استفاده از رابطه $m = \lceil \sqrt{n} + 0.5 \rceil$ برای انتخاب m هنگامی که n معلوم است، را ارائه کردند، که در آن $[\cdot]$ علامت جزء صحیح است. از مقدار پیشنهادی ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برای مقایسه تمام برآوردگرهای آنتروپی استفاده شده است. لازم به ذکر است که اریبی برآوردگرهای بوت‌استرپ در رابطه (۱۰) و اریبی برآوردگرهای جک‌نایف در رابطه (۱۱) به طور کامل شرح داده شده است. در بخش بعد مقادیر بدست آمده در جدول‌های مربوطه آورده و همچنین نمودارهای مربوط به طور کامل رسم شده است. تعداد دفعات شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ بار و تعداد تکرارهای بوت‌استرپ ۱۰۰ بار است. نتایج در جدول‌های ۱ تا ۳ آورده شده است.

با توجه به جدول ۱ ملاحظه می‌شود که برآوردگر HW_{nm} در توزیع نرمال استاندارد از لحاظ میانگین توان دوم خطا عملکرد خوبی دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که برآوردگرهای HV_J ، HE_J و HW_J میانگین توان دوم خطای کمتری دارند. با اعمال روش بوت‌استرپ و محاسبه میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای بوت‌استرپ مشاهده می‌شود که برآوردگر (HE_b) در توزیع نرمال استاندارد عملکرد خوبی دارد.

در توزیع نمایی با توجه به جدول ۲ ملاحظه می‌شود که در بین برآوردگرهای معمولی، برآوردگر آنتروپی HW میانگین توان دوم خطای کمتری دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که تقریباً برآوردگرها عملکرد یکسانی دارند. همچنین در بین برآوردگرهای بوت‌استرپ HE_b و HC_b عملکرد خوبی دارند.

جدول ۱: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع نرمال استاندارد.

جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)					m	n	برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV			
۰٫۴۰۵۹(-۰٫۳۰۵۴)	۰٫۳۰۱۹(-۰٫۱۴۰۵)	۰٫۴۶۸۱(-۰٫۳۸۳۲)	۰٫۳۶۵۲(-۰٫۲۳۴۱)	۰٫۶۲۲۰(۰٫۵۶۱۶)	۳	۱۰	آنتروپی معمولی
۰٫۲۴۷۳(-۰٫۱۷۱۰)	۰٫۱۹۱۵(-۰٫۰۶۸۷)	۰٫۲۶۵۵(-۰٫۱۹۴۲)	۰٫۲۷۶۹(-۰٫۲۰۵۴)	۰٫۳۷۴۸(-۰٫۳۲۹۴)	۴	۲۰	
۰٫۱۸۳۹(-۰٫۱۱۷۱)	۰٫۱۴۷۷(-۰٫۰۴۱۱)	۰٫۱۹۲۵(-۰٫۱۲۸۱)	۰٫۲۴۱۸(-۰٫۱۹۳۰)	۰٫۲۸۱۴(-۰٫۲۴۴۳)	۵	۳۰	
۰٫۱۲۶۶(-۰٫۰۶۶۱)	۰٫۱۰۹۱(-۰٫۰۱۵۲)	۰٫۱۳۲۴(-۰٫۰۷۳۹)	۰٫۲۱۰۶(-۰٫۱۸۰۸)	۰٫۱۹۸۱(-۰٫۱۶۶۱)	۷	۵۰	
۰٫۳۷۲۶(-۰٫۰۸۴۹)	۰٫۲۸۲۶(۰٫۰۰۱۶)	۰٫۳۸۴۹(۰٫۰۱۲۷)	۰٫۳۷۵۸(-۰٫۱۷۹۲)	۰٫۳۷۲۶(-۰٫۰۸۴۹)	۳	۱۰	آنتروپی جکنایف
۰٫۲۱۹۱(-۰٫۰۴۵۰)	۰٫۲۱۵۲(۰٫۰۱۹۰)	۰٫۲۳۰۴(۰٫۰۳۳۲)	۰٫۲۴۴۹(-۰٫۱۲۳۷)	۰٫۲۱۹۱(-۰٫۰۴۵۰)	۴	۲۰	
۰٫۱۷۰۹(-۰٫۰۳۲۰)	۰٫۱۶۸۹(۰٫۰۱۸۹)	۰٫۱۷۹۷(۰٫۰۳۳۷)	۰٫۱۹۴۸(-۰٫۰۱۰۷۴)	۰٫۱۷۰۹(-۰٫۰۳۲۰)	۵	۳۰	
۰٫۱۲۶۶(-۰٫۰۱۶۶)	۰٫۱۲۵۰(-۰٫۰۱۹۵)	۰٫۱۳۳۳(-۰٫۰۳۲۶)	۰٫۱۵۰۲(-۰٫۰۹۳۲)	۰٫۱۲۶۶(-۰٫۰۱۶۶)	۷	۵۰	
۰٫۲۸۷۵(-۰٫۰۵۶۶)	۰٫۳۰۰۴(۰٫۱۰۵۱)	۰٫۳۷۵۹(-۰٫۲۳۷۳)	۰٫۲۹۷۳(۰٫۰۸۱۴)	۰٫۴۲۳۷(-۰٫۳۱۶۳)	۳	۱۰	آنتروپی بوتاسترپ
۰٫۱۸۷۱(-۰٫۰۱۶۶)	۰٫۲۰۴۴(۰٫۰۸۵۲)	۰٫۲۲۶۳(-۰٫۱۱۹۸)	۰٫۱۹۱۴(-۰٫۰۱۳۴)	۰٫۲۵۵۵(-۰٫۱۷۵۲)	۴	۲۰	
۰٫۱۴۸۶(۰٫۰۰۲۷)	۰٫۱۶۵۷(۰٫۰۷۳۳)	۰٫۱۷۲۲(-۰٫۰۷۹۱)	۰٫۱۵۵۵(-۰٫۰۴۷۲)	۰٫۱۹۶۶(-۰٫۱۲۸۷)	۵	۳۰	
۰٫۱۱۴۷(۰٫۰۱۳۲)	۰٫۱۳۰۷(۰٫۰۶۴۱)	۰٫۱۲۴۷(-۰٫۰۴۲۷)	۰٫۱۴۰۰(-۰٫۰۸۷۷)	۰٫۱۴۳۲(-۰٫۰۸۶۸)	۷	۵۰	

جدول ۲: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی توزیع نمایی با میانگین یک.

جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)					m	n	برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV			
۰٫۴۰۳۲(-۰٫۱۸۱۹)	۰٫۳۶۰۲(-۰٫۰۱۶۵)	۰٫۴۳۷۶(-۰٫۲۴۳۳)	۰٫۳۹۱۳(-۰٫۱۱۴۸)	۰٫۵۶۶۹(-۰٫۴۳۸۱)	۳	۱۰	آنتروپی معمولی
۰٫۲۶۰۹(-۰٫۰۹۸۶)	۰٫۲۴۱۶(۰٫۰۰۳۷)	۰٫۲۶۹۶(-۰٫۱۱۳۴)	۰٫۲۷۰۱(-۰٫۱۰۹۳)	۰٫۳۲۲۷(-۰٫۲۵۷۱)	۴	۲۰	
۰٫۲۰۳۰(-۰٫۰۶۵۴)	۰٫۱۹۲۶(۰٫۰۱۰۶)	۰٫۲۰۰۷(-۰٫۰۷۰۴)	۰٫۲۲۵۰(-۰٫۱۰۹۴)	۰٫۲۷۱۳(-۰٫۱۹۱۳)	۵	۳۰	
۰٫۱۵۱۶(-۰٫۰۳۰۶)	۰٫۱۴۹۸(۰٫۰۲۰۳)	۰٫۱۵۴۲(-۰٫۰۳۴۹)	۰٫۱۸۲۲(-۰٫۱۰۲۵)	۰٫۱۹۷۷(-۰٫۰۱۳۰۶)	۷	۵۰	
۰٫۴۴۳۰(-۰٫۰۹۴۵)	۰٫۴۳۲۹(-۰٫۰۰۷۹)	۰٫۴۵۰۱(-۰٫۰۰۳۴)	۰٫۴۳۷۵(-۰٫۱۱۹۸)	۰٫۴۴۳۰(-۰٫۰۹۴۵)	۳	۱۰	آنتروپی جکنایف
۰٫۲۷۶۵(-۰٫۰۶۳۲)	۰٫۲۶۹۱(۰٫۰۰۰۸)	۰٫۲۷۹۱(۰٫۰۰۷۲)	۰٫۲۸۱۲(-۰٫۰۸۰۵)	۰٫۲۷۶۵(-۰٫۰۶۳۲)	۴	۲۰	
۰٫۲۱۷۹(-۰٫۰۵۱۱)	۰٫۲۱۱۸(-۰٫۰۰۰۲)	۰٫۲۱۹۵(۰٫۰۰۹۳)	۰٫۲۲۳۷(-۰٫۰۷۳۲)	۰٫۲۱۷۹(-۰٫۰۵۱۱)	۵	۳۰	
۰٫۱۶۲۴(-۰٫۰۳۷۴)	۰٫۱۵۸۱(۰٫۰۰۰۱۳)	۰٫۱۶۲۵(۰٫۰۰۸۲)	۰٫۱۷۰۵(-۰٫۰۶۲۱)	۰٫۱۶۲۴(-۰٫۰۳۷۴)	۷	۵۰	
۰٫۳۷۹۲(۰٫۰۶۵۷)	۰٫۴۳۷۱(۰٫۲۲۷۱)	۰٫۳۹۶۴(-۰٫۰۰۹۵۱)	۰٫۴۱۸۸(۰٫۱۴۰۳)	۰٫۴۲۰۶(-۰٫۱۹۴۱)	۳	۱۰	آنتروپی بوتاسترپ
۰٫۲۵۴(۰٫۰۵۱۶)	۰٫۲۹۲(۰٫۱۵۳۲)	۰٫۲۵۹۳(-۰٫۰۰۴۴۲)	۰٫۲۶۷۵(۰٫۰۸۶۹)	۰٫۲۷۱۱(-۰٫۱۰۷۳)	۴	۲۰	
۰٫۲۰۳۷(۰٫۰۴۵)	۰٫۲۳۱۹(۰٫۱۲۰۷)	۰٫۲۰۴۷(-۰٫۰۰۲۶۶)	۰٫۲۰۳۴(۰٫۰۴۰۰)	۰٫۲۱۴۴(-۰٫۰۸۱۵)	۵	۳۰	
۰٫۱۵۸۶(۰٫۰۴۲۹)	۰٫۱۷۹۳(۰٫۰۹۴۱)	۰٫۱۵۶۲(-۰٫۰۱۰۲)	۰٫۱۵۲۷(-۰٫۰۰۶۸)	۰٫۱۶۳۳(-۰٫۰۵۷۴)	۷	۵۰	

با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت (جدول ۳) مشاهده می‌شود برآوردگر HW در بین برآوردگرهای معمولی عملکرد نسبتاً خوبی دارد. با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ به ترتیب برآوردگرهای HW_J و HE_b از لحاظ میانگین توان دوم خطا عملکرد خوبی دارند.

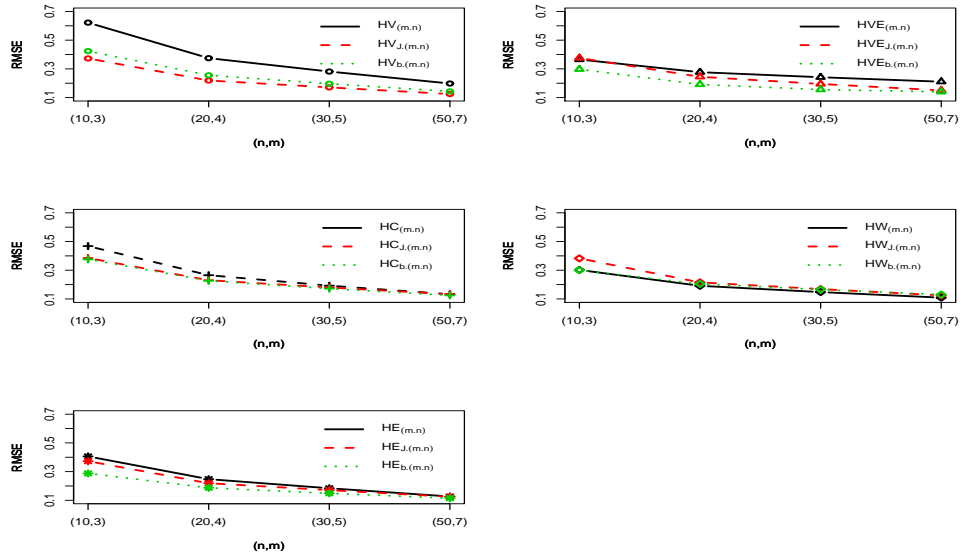
جدول ۳: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت

جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)					m	n	برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV			
۰٫۲۳۴۹(-۰٫۱۶۵۱)	۰٫۱۶۷۲(-۰٫۰۰۰۲)	۰٫۲۹۴۷(-۰٫۲۴۲۴)	۰٫۲۱۷۷(۰٫۰۰۳۹)	۰٫۴۵۳۲(-۰٫۴۲۱۳)	۳	۱۰	آنتروپی معمولی
۰٫۱۳۲۸(-۰٫۱۰۱۸)	۰٫۰۸۵۲(۰٫۰۰۰۵)	۰٫۱۵۵۴(-۰٫۱۲۹۱)	۰٫۱۲۰۷(۰٫۰۰۰۳)	۰٫۲۷۳۹(-۰٫۲۶۰۳)	۴	۲۰	
۰٫۰۹۶۸(۰٫۰۷۶۱)	۰٫۰۵۹۸(-۰٫۰۰۰۱)	۰٫۱۱۱۲(-۰٫۰۹۲۶)	۰٫۰۸۷۴(-۰٫۰۰۰۲)	۰٫۲۱۰۷(-۰٫۲۰۲۰)	۵	۳۰	
۰٫۰۶۲۷(-۰٫۰۵۰۸)	۰٫۰۳۶۸(۰٫۰۰۰۱)	۰٫۰۷۵۲(-۰٫۰۶۵۱)	۰٫۰۵۸۱(۰٫۰۰۰۰)	۰٫۱۵۵۲(-۰٫۱۵۰۸)	۷	۵۰	
۰٫۲۸۷۷(-۰٫۰۹۰۸)	۰٫۲۷۳۱(-۰٫۰۰۰۴)	۰٫۲۸۷۸(-۰٫۰۰۰۷۵)	۰٫۲۹۱۴(-۰٫۰۰۰۳۶)	۰٫۲۸۷۷(-۰٫۰۹۰۸)	۳	۱۰	آنتروپی جک‌نایف
۰٫۱۴۹۵(-۰٫۰۶۴۰)	۰٫۱۳۵۱(-۰٫۰۰۰۰۸)	۰٫۱۴۴۱(۰٫۰۰۰۵۰)	۰٫۱۶۶۸(-۰٫۰۰۰۰۶)	۰٫۱۴۹۵(-۰٫۰۶۴۸)	۴	۲۰	
۰٫۱۰۸۱(-۰٫۰۵۰۷)	۰٫۰۹۵۵(۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۱۰۲۸(۰٫۰۰۰۸۵)	۰٫۱۱۹۷(-۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۱۰۸۱(-۰٫۰۵۰۷)	۵	۳۰	
۰٫۰۶۹۴(-۰٫۰۳۵۵)	۰٫۰۵۹۷(۰٫۰۰۰۰۷)	۰٫۰۶۳۹(۰٫۰۰۰۸۷)	۰٫۰۷۷۴(۰٫۰۰۰۰۶)	۰٫۰۶۹۴(-۰٫۰۳۵۵)	۷	۵۰	
۰٫۱۸۱۲(۰٫۰۵۴۴)	۰٫۲۷۶۵(۰٫۲۱۵۵)	۰٫۲۲۲۵(-۰٫۱۲۸۷)	۰٫۳۵۴۳(۰٫۲۵۶۴)	۰٫۲۶۸۵(-۰٫۲۰۵۴)	۳	۱۰	آنتروپی بوت‌استرپ
۰٫۰۹۲۳(۰٫۰۲۹۶)	۰٫۱۵۷۸(۰٫۱۳۱۵)	۰٫۱۲۲۵(-۰٫۰۸۰۸)	۰٫۲۴۱۵(۰٫۲۰۲۶)	۰٫۱۵۶۱(-۰٫۱۲۹۲)	۴	۲۰	
۰٫۰۶۳۴(۰٫۰۱۷۴)	۰٫۱۱۳۱(۰٫۰۹۳۱)	۰٫۰۹۳۴(-۰٫۰۶۷۵)	۰٫۱۸۱۸(۰٫۱۵۶۱)	۰٫۱۲۴۷(-۰٫۱۰۸۷)	۵	۳۰	
۰٫۰۳۸۳(۰٫۰۰۸۱)	۰٫۰۶۹۸(۰٫۰۵۸۹)	۰٫۰۶۸۵(-۰٫۰۵۵۶)	۰٫۱۱۷۳(۰٫۱۰۰۰۱)	۰٫۰۹۹۳(-۰٫۰۹۲۰)	۷	۵۰	

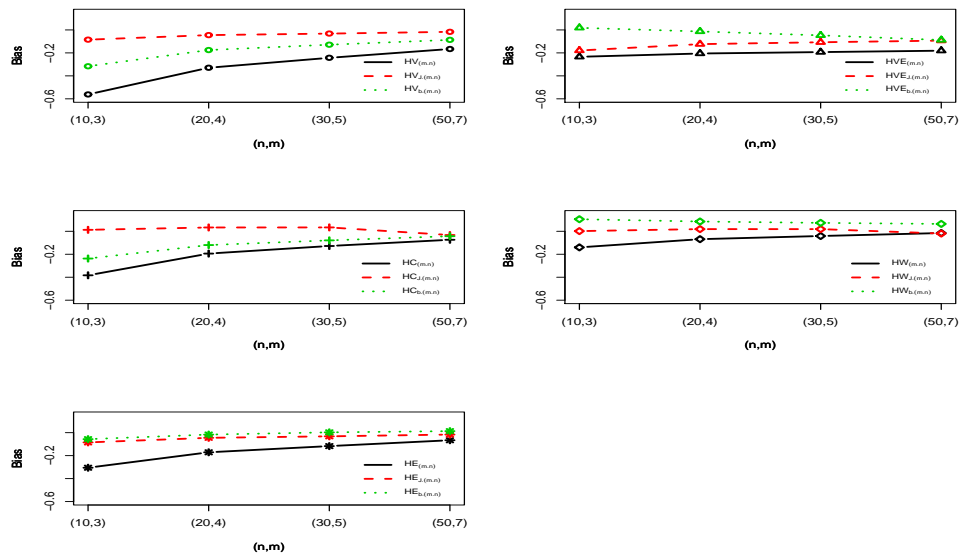
با توجه به شکل ۱، در توزیع نرمال استاندارد و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و کوریا (۱۹۹۵) در حالت معمولی و همچنین اعمال روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف برای حجم نمونه‌های بزرگ عملکرد یکسانی دارند و برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) و ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) بترتیب با اعمال روش جک‌نایف و روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

با توجه به شکل ۲، در توزیع نمایی با میانگین یک و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) در سه حالت معمولی، بوت‌استرپی و جک‌نایف برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند. برآوردگر آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) با اعمال روش بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد بهتری دارد.

با توجه به شکل ۳ در توزیع یکنواخت (۰، ۱) از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) در سه حالت معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند.

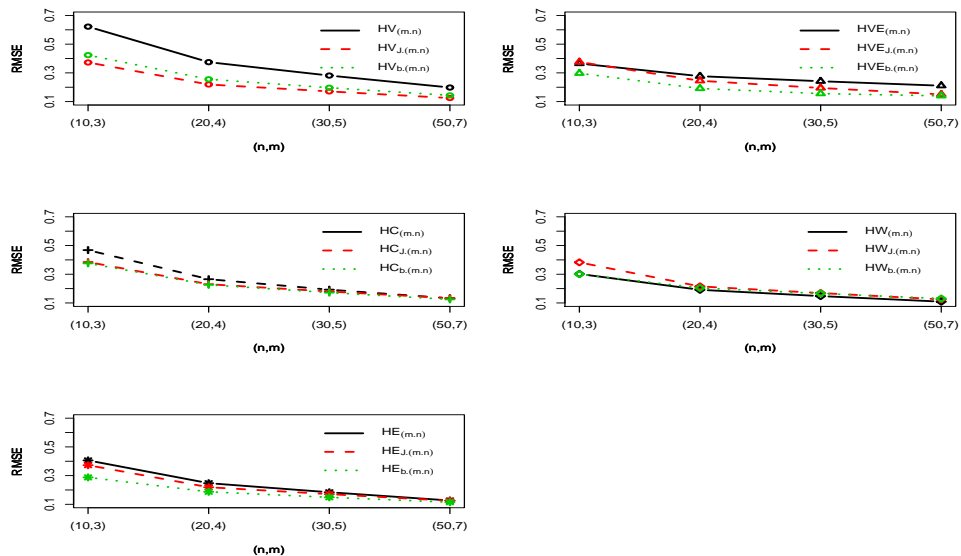


(آ) جذر میانگین توان دوم خطا

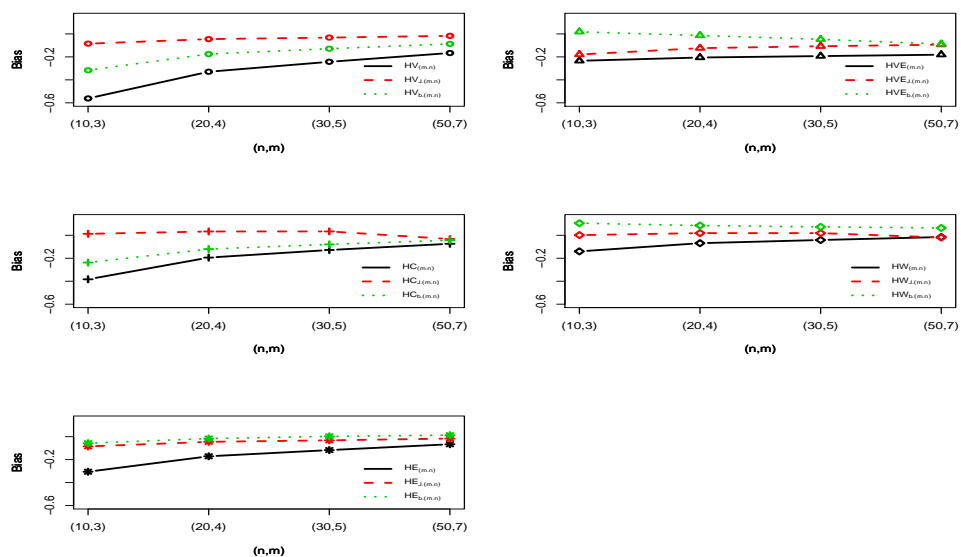


(ب) اریبی

شکل ۱: برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع نرمال استاندارد.

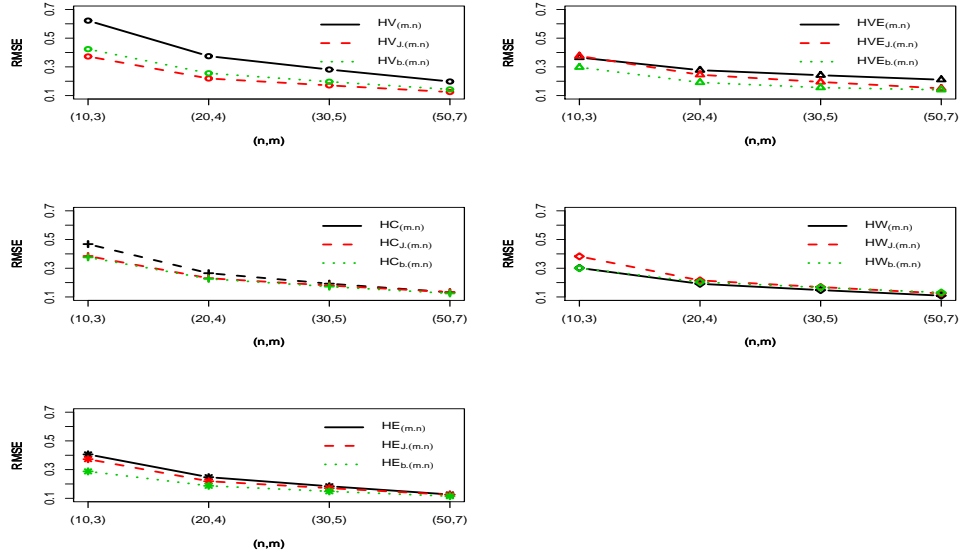


(آ) جذر میانگین توان دوم خطا

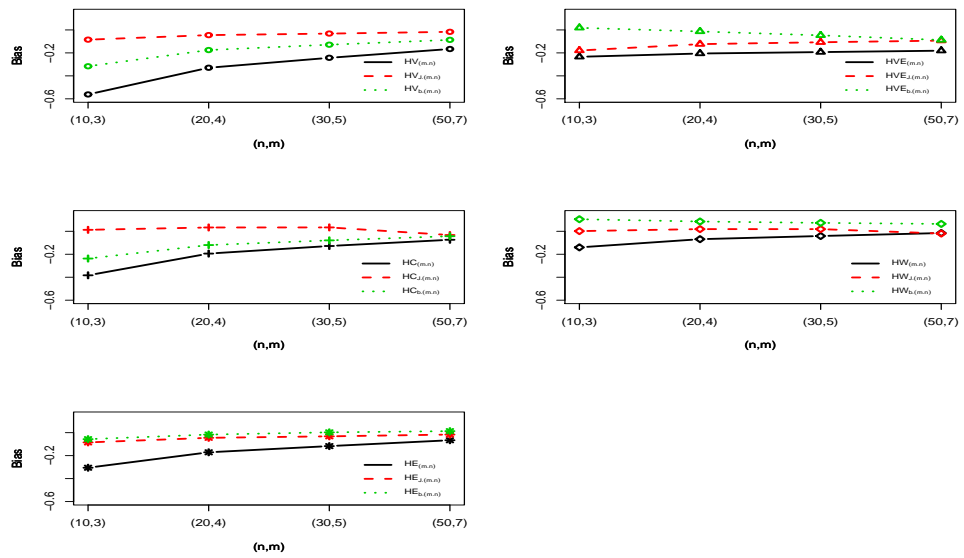


(ب) اریبی

شکل ۲: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت‌استرپی و جک‌نایف آنتروپی در شبیه‌سازی از توزیع نمایی با میانگین یک.



(آ) جذر میانگین توان دوم خطا



(ب) اریبی

شکل ۳: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع یکنواخت

با توجه به شکل‌های ۱، ۲ و ۳ در توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱، ۰) و از لحاظ اریبی، برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف و برآوردگرهای آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

به‌طور کلی مشاهده می‌شود که در هر سه توزیع نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱، ۰)، برآوردگر HV در روش‌های بوت‌استرپ (HV_b) و جک‌نایف (HV_J) عملکرد بسیار خوبی دارد و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها کاهش می‌یابد و میزان اریبی برآوردگرها به سمت صفر میل می‌کند.

۵ آزمون نرمال بودن توزیع جامعه براساس ماکسیمم آنتروپی

واسیچک (۱۹۷۶) آماره آزمونش برای توزیع نرمال را به‌صورت

$$TV_{nm} = \frac{\exp(HV_{nm})}{S},$$

معرفی کرد، که در آن HV_{nm} برآوردگر آنتروپی واسیچک و S انحراف معیار نمونه است. حال اگر بجای برآوردگر آنتروپی واسیچک از برآوردگرهای دیگر استفاده شود آماره‌های آزمون مختلفی بدست می‌آیند. در زیر آماره‌های مختلف براساس برآوردگرهای مختلف معرفی شده‌اند.

۱. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ون‌ای‌اس (۱۹۹۲):

$$TVE_{nm} = \frac{\exp(HVE_{nm})}{S}.$$

۲. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴):

$$TE_{nm} = \frac{\exp(HE_{nm})}{S}.$$

۳. آماره آزمون بر اساس برآوردگر کوریا (۱۹۹۵):

$$TC_{nm} = \frac{\exp(HC_{nm})}{S}.$$

۴. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹):

$$TW_{nm} = \frac{\exp(HW_{nm})}{S}.$$

۵. آماره آزمون بر اساس برآوردگرهای معرفی شده به روش بوت استرپ و جک نایف نیز به همین صورت تعریف می شوند. برای نمونه آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش بوت استرپ

به صورت

$$TV_B = \frac{\exp(HV_B)}{S},$$

و آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش جک نایف نیز به صورت

$$TV_J = \frac{\exp(HV_J)}{S},$$

است.

۱.۵ مقادیر بحرانی

با توجه به پیچیده بودن آماره‌های آزمون مبتنی بر آنتروپی، محققین نتوانسته‌اند تاکنون، توزیع دقیق آماره آزمون خود را تحت فرضیه صفر (نرمال بودن توزیع جامعه) به دست آورند و لذا برای محاسبه مقادیر بحرانی آماره آزمون، به شبیه‌سازی روی آورده‌اند. در این جا، مقادیر بحرانی آماره آزمون‌های معرفی شده به کمک شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف n و m در سطح $\alpha = 0.05$ محاسبه می‌شوند. از آنجا که مقادیر کوچک آماره آزمون فرضیه نرمال بودن را رد می‌کند چندان مرتبه α ام (C_α) آماره آزمون را بدست آورده‌ایم. چندان مرتبه α ام آماره آزمون T عددی است که در رابطه $P_H(T < C_\alpha) = \alpha$ صدق می‌کند.

برای محاسبه مقادیر بحرانی تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم n از توزیع نرمال استاندارد تولید و چندان آماره آزمون محاسبه شده است. نحوه محاسبه نقاط بحرانی آماره‌های آزمون بر اساس روش‌های بوت استرپ و جک نایف مشابه روش ذکر شده در بالا است. این مقادیر در جدول‌های ۴ و ۵ آورده شده‌اند. توجه شود

که آماره آزمون نسبت به تبدیلات مکانی-مقیاسی پایاست و لذا مقادیر بحرانی، به مقدار پارامترهای μ و σ^2 بستگی نخواهند داشت.

جدول ۴: نقاط بحرانی آزمون‌های نرمال بودن بر اساس آماره‌های آزمون بوت‌استرپ در سطح $\alpha = 0.05$.

آماره آزمون	n			
	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰
TV_B	۲,۵۷۳۲	۳,۰۶۲۸	۳,۴۲۰۰	۳,۵۱۰۰
TVE_B	۳,۲۷۵۳	۳,۴۹۸۰	۳,۵۱۸۲	۳,۵۱۵۶
TC_B	۲,۷۴۹۹	۳,۱۹۴۳	۳,۵۵۵۶	۳,۶۴۳۰
TW_B	۳,۹۳۲۴	۳,۹۷۲۵	۴,۰۶۰۹	۴,۰۸۵۹
TE_B	۳,۳۳۰۰	۳,۵۹۲۸	۳,۸۱۸۳	۳,۸۸۲۸

جدول ۵: نقاط بحرانی آزمون‌های نرمال بودن بر اساس آماره‌های آزمون ک‌نایف در سطح $\alpha = 0.05$.

آماره آزمون	n			
	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰
TV_J	۲,۴۹۵۸	۳,۱۹۸۵	۳,۵۸۲۰	۳,۶۷۲۸
TVE_J	۲,۴۱۷۱	۲,۹۲۶۱	۳,۲۹۸۴	۳,۳۹۱۹
TC_J	۲,۶۶۴۷	۳,۳۹۳۰	۳,۷۴۱۱	۳,۸۲۰۴
TW_J	۲,۷۲۱۴	۳,۴۰۹۹	۳,۷۳۶۷	۳,۸۰۸۱
TE_J	۲,۴۹۵۸	۳,۱۹۸۵	۳,۵۸۲۰	۳,۶۷۲۸

۲.۵ توان آزمون‌ها

در این بخش توان آزمون‌های پیشنهادی محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای این منظور با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با $B = 10000$ تکرار، توان آزمون‌های نرمال بودن تحت ۲۱ توزیع جانشین مختلف به‌دست آورده شده‌اند. برای این کار، ابتدا تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم‌های $n = 10, 20, 40, 50$ تحت هر یک از توزیع‌های جانشین تولید و سپس توان هر یک از آزمون‌ها از طریق، نسبت تعداد دفعاتی که آماره آزمون از مقدار بحرانی آن کمتر است به کل تعداد تکرارها، برآورد شده است.

توزیع‌های جانشین تحت بررسی را می‌توان بر اساس شکل و تکیه‌گاه آن‌ها به چهار گروه مختلف تقسیم کرد. گروه اول، توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$ ، گروه دوم، توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$ ، گروه سوم، توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(0, +\infty)$ و گروه چهارم، توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(0, 1)$.

استبان و همکاران (۲۰۰۱) این نوع تقسیم‌بندی را برای مقایسه توان برخی از آزمون‌های نرمال بودن، برای اولین بار به کار بردند. این توزیع‌ها عبارت‌اند از:

توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع t استیودنت با یک درجه آزادی (کوشی)، توزیع t استیودنت با سه درجه آزادی، توزیع نمایی دوگانه (لاپلاس)، توزیع لوژستیک.

توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع گامبل، توزیع نرمال چوله (SN) با پارامترهای شکل $۲, ۳$ ، $\alpha = ۲, ۳$ ، توزیع لاپلاس چوله (SL) با پارامترهای $\alpha = ۱$ و $\beta = ۲, ۳$ (توزیع آمیخته حاصل از ترکیب توزیع نمایی با میانگین $۲, ۳$ با $\beta = ۲, ۳$)
قرینه توزیع نمایی با میانگین ۱ ($\alpha = ۱$).

توزیع‌های با تکیه‌گاه $(۰, \infty)$

توزیع نمایی با میانگین یک، توزیع گاما با پارامتر شکل ۰.۵ ، $\alpha = ۰.۵$ ، توزیع گاما با پارامتر شکل ۲ ، $\alpha = ۲$ ، توزیع لگ‌نرمال (LN) با پارامتر شکل ۱ ، $\sigma = ۱$ ، توزیع لگ‌نرمال (LN) با پارامتر شکل ۲ ، $\sigma = ۲$ ، توزیع وایبل با پارامتر شکل ۰.۵ ، $\alpha = ۰.۵$ ، توزیع وایبل با پارامتر شکل ۲ ، $\alpha = ۲$ ، توزیع خی‌دو با یک درجه آزادی، توزیع خی‌دو با سه درجه آزادی، توزیع نمایی تعمیم‌یافته.

توزیع‌های با تکیه‌گاه $(۰, ۱)$

توزیع یکنواخت، توزیع بتا ($۰.۵, ۳$)، توزیع بتا ($۰.۵, ۱$)، توزیع بتا ($۲, ۲$).

نکته قابل توجه در این جا این است که توان آزمون‌های مبتنی بر مبنای آنتروپی، به مقدار پارامتر m بستگی دارد و مقدار بهینه m ، یعنی مقداری که به ازای آن توان آزمون ماکسیمم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع جانشین نیز وابسته است و چون توزیع جایگزین در عمل نامعلوم است، نمی‌توان مقداری برای m پیشنهاد داد که به ازای آن، توان آزمون برای تمام توزیع‌های جانشین ماکسیمم شود. این مطلب برای تمام آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی صدق می‌کند. لذا محققین در این زمینه، برای حجم نمونه n ، مقداری از m ($[\sqrt{n} + ۰.۵]$) پیشنهاد داده‌اند که آزمون مربوطه، توان نسبتاً خوبی به ازای تمام توزیع‌های جایگزین داشته باشد.

جدول ۶: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مدل‌های رقیب	n
۰.۳۰۱۴	۰.۳۰۶۸	۰.۱۳۶۸	۰.۶۱۱۲	۰.۳۰۱۳	۰.۲۰۱۳	۰.۲۰۱۳	۰.۱۷۷۱	۰.۵۲۵۸	۰.۲۰۱۳	۰.۶۱۶۶	۰.۶۱۶۶	۰.۳۶۳۱	۰.۶۳۷۹	۰.۶۱۶۶	t	۱۰
۰.۰۷۷۹	۰.۰۷۵۲	۰.۰۵۸۱	۰.۱۸۵۲	۰.۰۷۵۲	۰.۲۹	۰.۲۹	۰.۲۱۹	۰.۱۳۹۹	۰.۱۰۱۳	۰.۰۸۷۲	۰.۰۸۷۲	۰.۱۹۲۵	۰.۰۸۷۲	۰.۱۹۲۵	t	
۰.۰۴۸۱	۰.۰۴۹۲	۰.۰۳۶۲	۰.۰۷۲۴	۰.۰۳۸۷	۰.۲۱۸	۰.۲۱۸	۰.۲۱۳	۰.۰۶۷۱	۰.۰۴۱۸	۰.۰۵۱۹	۰.۰۵۱۹	۰.۰۸۷۰	۰.۰۴۶۶	۰.۰۵۱۹	logistic	
۰.۰۵۱۳	۰.۰۵۳۳	۰.۰۲۵۱	۰.۱۶۸۲	۰.۰۵۲۸	۰.۲۹	۰.۲۹	۰.۲۹۰	۰.۱۱۱۲	۰.۰۲۹۰	۰.۰۵۰۷	۰.۰۵۰۷	۰.۰۶۱۷	۰.۱۸۵۵	۰.۰۵۰۷	laplace	
۰.۵۵۹۲	۰.۵۵۷۲	۰.۴۵۷۱	۰.۸۸۶۵	۰.۵۵۷۲	۰.۶۲۵	۰.۶۲۵	۰.۶۱۳	۰.۷۹۳۷	۰.۶۲۵	۰.۶۸۸۷	۰.۶۸۸۷	۰.۶۰۷۰	۰.۸۹۵۸	۰.۶۸۸۷	t	۲۰
۰.۰۹۰۷	۰.۰۸۸۷	۰.۰۶۲۰	۰.۳۳۷۶	۰.۰۸۸۷	۰.۹۸۸	۰.۹۸۸	۰.۸۸۰	۰.۲۱۸۱	۰.۰۹۸۸	۰.۱۳۸۱	۰.۱۳۸۱	۰.۱۰۵۶	۰.۳۵۸۶	۰.۱۳۸۱	t	
۰.۰۴۱۴	۰.۰۴۰۴	۰.۰۳۶۲	۰.۱۱۳۴	۰.۰۴۰۱	۰.۲۵۶	۰.۲۵۶	۰.۲۴۶	۰.۰۷۷۳	۰.۰۲۵۶	۰.۰۳۵۹	۰.۰۳۵۹	۰.۰۲۱۱	۰.۱۲۹۵	۰.۰۳۵۹	logistic	
۰.۰۴۴۵	۰.۰۴۵۵	۰.۰۳۳۱	۰.۰۳۰۱۵	۰.۰۴۵۹	۰.۲۷۷	۰.۲۷۷	۰.۲۷۹	۰.۱۵۱۵	۰.۰۲۷۷	۰.۰۶۸۷	۰.۰۶۸۷	۰.۰۳۸۹	۰.۳۱۴۰	۰.۰۶۸۷	laplace	

جدول ۷: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(0, \infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مدل‌های رقیب	n
۰.۷۲۶۹	۰.۷۳۵۴	۰.۶۶۶۶	۰.۵۵۵۶	۰.۷۳۳۶	۰.۶۶۱۸	۰.۶۶۱۸	۰.۶۲۵۱	۰.۵۵۵۹	۰.۶۶۱۸	۰.۷۸۱۰	۰.۷۸۱۰	۰.۷۵۸۲	۰.۶۲۳۵	۰.۷۸۱۰	$Chi(1)$	۱۰
۰.۲۲۴۴	۰.۲۲۶۰	۰.۲۰۴۸	۰.۱۸۴۷	۰.۲۰۴۸	۰.۱۷۰۲	۰.۱۷۰۲	۰.۱۷۰۸	۰.۱۸۲۸	۰.۱۷۰۲	۰.۲۷۸۸	۰.۲۷۸۸	۰.۲۶۶۶	۰.۲۲۱۴	۰.۲۷۸۸	$Chi(3)$	
۰.۵۱۲۴	۰.۵۲۴۳	۰.۴۶۸۴	۰.۳۵۷۱	۰.۵۲۰۴	۰.۳۸۶۲	۰.۳۸۶۲	۰.۳۶۸۰	۰.۴۲۵۰	۰.۳۸۶۲	۰.۵۹۹۶	۰.۵۹۹۶	۰.۵۸۰۲	۰.۵۱۲۰	۰.۵۹۹۶	$LN(1, 1)$	
۰.۹۱۳۳	۰.۹۱۳۷	۰.۸۸۲۳	۰.۸۳۰۱	۰.۹۱۳۹	۰.۸۸۶۰	۰.۸۸۶۰	۰.۸۷۰۳	۰.۸۶۶۳	۰.۸۸۶۰	۰.۹۴۲۰	۰.۹۴۲۰	۰.۹۳۲۰	۰.۸۷۹۸	۰.۹۴۲۰	$LN(1, 2)$	
۰.۷۳۱۴	۰.۷۲۹۰	۰.۶۶۶۲	۰.۵۷۴۴	۰.۷۳۵۱	۰.۶۶۰۵	۰.۶۶۰۵	۰.۶۳۰۹	۰.۶۶۰۵	۰.۷۸۶۲	۰.۷۸۶۲	۰.۷۸۶۲	۰.۷۶۰۴	۰.۶۲۳۷	۰.۷۸۶۲	$Gamma(1, 5)$	
۰.۱۱۷۹	۰.۱۱۸۵۶	۰.۱۶۱۸	۰.۱۴۷۳	۰.۱۱۸۰	۰.۱۲۲۴	۰.۱۲۲۴	۰.۱۲۱۹	۰.۱۲۰۵	۰.۱۲۲۴	۰.۲۰۷۹	۰.۲۰۷۹	۰.۱۹۵۵	۰.۱۷۶۹	۰.۲۰۷۹	$Gamma(2)$	
۰.۸۸۷۴	۰.۸۸۹۱	۰.۸۳۳۷	۰.۷۷۹۴	۰.۸۸۶۴	۰.۸۶۶۶	۰.۸۶۶۶	۰.۸۴۶۱	۰.۸۴۹۲	۰.۸۶۶۶	۰.۹۳۰۶	۰.۹۳۰۶	۰.۹۱۶۰	۰.۸۴۳۳	۰.۹۳۰۶	$Weibull(1, 5)$	
۰.۰۷۶۴	۰.۰۸۳۱	۰.۰۷۵۵	۰.۰۶۶۰	۰.۰۸۰۶	۰.۰۶۹۴	۰.۰۶۹۴	۰.۰۷۱۶	۰.۰۶۸۲	۰.۰۶۹۴	۰.۰۷۹۰	۰.۰۷۹۰	۰.۰۷۶۷	۰.۰۶۱۰	۰.۰۷۹۰	$Weibull(2)$	
۰.۳۹۱۷	۰.۳۹۹۷	۰.۳۴۶۶	۰.۲۸۶۵	۰.۳۹۲۹	۰.۳۸۹۵	۰.۳۸۹۵	۰.۳۸۹۴	۰.۳۸۱۲	۰.۳۸۹۵	۰.۴۴۸۶	۰.۴۴۸۶	۰.۴۳۲۰	۰.۳۳۱۱	۰.۴۴۸۶	$Exp(1)$	
۰.۷۱۳۳	۰.۷۱۶۶	۰.۶۶۹۸	۰.۵۴۳۳	۰.۷۱۳۳	۰.۶۴۲۲	۰.۶۴۲۲	۰.۶۱۸۲	۰.۵۸۶۴	۰.۶۴۲۲	۰.۷۷۲۸	۰.۷۷۲۸	۰.۷۴۹۰	۰.۶۱۶۱	۰.۷۷۲۸	$Gexp(1, 5)$	
۰.۹۲۲۲	۰.۹۲۲۴	۰.۹۰۷۰۳	۰.۸۰۵۸	۰.۹۲۳۳	۰.۹۰۷۹	۰.۹۰۷۹	۰.۸۶۸۳	۰.۹۲۹۸	۰.۹۰۷۹	۰.۹۹۳۶	۰.۹۹۳۶	۰.۹۹۰۳	۰.۹۴۳۱	۰.۹۹۳۶	$Chi(1)$	۲۰
۰.۵۶۶۷	۰.۵۵۵۴	۰.۵۱۹۴	۰.۳۹۵۱	۰.۵۶۵۰	۰.۴۵۷۱	۰.۴۵۷۱	۰.۴۴۴۴	۰.۴۵۰۳	۰.۴۵۷۱	۰.۶۴۳۳	۰.۶۴۳۳	۰.۶۳۹۳	۰.۶۰۹۱	۰.۶۴۳۳	$Chi(3)$	
۰.۹۱۰۰	۰.۹۱۵۰	۰.۸۶۳۹	۰.۷۹۹۱	۰.۹۱۱۱	۰.۸۲۲۹	۰.۸۲۲۹	۰.۸۱۳۳	۰.۸۲۹۴	۰.۸۲۲۹	۰.۹۲۵۷	۰.۹۲۵۷	۰.۹۱۵۶	۰.۸۲۹۱	۰.۹۲۵۷	$LN(1, 1)$	
۰.۹۹۳۳	۰.۹۹۳۳	۰.۹۹۸۸	۰.۹۹۳۳	۰.۹۹۹۵	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۲	۰.۹۹۵۴	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۶۷	۰.۹۹۹۸	$LN(1, 2)$	
۰.۸۸۲۷	۰.۸۸۳۳	۰.۹۰۰۶	۰.۸۱۳۳	۰.۸۸۲۳	۰.۸۷۸۰	۰.۸۷۸۰	۰.۸۶۵۸	۰.۸۶۵۸	۰.۸۷۸۰	۰.۹۹۱۳	۰.۹۹۱۳	۰.۹۸۸۲	۰.۹۴۳۳	۰.۹۹۱۳	$Gamma(1, 5)$	
۰.۴۰۹۸	۰.۴۰۲۹	۰.۳۶۶۲	۰.۲۹۸۷	۰.۴۰۴۰	۰.۳۱۰۳	۰.۳۱۰۳	۰.۳۰۰۹	۰.۳۵۰۶	۰.۳۱۰۳	۰.۴۷۱۹	۰.۴۷۱۹	۰.۴۴۴۴	۰.۳۲۰۷	۰.۴۷۱۹	$Gamma(2)$	
۰.۹۹۸۸	۰.۹۹۸۱	۰.۹۹۹۱	۰.۹۹۹۱	۰.۹۹۸۷	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۶۸	۰.۹۹۴۰	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۹۴	۰.۹۹۵۶	۰.۹۹۹۶	$Weibull(1, 5)$	
۰.۱۲۶۹	۰.۱۲۶۸	۰.۱۱۷۵	۰.۰۷۲۵	۰.۱۲۶۷	۰.۱۰۵۲	۰.۱۰۵۲	۰.۱۰۸۱	۰.۰۷۹۳	۰.۱۰۵۲	۰.۱۳۸۴	۰.۱۳۸۴	۰.۱۳۷۶	۰.۰۷۷۵	۰.۱۳۸۴	$Weibull(2)$	
۰.۸۰۳۳	۰.۸۰۳۹	۰.۷۶۰۴	۰.۵۸۷۴	۰.۸۰۳۳	۰.۷۲۰۳	۰.۷۲۰۳	۰.۶۹۷۲	۰.۵۶۹۸	۰.۷۲۰۳	۰.۸۵۲۴	۰.۸۵۲۴	۰.۸۳۲۴	۰.۶۳۲۳	۰.۸۵۲۴	$Exp(1)$	
۰.۹۸۱۵	۰.۹۷۹۸	۰.۹۶۶۸	۰.۸۹۴۹	۰.۹۸۰۵	۰.۹۷۴۴	۰.۹۷۴۴	۰.۹۶۲۹	۰.۹۱۳۳	۰.۹۷۴۴	۰.۹۸۸۸	۰.۹۸۸۸	۰.۹۸۲۴	۰.۹۲۸۱	۰.۹۸۸۸	$Gexp(1, 5)$	

جدول ۸: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مدل‌های رقیب	n
۰.۹۱۲۲	۰.۹۱۹۹	۰.۸۶۷	۰.۱۱۰۰	۰.۹۱۵۵	۰.۶۷۰	۰.۶۷۰	۰.۶۶۵	۰.۹۰۷	۰.۶۷۰	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۱۱	۰.۱۲۱۰	۰.۱۰۷۹	$Gumbel(1, 1)$	۱۰
۰.۹۳۸	۰.۹۴۷	۰.۸۸۸	۰.۱۰۵۰	۰.۹۳۸	۰.۶۸۸	۰.۶۸۸	۰.۶۸۴	۰.۹۰۸	۰.۶۸۸	۰.۱۱۰۰	۰.۱۰۹۹	۰.۱۰۳۸	۰.۱۲۱۷	۰.۱۰۹۹	$Gumbel(1, 2)$	
۰.۹۸۹۲	۰.۹۹۱۰	۰.۹۷۸	۰.۹۵۳	۰.۹۸۹	۰.۶۷۲	۰.۶۷۲	۰.۶۷۳	۰.۹۵۱	۰.۶۷۲	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۱۱	۰.۱۲۱۰	۰.۱۰۷۹	$Gumbel(1, 3)$	
۰.۹۶۱۰	۰.۹۶۵۲	۰.۹۵۹۶	۰.۹۲۸	۰.۹۶۲۰	۰.۵۰۳	۰.۵۰۳	۰.۴۸۸	۰.۶۱۴	۰.۵۰۳	۰.۵۵۶	۰.۵۵۶	۰.۵۵۶۷	۰.۶۲۹	۰.۵۵۶	$SN(1, 1, 2)$	
۰.۹۷۶	۰.۹۷۵۳	۰.۹۷۴۱	۰.۹۸۱۲	۰.۹۷۱۸	۰.۶۱۸	۰.۶۱۸	۰.۶۲۳	۰.۷۰۸	۰.۶۱۸	۰.۷۴۰	۰.۷۴۰	۰.۷۴۰	۰.۷۱۵	۰.۷۴۰	$SN(1, 1, 3)$	
۰.۹۸۹	۰.۹۹۰۷	۰.۹۸۳۶	۰.۹۸۳۳	۰.۹۹۲	۰.۶۰۴	۰.۶۰۴	۰.۵۹۲	۰.۶۰۴	۰.۶۰۴	۰.۱۳۳۷	۰.۱۳۳۷	۰.۱۳۸۹	۰.۲۰۸۱	۰.۱۳۳۷	$SL(1, 1, 2)$	
۰.۷۱۳۳	۰.۷۱۶۸	۰.۷۱۲۹	۰.۷۱۶۷	۰.۷۱۶۷	۰.۹۷۲	۰.۹۷۲	۰.۹۷۲	۰.۹۷۲	۰.۷۱۶۷	۰.۲۱۰۵	۰.۲۱۰۵	۰.۲۱۰۵	۰.۲۱۶۷	۰.۲۱۰۵	$SL(1, 1, 3)$	
۰.۱۶۸۱	۰.۱۶۵۶	۰.۱۶۷۲	۰.۱۶۲۵	۰.۱۶۶۴	۰.۱۳۸	۰.۱۳۸	۰.۱۳۱۳	۰.۱۲۵۳	۰.۱۳۸	۰.۲۰۰۵	۰.۲۰۰۵	۰.۲۰۰۵	۰.۲۱۳۸	۰.۲۰۰۵	$Gumbel(1, 1)$	۲۰
۰.۱۶۵۸	۰.۱۶۵۲	۰.۱۶۲۹	۰.۱۶۲۶	۰.۱۶۶۹	۰.۱۲۹۶	۰.۱۲۹۶	۰.۱۲۹۶	۰.۱۳۷۵	۰.۱۲۹۶	۰.۲۰۰۲	۰.۲۰۰۲	۰.۲۰۰۲	۰.۲۰۶۸	۰.۲۰۰۲	$Gumbel(1, 2)$	
۰.۱۷۱۳	۰.۱۶۳۷	۰.۱۶۸۹	۰.۱۶۸۷	۰.۱۷۱۰	۰.۱۲۹۹	۰.۱۲۹۹	۰.۱۲۹۵	۰.۱۳۸۱	۰.۱۲۹۹	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۸۵	۰.۲۰۶۱	$Gumbel(1, 3)$	
۰.۰۷۳۹	۰.۰۷۲۱	۰.۰۶۷۵	۰.۰۷۲۵	۰.۰۷۲۲	۰.۰۶۴۰	۰.۰۶۴۰	۰.۰۶۴۰	۰.۰۶۷۴	۰.۰۶۴۰	۰.۰۷۴۴	۰.۰۷۴۴	۰.۰۶۹۱	۰.۰۷۲۸	۰.۰۷۴۴	$SN(1, 1, 2)$	
۰.۱۱۵۴	۰.۱۱۵۳	۰.۱۱۰۷	۰.۱۰۵۰	۰.۱۱۳۱	۰.۰۸۹۱	۰.۰۸۹۱	۰.۰۸۹۱	۰.۰۸۰۹	۰.۱۱۷۹	۰.۱۱۳۴	۰.۱۱۳۴	۰.۱۱۳۴	۰.۱۱۷۹	۰.۱۱۳۴	$SN(1, 1, 3)$	
۰.۱۵۶۴	۰.۱۵۰۷	۰.۱۱۹۹	۰.۱۵۶۵	۰.۱۲۶۹	۰.۱۲۶۹	۰.۱۲۶۹	۰.۱۲۶۲	۰.۱۲۶۲	۰.۱۲۶۹	۰.۲۰۰۷	۰.۲۰۰۷	۰.۱۶۸۳				

جدول ۹: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌هایی با تکیه‌گاه (۱، ۰).

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مثل‌های دقیق	n
۰.۱۷۷۳	۰.۱۸۶۸	۰.۱۷۱۴	۰.۲۰۲۹۷	۰.۱۸۲۱	۰.۱۷۲۴	۰.۱۷۲۴	۰.۱۷۰۳	۰.۲۰۸۶۳	۰.۱۷۲۴	۰.۱۴۰۲	۰.۲۰۵۴۱	۰.۱۴۰۲	۰.۲۰۲۸۴	۰.۱۴۰۲	Uni form	۱۰
۰.۶۲۳۸	۰.۶۲۷۵	۰.۵۷۸۲	۰.۴۳۹۴	۰.۶۳۹۷	۰.۵۶۸۹	۰.۵۶۸۹	۰.۵۲۷۴	۰.۴۷۷۳	۰.۵۶۸۹	۰.۶۸۶۷	۰.۶۸۶۶	۰.۶۶۱۲	۰.۶۹۱۹	۰.۶۸۶۶	Beta(۰.۵, ۳)	۱۰
۰.۴۲۳۵	۰.۴۴۹۵	۰.۳۹۲۱	۰.۱۶۹۷	۰.۴۲۸۸	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۲۶۳	۰.۲۸۵۳	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۰۰۸	۰.۴۴۴۴	Beta(۰.۵, ۱)	۱۰
۰.۲۰۸۱۵	۰.۲۰۸۸۱	۰.۲۰۸۴۱	۰.۲۰۲۳۱	۰.۲۰۸۶۰	۰.۲۰۸۷۳	۰.۲۰۸۷۳	۰.۲۰۸۵۳	۰.۲۰۵۶۸	۰.۲۰۸۷۳	۰.۲۰۶۶۸	۰.۲۰۶۶۸	۰.۲۰۶۵۳	۰.۲۰۷۷۶	۰.۲۰۶۶۸	Beta(۲, ۲)	۱۰
۰.۴۳۵۷	۰.۴۳۱۴	۰.۴۲۸۳	۰.۳۰۳۱۰	۰.۴۳۳۳	۰.۳۸۸۴	۰.۳۸۸۱	۰.۳۷۵۰	۰.۱۲۸۷	۰.۳۸۸۴	۰.۴۴۲۸	۰.۴۴۲۸	۰.۴۳۷۳	۰.۳۳۳۳	۰.۴۴۲۷	Uni form	۲۰
۰.۹۵۷۲	۰.۹۵۵۹	۰.۹۳۳۵	۰.۷۹۰۴	۰.۹۵۸۸	۰.۹۲۱۶	۰.۹۲۱۶	۰.۹۱۸۳	۰.۸۲۷۲	۰.۹۲۱۶	۰.۹۷۵۰	۰.۹۷۵۰	۰.۹۶۵۹	۰.۸۲۰۵	۰.۹۷۵۰	Beta(۰.۵, ۳)	۲۰
۰.۸۶۲۵	۰.۸۶۱۴	۰.۸۱۲۹	۰.۳۳۹۷	۰.۸۶۰۸	۰.۸۲۴۶	۰.۸۲۴۶	۰.۸۲۰۱	۰.۵۵۲۶	۰.۸۲۴۶	۰.۸۸۵۸	۰.۸۸۵۸	۰.۸۸۵۸	۰.۸۸۲۵	۰.۸۸۵۸	Beta(۰.۵, ۱)	۲۰
۰.۱۲۱۳	۰.۱۲۴۶	۰.۱۲۶۹	۰.۲۰۱۵۵	۰.۱۳۸۸	۰.۱۲۱۸	۰.۱۲۱۸	۰.۱۲۲۵	۰.۲۰۵۵۰	۰.۱۲۱۸	۰.۱۴۰۴	۰.۱۴۰۴	۰.۱۲۷۵	۰.۱۶۲	۰.۱۴۰۴	Beta(۲, ۲)	۲۰

توان آزمون‌های ساخته‌شده بر اساس برآوردگرهای آنتروپی را با یکدیگر در سطح خطای $\alpha = ۰/۰۵$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه این مقایسه در جدول‌های ۶ تا ۹ آورده شده است و همچنین نتیجه نهایی را می‌توان در جدول ۱۰ مشاهده کرد.

جدول ۱۰: بهترین آزمون‌های نرمال بودن در گروه‌های مختلف

گروه	آزمون مبتنی بر	آزمون با عملکرد بهتر
اول	TVE_{mn}	ماکسیمم آنتروپی
دوم	TVE_{mn}	
سوم	$TV_{mn}, TW_{mn}, TE_{mn}$	
چهارم	TW_{mn}	
اول	TVE_J	روش جک‌نایف
دوم	TVE_J	
سوم	TV_J, TW_J, TE_J	
چهارم	TV_J, TW_J, TE_J	
اول	TVE_B	روش بوت‌استرپ
دوم	TVE_B	
سوم	TV_B	
چهارم	TV_B	

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله برآورد آنتروپی را به کمک روش‌های باز نمونه‌گیری جک‌نایف و بوت‌استرپ بررسی کردیم. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپی و جک‌نایف را از لحاظ اریبی و میانگین توان دوم خطا با

برآوردگرهای قبلی مقایسه کردیم. ملاحظه شد که با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ می‌توان عملکرد برآوردگرهای آنتروپی را بهبود بخشید. لذا در عمل استفاده از این روش‌ها را پیشنهاد می‌شود. سپس آزمون نرمال بودن توزیع جامعه را براساس برآوردگرهای بوت‌استرپ و جک‌نایف انجام دادیم و توان آزمون‌های مختلف را در مقابل فرضیه‌های جانشین با یکدیگر مقایسه نمودیم و مشاهده کردیم که در مقابل برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های پیشنهادی از توان خوبی برخوردار بودند و لذا در عمل می‌توانند بکار برده شوند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود و ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر را دارند.

مراجع

- حبیبی‌راد، آ. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی، مجله علوم آماری، ۱، ۱۰۹-۱۲۰.
- زمان‌زاده، ا. (۱۳۹۲)، آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، ۷، ۶۱-۷۵.
- زمان‌زاده، ا. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، ۲، ۱۷۹-۲۰۰.
- عباس‌نژاد، م. و شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی. مجله علوم آماری، ۴، ۲۰۱-۲۱۱.
- عباس‌نژاد، م. و محمدی، د. (۱۳۸۹)، آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی. مجله علوم آماری، ۴، ۲۱-۳۳.
- علیزاده، ه. و ارقامی، ن. ر. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه برآوردگرهای مختلف آنتروپی و توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای برآوردگرهای آنتروپی. مجله علوم آماری، ۲، ۲۱۳-۲۲۷.
- علیزاده، ه. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها. مجله علوم آماری، ۲، ۹۷-۱۱۳.

- Alizadeh Noughabi, H. (2010), A New Estimator of Entropy and Its Application in Testing Normality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 1151-1162
- Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N. R. (2011), Monte Carlo comparison of Five Exponentiality Tests Using Different Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 1579-1592
- Bradley, E. and Gail, G.(1983), A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation, *The American Statistician*, **37**, 36-48
- Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality based on Kullback-Leibler information with Pgressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 301-307
- Baratpour, S. and Habibi Rad. A. (2012), Testing Goodness of Fit for Exponential Distribution based an cumulative residual entropy, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **47**, 1387-1396
- Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-Based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974
- Choi, B. and Kim, K. (2006), Testing Goodness-of-Fit for Laplace Distribution Based on Maximum Entropy, *Statistics*, **40**, 517-531
- Correa, J. C., (1995), A New Estimator of Entropy. *Communications in Statistics– Theory and Methods*, **24**, 2439-2449
- Chhikara, R. S. and Folks, JL. (1977), The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model, *Technometrics*, **19**, 461-468
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy. *Statistics and Probability Letters*, **20**, 225-234
- Esteban, M. D., Castellanos, M. E., Morales, D. and Vajda, I. (2001), Monte Carlo Comparison of Four Normality Tests Using Different Entropy Estimates, *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, **30**, 761-285
- Habibi Rad, A., Yousefzadeh, F., and Balakrishnan, N. (2011), Goodness of-Fit Test Based on Kullback-Leibler Information for Progressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 570-579
- Kagan, A. M., Linnik, Y. and Rao, C. R. (1973), Characterization Problems in Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.
- Lim, J., and Park, S. (2007), Censored Kullback-Leibler Information and Goodness of- Fit Test with Type II Censored Data, *Journal of Applied Statistics*, **34**, 1051-1064

- Lee S., Vonta I., and Karagrigoriou, A. (2011), A Maximum Entropy Type Test of Fit. *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2635-2643
- Mudholkar, G. S., Natarajan R., and Chaubey Y. P. (2001), A Goodness-of-fit Test for the Inverse Gaussian Distribution Using its Independence Characterization. *Sankhya: Ser B*, **63**, 362-374
- Mudholkar, G. S. and Tian, L. (2002), An Entropy Characterization of the Inverse Gaussian Distribution and Related Goodness of Fit Test, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **102**, 211-221
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on The Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 22-26
- Rodriguez, P. P., Vaquera-Huerta, H., and Villasenor-Alva, J. (2009), A Goodness of- Fit Test for the Gumbel Distribution Based on Kullback-Leibler Information, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **38**, 842-855
- Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423; 623-656
- Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **38**, 54-59
- Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by Class of Statistics Based on Sapacings, *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 61-72
- Von Alven, W. H. (1964), Reliability Engineering by ARINC. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall
- Wieczorkowski, R. and Grzegorzewsky, P. (1999), Entropy Estimators Improvements and Comparisons, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **28**, 541-567
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499
- Zamanzade, E. and Arghami, N. R. (2011), Goodness of Fit Test Based on Correcting Moments of Modified Entropy Estimator, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 2077-2093