مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۸
جلد ۱۳، شماره ۱، ص ۵۷ – ۷۵
DOI: 10.29252/jss.13.1.57

مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارت در دو سبد بیمه ناهمگن با خسارت‌های وایبل

قباد برمال‌زن

گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۴/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

چکیده: ر این مقاله، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب محدب و ترتیب پراکندگی میان کوچکترین مقادیر خسارات با خسارات مستقل وایبل، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، تحت شرایطی روی توابع مفصل معروف، چندین مقایسه تصادفی میان کوچکترین مقادیر خسارات انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: کوچکترین مقدار خسارات، تابع بقای مفصل، مقایسه تصادفی، مدل نرخ خطر متناسب.

۱ مقدمه

یکی از مسائلی که همیشه مورد توجه شرکت‌های بیمه بوده، وجود مخاطره‌های بزرگ و به دنبال آن خسارات بزرگ است. چنین خساراتی، می‌توانند موقعیت و پایداری شرکت‌های بیمه را تغییر و به مخاطره اندازند. سرمایه‌گذاری در یک محیط اقتصادی پرمخاطره، برای بسیاری از شرکت‌های سرمایه‌گذار از جمله شرکت‌های بیمه، به شرط انجام محاسبات معتبر، می‌تواند سود سرشاری را به همراه داشته باشد. از طرف دیگر، کوچکترین مقدار خسارت می‌تواند بیشترین سود را برای شرکت بیمه به دنبال داشته باشد. در این مقاله به مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارات پرداخته می‌شود. مقایسه تصادفی تعداد خسارات و مجموع خسارات در هر دو زمینه نظری و کاربردی، مورد علاقه بسیاری از آماردانان است. کارلین و نویکوف (۱۹۶۳)، ما (۲۰۰۰)، فراستیگ (۲۰۰۱)، هو و روان (۲۰۰۴)، دنوا و فراستیگ (۲۰۰۶)، خالدی و احمدی (۲۰۰۶)، برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۵) و اخیراً لی و لی (۲۰۱۶) هرکدام نتایجی را در مورد مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارات به دست آورده‌اند. تعاریف مربوط به انواع ترتیب‌های تصادفی و انواع

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: قباد برمال‌زن، ghobad.barmalzan@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05 ،60E15

بیشاندن در بخش ۲ ارائه شده است که در ادامه در بیان مروری بر ادبیات موضوع، از آنها استفاده شده است.

یک سبد بیمه به صورت $(I_{p_1}X_{\lambda_1}, \cdots, I_{p_n}X_{\lambda_n})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل با یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته باشند که در آن $X_{\lambda_i} \sim G(\lambda_i t)$. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. با قرار دادن $Y_i = I_{p_i}X_{\lambda_i}$، می‌توان نتیجه گرفت که برای $i = 1, \cdots, n$ متغیر تصادفی Y_i یک متغیر تصادفی پیوسته-گسسته (آمیخته) است که با احتمال $1 - p_i$ مقدار صفر و با احتمال p_i مقدار X_{λ_i} را اختیار می‌کند. در علم بیم‌سنجی، متغیر تصادفی $Y_{1:n} = \min\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ به کوچکترین مقدار خسارت در یک سبد بیمه معروف است. بطور مشابه، فرض کنید $Y^*_{1:n}$ بیانگر کوچکترین مقدار خسارت متناظر با متغیرهای تصادفی $Y^*_i = I_{p^*_i} X_{\lambda^*_i}$ برای $i = 1, \cdots, n$ باشد، که در آن $X_{\lambda^*_i} \sim G(\lambda^*_i t)$ و $I_{p^*_1}, \cdots, I_{p^*_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی برنولی مستقل از $X_{\lambda^*_i}$ ها با $E(I_{p^*_i}) = p^*_i$ است. برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۷) نشان دادند اگر شرایط

(الف) $\prod_{i=1}^n p_i \le \prod_{i=1}^n p^*_i$.

(ب) $(\log \lambda_1, \cdots, \log \lambda_n) \succeq_w (\log \lambda^*_1, \cdots, \log \lambda^*_n)$.

(ج) $t\, r(t)$ تابعی صعودی بر حسب t است.

برقرار باشند، آنگاه $Y^*_{1:n} \ge_{st} Y_{1:n}$. همچنین نشان دادند تحت شرایط

(الف) $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \succeq_w (\overset{w}{\succeq}) (\lambda^*_1, \cdots, \lambda^*_n)$.

(ب) $tr(t)$ تابعی صعودی و محدب (مقعر) در t است.

نابرابری تصادفی $Y^*_{1:n} \ge_{hr} (\le_{hr}) Y_{1:n}$ برقرار است. این نویسندگان، مصداق‌هایی از نتایج اثبات شده فوق را برای سه حالت خاص از مدل مقیاس یعنی برای توزیع‌های گامای تعمیم‌یافته، نمایی تعمیم‌یافته مارشال-الکین و وایبل نمایی‌شده با پارامترهای مقیاس متفاوت، ارائه کردند.

برمال‌زن و پاینده (۲۰۱۵) و برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۶) ترتیب‌های تصادفی گسترده از راست، محدب انتقال‌یافته، نسبت درست‌نمایی و پراکندگی میان کوچکترین مقادیر خسارات متناظر با دو سبد بیمه را مورد بررسی قرار دادند که در آن اندازه خسارات از توزیع وایبل پیروی می‌کنند. فرض کنید

$X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ ($X^*_{\lambda_1}, \cdots, X^*_{\lambda_n}$) یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل وایبل باشند که در آن $X_{\lambda_i} \sim W(\alpha, \lambda_i)$ ($X^*_{\lambda_i} \sim W(\alpha, \lambda^*_i)$)، همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ ($I_{p^*_1}, \cdots, I_{p^*_n}$) متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ ($E(I_{p^*_i}) = p^*_i$) باشند، که مستقل از X_{λ_i} ($X_{\lambda^*_i}$) ها هستند. آنگاه این نویسندگان، نتایج زیر را به دست آوردند:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^\alpha \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{RS} Y^*_{1:n}, \quad (\alpha > 0\ ,\ \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} p_i^*),$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^\alpha \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{c} Y^*_{1:n}, \quad (\alpha > 1\ ,\ \prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*),$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^\alpha \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{lr} Y^*_{1:n}, \quad (\alpha > 0),$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^\alpha \Longrightarrow X_{1:n} \geq_{disp} X^*_{1:n}, \quad (\alpha > 0),$$

در این مقاله، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب محدب و ترتیب پراکندگی میان کوچکترین مقادیر خسارات با خسارات مستقل وایبل، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، با توجه به اینکه ساختار وابستگی بین مقادیر خسارات در کارهای بیمه‌ای، معمول و منطقی‌تر است، مطالعه چندین ترتیب تصادفی میان مقادیر خسارات وابسته، تحت شرایطی روی چندین تابع مفصل معروف، مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و بیشاندن ارائه شده است. مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارات، با خسارات مستقل وایبل در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ به مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارات با خسارات وابسته و با توابع بقای مفصل مشترک ارشمیدسی، گامبل-هوگارد و کلایتون، پرداخته شده است. در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع بقای $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$، توابع وارون از راست پیوسته $F^{-1}(x)$ و $G^{-1}(x)$ باشند.

تعریف ۱: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵)
(الف) X در ترتیب تصادفی معمولی [1] بزرگتر از Y است $(X \geq_{st} Y)$، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$ داشته باشیم $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x)$.
(ب) X در ترتیب تصادفی نرخ خطر [2] بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$، هرگاه نسبت $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ تابعی صعودی از x باشد.

تصمیم‌گیری در مورد اینکه بین دو توزیع نامتقارن، کدامیک چوله‌تر است به‌سادگی امکان‌پذیر نیست. ون زویت (۱۹۷۰) ترتیب محدب انتقال‌یافته را معرفی نمود که براساس آن، می‌توان چولگی دو توزیع را با یکدیگر مقایسه کرد. نابرابری تصادفی $X \geq_c Y$ به این معنی است که چولگی X بیشتر از چولگی Y، چندین نوع مقایسه تصادفی را نشان می‌دهد که به مقایسه چولگی دو متغیر تصادفی می‌پردازد.

تعریف ۲: (الف) X در ترتیب محدب انتقال‌یافته[3] بزرگتر از Y است $(X \geq_c Y)$، هرگاه $F^{-1}G(x)$ تابعی محدب از x باشد.
(ب) X در ترتیب زیرجمعی[4] بزرگتر از Y است $(X \geq_{su} Y)$، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$ و $y \geq 0$

$$F^{-1}G(x+y) \geq F^{-1}G(x) + F^{-1}G(y),$$

تعریف ۳: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵)، فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(t) = P(X \leq t)$ و وارون از راست پیوسته‌ی $F^{-1}(p)$ باشد. برای سطح احتمال داده شده $p \in (0,1)$، مقدار در معرض مخاطره[5] $(VaR[X;p])$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR[X;p] = F^{-1}(p) = \sup\{t \in \mathbb{R} | P(X \leq t) \leq p\}.$$

تعریف ۴: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵) فرض کنید $Z_+ = \max(Z, 0)$. (الف) X در ترتیب تصادفی

---
[1] Usual stochastic order
[2] Hazard rate order
[3] Convex transform order
[4] Superadditive order
[5] Value at risk

پراکندگی [۶] بزرگتر از Y است ($X \geq_{disp} Y$)، هرگاه

$$(X - VaR[X;p])_+ \geq_{st} (Y - VaR[Y;p])_+ , \qquad p \in (\circ, \text{۱}),$$

(ب) X در ترتیب گسترده از راست[۷] بزرگتر از Y است ($X \geq_{RS} Y$)، هرگاه

$$\mathbb{E}(X - VaR[X;p])_+ \geq \mathbb{E}(Y - VaR[Y;p])_+, \qquad p \in (\circ, \text{۱}),$$

(ج) X در ترتیب تصادفی محدب[۸] بزرگتر از Y است ($X \geq_{cx} Y$)، هرگاه به ازای $d \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ و $\mathbb{E}(X-d)_+ \geq \mathbb{E}(Y-d)_+$.

وقتی X معرف مقدار خسارت بیمه‌گذار باشد، عبارت $\mathbb{E}(X - VaR[X;p])_+$ تفسیر جالبی در بیمه دارد. این کمیت، میانگین اختلاف بین سرمایه ذخیره شده (به منظور توانگری مالی) و مقدار خسارتی که بیمه‌گذار به شرکت بیمه وارد می‌کند را نشان می‌دهد. بیمه‌گر سعی دارد سرمایه ذخیره شده به گونه‌ای باشد که میانگین جاهایی که مقدار خسارت بیمه‌گذار، از این سرمایه بزرگتر می‌شود به اندازه کافی کوچک باشد. زیرا این کار باعث جلوگیری از ورشکستگی شرکت بیمه می‌شود.

میزان ناهمگنی میان سبد بیمه‌ها که به وسیله پارامترها منعکس می‌شود، می‌تواند با استفاده از مفهوم بیشاندن بین پارامترها مقایسه شود. بیشاندن روشی برای مقایسه دو بردار نامنفی با بعدهای یکسان، از لحاظ پراکندگی مؤلفه‌های آنها است. وقتی که نامساوی بیشاندن، بین دو بردار برقرار باشد سبد بیمه متناظر با جهت بیشاندن بزرگتر، ناهمگن‌تر از سبد بیمه دیگری است.

تعریف ۵: (مارشال و همکاران،۲۰۱۱)، فرض کنید $a_{(\text{۱})} \leq \cdots \leq a_{(n)}$ و $b_{(\text{۱})} \leq \cdots \leq b_{(n)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_\text{۱}, \cdots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_\text{۱}, \cdots, b_n)$ باشند.

(الف) بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن[۹] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$)، هرگاه برای $i = \text{۱}, \cdots, n-\text{۱}$، $\sum_{j=\text{۱}}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=\text{۱}}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=\text{۱}}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=\text{۱}}^{n} b_{(j)}$.

[6] Dispersive order
[7] Right-spread order
[8] Convex order
[9] Majorization

(ب) بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از بالا[۱۰] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b}$)، هرگاه به ازای هر $i = ۱, \cdots, n$ داشته باشیم $\sum_{j=۱}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=۱}^{i} b_{(j)}$.

(ج) بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از پایین[۱۱] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b}$)، هرگاه به ازای هر $i = ۱, \cdots, n$ داشته باشیم $\sum_{j=i}^{n} a_{(j)} \geq \sum_{j=i}^{n} b_{(j)}$.

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. زیرا اگر $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از $\mathbf{b}$ باشد ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$)، آنگاه دامنه بردار $\mathbf{a}$ یعنی $a_{(n)} - a_{(۱)}$ بزرگتر از دامنه بردار $\mathbf{b}$ یعنی $b_{(n)} - b_{(۱)}$ است و در نتیجه بردار $\mathbf{a}$ پراکنده‌تر از بردار $\mathbf{b}$ است. باید توجه داشت که ترتیب بیشاندن، ترتیب‌های بیشاندن ضعیف از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۶: (مارشال و همکاران،۲۰۱۱)، تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شُور-محدب[۱۲] نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b}),$$

همچنین، تابع ϕ شُور-مقعر[۱۳] نامیده می‌شود هرگاه جهت نابرابری فوق، عوض شود.

قضیه ۱: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)، فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز و $\phi : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ شُور-محدب (شُور-مقعر) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر

(الف) تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ متقارن باشد.

(ب) برای هر $i \neq j$ و هر $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^n$، رابطه

$$(z_i - z_j)\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(\mathbf{z})\right) \geq ۰ \; (\leq ۰),$$

برقرار باشد، که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial z_i}$ بیانگر مشتق جزئی تابع ϕ نسبت به مؤلفه iام است.

قضیه ۲: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)، فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و تعریف شده روی $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ باشند. آنگاه

---

[10] Weak supermajorization
[11] Weak submajorization
[12] Schur-convex
[13] Schur-concave

(الف) تابع ϕ روی A شُور-محدب و غیر صعودی است، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b}),$$

(ب) تابع ϕ روی A شُور-محدب و غیر نزولی است، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b}),$$

تعریف ۷: (مارشال و الکین، ۲۰۰۷)، خانواده توزیع‌های نامنفی F دارای خاصیت نرخ خطر غیر صعودی (DFR) است، اگر و تنها اگر $-\ln \bar{F}(x)$ تابعی مقعر در $x \in [0, \infty)$ باشد.

تعریف ۸: (مارشال و الکین، ۲۰۰۷)، توزیع F را لوگ-محدب[14] (لوگ-مقعر) گویند، هرگاه $\log f(x)$ نسبت به x محدب (مقعر) باشد.

تعریف ۹: بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ را با تابع توزیع توام F، تابع بقای توام $\bar{F}$ و توابع توزیع حاشیه‌ای‌های تک متغیره $F_1, \cdots, F_n$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $C : [0,1]^n \to [0,1]$ و $\hat{C} : [0,1]^n \to [0,1]$ چنان موجود باشند که

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= C(F(x_1), \cdots, F(x_n)), \\ \bar{F}(x_1, \cdots, x_n) &= \hat{C}(\bar{F}(x_1), \cdots, \bar{F}(x_n)), \end{aligned}$$

آنگاه $C(u_1, \cdots, u_n)$ و $\hat{C}(u_1, \cdots, u_n)$ به ترتیب تابع مفصل و تابع بقای مفصل $\mathbf{X}$ نامیده می‌شوند.

در این مقاله، از سه تابع بقای مفصل ارشمیدسی[15]، گامبل-هوگارد [16] و کلایتون [17] استفاده می‌شود.

تعریف ۱۰: فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل، با توابع بقای $\bar{F}_1, \cdots, \bar{F}_n$ باشند. هرگاه مقادیر ثابت مثبت $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ و تابع بقای پایه $\bar{F}(x)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$\bar{F}_i(x) = \bar{F}^{\lambda_i}(x).$$

[14]log-convex
[15]Archimedean survival copula
[16]Gumbel-Hougaard survival copula
[17]Clayton survival copula

در این صورت، متغیرهای $X_1, \cdots, X_n$ از مدل با نرخ خطر متناسب[18] پیروی می‌کنند و با نماد $PHR(\bar{F}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ نشان می‌دهند.

مدل با نرخ خطر متناسب شامل توزیع‌های معروفی مانند نمایی، وایبل، پارتو و لوماکس، به عنوان حالت خاص می‌شود (مارشال و الکین، (۲۰۰۷)،

۳ مقایسه‌های تصادفی با بردار خسارات مستقل

برمال‌زن و پاینده (۲۰۱۵) و برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۶) چندین نوع مقایسه تصادفی از جمله ترتیب‌های تصادفی گسترده از راست، محدب انتقال‌یافته، نسبت درست‌نمایی و پراکندگی را میان کوچکترین مقادیر خسارات متناظر با دو سبد بیمه ناهمگن، مورد بررسی قرار دادند که در آن، اندازه خسارات از توزیع وایبل پیروی می‌کنند. در این بخش، به بررسی چندین نوع دیگر، از این مقایسه‌های تصادفی پرداخته می‌شود.

برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۶) به اثبات ترتیب نسبت درست‌نمایی، میان کوچکترین مقادیر خسارات متناظر با دو سبد بیمه ناهمگن پرداختند. نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که کوچکترین مقادیر خسارت در نقطه صفر، دارای گسستگی است که این نکته در اثبات ترتیب درست‌نمایی، توسط این نویسندگان در نظر گرفته نشده است. بنابراین قضیه ۱ از برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۶) نیاز به بازنگری و اصلاح دارد و شرط $\prod_{i=1}^{n} p_i \leq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$ یک شرط ضروری برای برقراری ترتیب درست‌نمایی است.

قضیه ۳: فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل وایبل باشند به گونه‌ای که

$$X_{\lambda_i} \sim W(\alpha, \lambda_i), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. اگر شرط $\prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$ برقرار باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha} \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{st} (\geq_{sl}) Y_{1:n}^*.$$

[18]Proportional hazard rate (PHR)

برهان: تابع بقای کوچکترین مقدار خسارت یعنی $Y_{1:n}$ به صورت

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_{Y_{1:n}}(t) &= P(X_{\lambda_1} I_{p_1} > x, \cdots, X_{\lambda_n} I_{p_n} > x) \\
&= P(X_{\lambda_1} > x, \cdots, X_{\lambda_n} > x | I_{p_1} = 1, \cdots, I_{p_n} = 1) \\
&\times \quad P(I_{p_1} = 1, \cdots, I_{p_n} = 1) \\
&= P(X_{\lambda_1} > x, \cdots, X_{\lambda_n} > x)\, P(I_{p_1} = 1, \cdots, I_{p_n} = 1) \\
&= (\prod_{i=1}^{n} p_i) \prod_{i=1}^{n} P(X_{\lambda_i} > x) \\
&= (\prod_{i=1}^{n} p_i)\, e^{-t^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^{\alpha}}, \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

است. با استفاده از شرایط $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha}$ و $\prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$ نتیجه مطلوب، بسادگی حاصل می‌شود.

لم ۱: (برمال‌زن و پاینده، ۲۰۱۵) فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل وایبل باشند به گونه‌ای که

$$X_{\lambda_i} \sim W(\alpha, \lambda_i), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. اگر $\alpha \geq 1$ و $\prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$، آنگاه $Y_{1:n} \geq_c (\geq_{su}) Y_{1:n}^*$.

قضیه ۴: تحت مفروضات قضیه ۳، اگر $\alpha \geq 1$ و $\prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha} \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{disp} Y_{1:n}^*.$$

برهان: در حالت کلی، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب پراکندگی را نتیجه نمی‌دهد اما تحت برقرار بودن ترتیب زبرجمعی، می‌توان گفت ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب پراکندگی را نتیجه می‌دهد. چون ترتیب محدب، ترتیب زبرجمعی را نتیجه می‌دهد بنابراین طبق لم ۱ نتیچه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه ۱: تحت مفروضات قضیه ۳، اگر $\alpha \geq ۱$ و $\prod_{i=۱}^{n} p_i \geq \prod_{i=۱}^{n} p_i^*$، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha} \leq \sum_{i=۱}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha} \Longrightarrow VaR(Y_{۱:n}) \geq Var(Y_{۱:n}^*),$$

نتیجه ۲: تحت مفروضات قضیه ۳، فرض کنید $\alpha \geq ۱$ و $\prod_{i=۱}^{n} p_i \geq \prod_{i=۱}^{n} p_i^*$. در این صورت
(الف) اگر $\lambda^* \geq (\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha})^{۱/\alpha}$ و $p^* \leq (\prod_{i=۱}^{n} p_i)^{۱/n}$ باشد، آنگاه $Y_{۱:n} \geq_{disp} Y_{۱:n}^*$.
(ب) اگر $\lambda^* \leq (\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha})^{۱/\alpha}$ و $p^* \geq (\prod_{i=۱}^{n} p_i)^{۱/n}$ باشد، آنگاه $Y_{۱:n}^* \geq_{disp} Y_{۱:n}$.

قضیه ۵: تحت مفروضات قضیه ۳، اگر $\prod_{i=۱}^{n} p_i \geq \prod_{i=۱}^{n} p_i^*$ و $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha} \leq \sum_{i=۱}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha}$، آنگاه برای $\alpha > ۰$

$$(\frac{\prod_{i=۱}^{n} p_i}{\prod_{i=۱}^{n} p_i^*})^{\alpha} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha}}{\sum_{i=۱}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha}} \Longrightarrow Y_{۱:n} \geq_{cx} Y_{۱:n}^*.$$

برهان: با استفاده از بند (ج) از تعریف ۴، کافی است نشان داده شود

$$\mathbb{E}(Y_{۱:n}) = \mathbb{E}(Y_{۱:n}^*) \quad , \quad \mathbb{E}(Y_{۱:n} - d)_+ \geq \mathbb{E}(Y_{۱:n}^* - d)_+$$

برای $d \in \mathbb{R}$ برقرارند. چون $Y_{۱:n}$ یک متغیر تصادفی آمیخته است بنابراین به سادگی می‌توان نشان داد

$$\mathbb{E}(Y_{۱:n}) = \frac{(\prod_{i=۱}^{n} p_i)}{(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha})^{۱/\alpha}}\,\Gamma(۱ + \alpha^{-۱}),$$
$$\mathbb{E}(Y_{۱:n}^*) = \frac{(\prod_{i=۱}^{n} p_i^*)}{(\sum_{i=۱}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha})^{۱/\alpha}}\,\Gamma(۱ + \alpha^{-۱}),$$

که با استفاده از شرط $(\frac{\prod_{i=۱}^{n} p_i}{\prod_{i=۱}^{n} p_i^*})^{\alpha} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\alpha}}{\sum_{i=۱}^{n} (\lambda_i^*)^{\alpha}}$ می‌توان نتیجه گرفت $\mathbb{E}(Y_{۱:n}) = \mathbb{E}(Y_{۱:n}^*)$. از طرف دیگر، چون $\mathbb{E}(Y_{۱:n} - d)_+ = \int_d^{\infty} \bar{F}_{Y_{۱:n}}(t)\,dt$ است بنابراین با استفاده از قضیه ۳ و این واقعیت که ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب زیان بس را نتیجه می‌دهد، برابری $\mathbb{E}(Y_{۱:n} - d)_+ \geq \mathbb{E}(Y_{۱:n}^* - d)_+$ برای $d \in \mathbb{R}$ برقرار است.

۴ مقایسه‌های تصادفی با بردار خسارات وابسته تحت توابع مفصل مختلف

در بخش قبل، مقادیر خسارات به‌صورت مستقل در نظر گرفته شدند. اما باید توجه داشت که در حالت کلی مقادیر خسارات نمی‌توانند مستقل باشند. زیرا که از یک ساختار تولید ادعای خسارت ناشی شده‌اند یا تحت تاثیر یک محیط خاص اقتصادی یا فیزیکی قرار دارند. بنابراین از فرض استقلال تخطی می‌شود و نمی‌توان از آن برای یافتن تابع بقای کوچکترین مقادیر خسارات استفاده نمود. خسارات مربوط به بیمه‌نامه‌های یک سبد بیمه که از یک منطقه جغرافیایی انتخاب شده‌اند مانند خسارات بیمه‌نامه‌های زمین لرزه در یک شهر خاص، به هم وابسته هستند. مثال دیگر اینکه در یک روز مه‌آلود، همه اتومبیل‌های در حال حرکت واقع در یک ناحیه، به علت شرایط بد جوی دارای احتمال تصادف بالایی هستند و به این ترتیب، شدت خسارات وارده به اتومبیل‌ها با تعداد خسارات وابسته‌اند و یا در بیمه عمر، گواه کافی وجود دارد که بین طول عمر زن و شوهر و کیفیت زندگی آنان (مانند رفاه مالی، آسایش و آرامش و غیره) وابستگی وجود دارد. با توجه به مطالب فوق، چون ساختار وابستگی بین مقادیر خسارات در کارهای بیمه‌ای، معمول‌تر و منطقی‌تر است بنابراین مطالعه و بررسی ترتیب‌های تصادفی میان مقادیر خسارات وابسته، می‌تواند یکی از اهداف مهم این بخش باشد.

قضیه ۶: فرض کنید $X_{\lambda_1},\cdots,X_{\lambda_n}$ دارای تابع مفصل بقای ارشمیدسی

$$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)=\psi\left(\phi(u_1)+\cdots+\phi(u_n)\right),$$

باشند که در آن ψ تابع مولد و $\phi=\psi^{-1}$ و $X_{\lambda_i}\sim W(\alpha,\lambda_i)$، $i=1,\cdots,n$. همچنین فرض کنید $I_{p_1},\cdots,I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i})=p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند.

(الف) اگر $((\lambda_1^*)^\alpha,\cdots,(\lambda_n^*)^\alpha)\succeq_w(\lambda_1^\alpha,\cdots,\lambda_n^\alpha)$ و ψ تابعی لوگ محدب و $\prod_{i=1}^n p_i\le\prod_{i=1}^n p_i^*$ باشد، آنگاه $Y^*_{1:n}\ge_{st}Y_{1:n}$.

(ب) اگر $((\lambda_1^*)^\alpha,\cdots,(\lambda_n^*)^\alpha)\overset{w}{\succeq}(\lambda_1^\alpha,\cdots,\lambda_n^\alpha)$ و ψ تابعی لوگ مقعر و $\prod_{i=1}^n p_i^*\le\prod_{i=1}^n p_i$ باشد، آنگاه $Y_{1:n}\ge_{st}Y^*_{1:n}$.

برهان: (الف) تابع بقای کوچکترین مقدار خسارت $Y_{1:n}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{1:n}}(x) &= P(X_{\lambda_1} I_{p_1} > x, \cdots, X_{\lambda_n} I_{p_n} > x)\\ &= P(X_{\lambda_1} > x, \cdots, X_{\lambda_n} > x)\, P(I_{p_1} = 1, \cdots, I_{p_n} = 1)\\ &= \big(\prod_{i=1}^{n} p_i\big)\, \bar{F}(x, \cdots, x)\\ &= \big(\prod_{i=1}^{n} p_i\big)\, \hat{C}(\bar{F}_1(x), \cdots, \bar{F}_n(x))\\ &= \big(\prod_{i=1}^{n} p_i\big)\, \psi\big(\sum_{i=1}^{n} \phi(e^{-\lambda_i^\alpha x^\alpha}\big), \qquad (1)\end{aligned}$$

فرض کنید $\prod_{i=1}^{n} p_i \leq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$. بنابراین با استفاده از رابطه ۱ نتیجه لازم زمانی حاصل می‌شود که $X_{1:n} \geq_{st} X^*_{1:n}$. اکنون با استفاده از بند (الف) قضیه ۱.۴ از لی و لی (۲۰۱۴)، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

(ب) اثبات این بند با استفاده از بند (ب) قضیه ۱.۴ از لی و لی (۲۰۱۴) و بند (الف) همین قضیه، حاصل می‌شود.

قضیه ۷: فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ ($X_{\lambda_1^*}, \cdots, X_{\lambda_n^*}$) دارای تابع مفصل بقای گامبل–هوگارد

$$\hat{C}(u_1, \cdots, u_n) = \exp\{-\Big((-\ln u_1)^\theta + \cdots + (-\ln u_n)^\theta\Big)^{1/\theta}\}, \qquad \theta \geq 1,$$

باشند، که در آن $X_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ($X^*_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{G}, \mu_1, \cdots, \mu_n)$). همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i}ها هستند. اگر $\prod_{i=1}^{n} p_i \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^*$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\theta \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\theta$ و $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ نسبت به x صعودی باشند، آنگاه $Y^*_{1:n} \geq_{hr} Y_{1:n}$.

برهان: تابع بقای کوچکترین مقدار خسارت $Y_{1:n}$ عبارت است از:

$$\bar{F}_{Y_{1:n}}(x) = \big(\prod_{i=1}^{n} p_i\big)\, \bar{F}(x, \cdots, x)$$

$$\begin{aligned} &= \Big(\prod_{i=۱}^{n} p_i\Big)\, \hat{C}(\bar{F}_۱(x), \cdots, \bar{F}_n(x)) \\ &= \Big(\prod_{i=۱}^{n} p_i\Big)\, \exp\Big\{ -\Big((-\ln \bar{F}^{\lambda_۱}(x))^{\theta} + \cdots + (-\ln \bar{F}^{\lambda_n}(x))^{\theta}\Big)^{۱/\theta} \Big\} \\ &= \Big(\prod_{i=۱}^{n} p_i\Big)\, \bar{F}(x)^{(\sum_{i=۱}^{n} \lambda^{\theta}_i)^{۱/\theta}} \end{aligned} \tag{۲}$$

فرض کنید متغیرهای تصادفی واسطه $Z_{\mu_۱}, \cdots, Z_{\mu_n}$ مستقل از I_{p_i} ها باشند به گونه‌ای که

$$Z_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \mu_۱, \cdots, \mu_n) \qquad , \qquad i = ۱, \cdots, n.$$

اگر $W_{۱:n} = \min\{I_{p_۱} Z_{\mu_۱}, \cdots, I_{p_n} Z_{\mu_n}\}$، در این صورت

$$\frac{\bar{F}_{Y_{۱:n}}(x)}{\bar{F}_{W_{۱:n}}(x)} = \bar{F}(x)^{(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\theta})^{۱/\theta} - (\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta})^{۱/\theta}}. \tag{۳}$$

بنابراین تابع ۳، صعودی است هرگاه $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{\theta} \leq \sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta}$، که نتیجه می‌دهد $Y_{۱:n} \geq_{hr} W_{۱:n}$. برای رسیدن به نتیجه مطلوب، اکنون کافی است نشان داده شود $W_{۱:n} \geq_{hr} Y^{*}_{۱:n}$. به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\bar{F}_{Y^{*}_{۱:n}}(x) = \Big(\prod_{i=۱}^{n} p^{*}_i\Big)\, \bar{G}(x)^{(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta})^{۱/\theta}}.$$

بنابراین

$$\frac{\bar{F}_{W_{۱:n}}(x)}{\bar{F}_{Y^{*}_{۱:n}}(x)} = \Big(\frac{\prod_{i=۱}^{n} p_i}{\prod_{i=۱}^{n} p^{*}_i}\Big)\Big(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}\Big)^{(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta})^{۱/\theta}} \qquad x \geq ۰.$$

در نتیجه نسبت $\bar{F}_{W_{۱:n}}(x)/\bar{F}_{Y^{*}_{۱:n}}(x)$ صعودی است، هرگاه $\lim_{x\to ۰}(\bar{F}_{W_{۱:n}}(x)/\bar{F}_{Y^{*}_{۱:n}}(x)) \geq ۱$ و $(\bar{F}(x)/\bar{G}(x))^{(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta})^{۱/\theta}}$ نسبت به x صعودی باشند. از $\lim_{x\to ۰}(\bar{F}_{W_{۱:n}}(x)/\bar{F}_{Y^{*}_{۱:n}}(x)) \geq ۱$ نتیجه می‌شود $\prod_{i=۱}^{n} p^{*}_i \geq \prod_{i=۱}^{n} p_i$ و از صعودی بودن $(\bar{F}(x)/\bar{G}(x))^{(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{\theta})^{۱/\theta}}$، صعودی بودن $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ نتیجه می‌شود. با ترکیب کردن موارد فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۸: فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ $(X_{\lambda_1^*}, \cdots, X_{\lambda_n^*})$ دارای تابع مفصل بقای گامبل-هوگارد

$$\hat{C}(u_1, \cdots, u_n) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + \cdots + (-\ln u_n)^\theta)^{1/\theta}\}, \qquad \theta \geq 1,$$

باشند، که در آن $X_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(X_{\lambda_i}^* \sim PHR(\bar{G}, \mu_1, \cdots, \mu_n))$. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i}ها هستند. تحت شرایط

(الف) $\prod_{i=1}^n p_i^* \geq \prod_{i=1}^n p_i$.

(ب) نسبت $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ صعودی در x باشد.

(ج) $-\ln \bar{F}(x)$ یا $-\ln \bar{G}(x)$ تابعی مقعر باشند.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^\theta \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^\theta \Longrightarrow Y_{1:n} \geq_{disp} Y_{1:n}^*.$$

برهان: شرایط (الف) و (ب) به همراه $\sum_{i=1}^n \lambda_i^\theta \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^\theta$ منجر به برقراری نابرابری $Y_{1:n} \geq_{hr} Y_{1:n}^*$ می‌شوند. از طرف دیگر، مقعر بودن $-\ln \bar{F}(x)$ یا $-\ln \bar{G}(x)$ باعث DFR بودن توزیع‌های $Y_{1:n}$ یا $Y_{1:n}^*$ می‌شوند. بنابراین با توجه به قضیه B.۳.۲۰ ، صفحه ۱۵۶، از شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، نتیجه لازم به دست می‌آید.

نکته‌ای که لازم است متذکر شد این است که تابع مفصل بقای گامبل-هوگارد به ازای $\theta = 1$ برابر تابع بقا کوچکترین آماره مرتب متشکل از متغیرهای تصادفی مستقل، خواهد بود. برای زمانی که $\theta = 1$ و X_{λ_i} ها دارای توزیع وایبل باشند قضیه بالا، معادل با قضیه ۴ خواهد شد.

قضیه ۹: فرض کنید $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ $(X_{\lambda_1^*}, \cdots, X_{\lambda_n^*})$ دارای تابع مفصل بقای گامبل-هوگارد

$$\hat{C}(u_1, \cdots, u_n) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + \cdots + (-\ln u_n)^\theta)^{1/\theta}\}, \qquad \theta \geq 1,$$

باشند، که در آن $X_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(X_{\lambda_i}^* \sim PHR(\bar{F}, \mu_1, \cdots, \mu_n))$. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i}

ها هستند. اگر $\prod_{i=1}^{n} p_i^* \geq \prod_{i=1}^{n} p_i$، آنگاه

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \succeq_w (\mu_1, \cdots, \mu_n) \Longrightarrow Y_{1:n} \leq_{st} Y^*_{1:n}.$$

برهان: تابع بقای کوچکترین مقدار خسارت $Y_{1:n}$ عبارت است از:

$$\bar{F}_{Y_{1:n}}(x) = \big(\prod_{i=1}^{n} p_i\big)\ \bar{F}(x)^{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\theta})^{1/\theta}}$$

فرض کنید $\prod_{i=1}^{n} p_i^* \geq \prod_{i=1}^{n} p_i$. در این صورت طبق بند (ب) قضیه ۲ کافی است نشان داده شود

$$g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \bar{F}(x)^{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\theta}\right)^{1/\theta}}$$

تابعی غیر صعودی و شُور-مقعر در بردار $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ است. مشتق جزئی $g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ نسبت به λ_i عبارت است از:

$$\frac{\partial g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)}{\partial \lambda_i} = g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,(\ln \bar{F}(x))\,\lambda_i^{\theta-1}\,\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\theta}\big)^{1/\theta}$$

چون $\ln \bar{F}(x) \leq 0$ بنابراین تابع $g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ تابعی غیرصعودی در λ_i است. برای هر $i \neq j$ داریم

$$I = (\lambda_i - \lambda_j), g(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_n), (\ln \bar{F}(x)), \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\theta}\big)^{1/\theta}, (\lambda_i^{\theta-1} - \lambda_j^{\theta-1}),$$

اگر $\lambda_i \geq \lambda_j$ آنگاه $\lambda_i^{\theta-1} \geq \lambda_j^{\theta-1}$ و چون مقدار $\ln \bar{F}(x)$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر است بنابراین $I \leq 0$ و در نتیجه تابع $g(x)$ شُور-مقعر در بردار $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ است و از این رو نتیجه مطلوب، حاصل می‌شود.

لازم است توجه شود که هیچکدام از شرایط $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{\theta} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\theta}$ و $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \succeq_w$ $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ یکدیگر را نتیجه نمی‌دهند. به عنوان مثال، اگر $(\lambda_1, \lambda_2) = (10, 1)$ و $(\mu_1, \mu_2) =$

(۴,۸) باشند بدیهی است $\lambda_۱ + \lambda_۲ \leq \mu_۱ + \mu_۲$ اما برای $\theta = ۲$ داریم $\lambda_۱^\theta + \lambda_۲^\theta \geq \mu_۱^\theta + \mu_۲^\theta$. بنابراین تمایز بین دو قضیه ۸ و ۹ کاملاً واضح است. بدین معنی که یک مجموعه بردار از مقادیر خسارات که در شرایط قضیه ۸ صدق نمی‌کنند ممکن است در شرایط قضیه ۹ صدق کنند و بالعکس.

قضیه ۱۰: فرض کنید $X_{\lambda_۱}, \cdots, X_{\lambda_n}$ $(X_{\lambda_۱^*}, \cdots, X_{\lambda_n^*})$ دارای تابع مفصل بقای کلایتون با تابع مفصل

$$\hat{C}(u_۱, \cdots, u_n) = \left(u_۱^\theta + \cdots + u_n^\theta\right)^{-۱/\theta}, \qquad \theta \geq ۱,$$

باشند، که در آن $X_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n)$ $(X_{\lambda_i} \sim PHR(\bar{F}, \mu_۱, \cdots, \mu_n))$. همچنین فرض کنید $I_{p_۱}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. اگر $\prod_{i=۱}^n p_i^* \geq \prod_{i=۱}^n p_i$ باشد، آنگاه

$$(\lambda_۱, \cdots, \lambda_n) \overset{w}{\succeq} (\mu_۱, \cdots, \mu_n) \Longrightarrow Y_{۱:n}^* \geq_{st} Y_{۱:n}.$$

برهان: تابع بقای کوچکترین مقدار خسارت $Y_{۱:n}$ عبارت است از:

$$\bar{F}_{Y_{۱:n}}(x) = \Big(\prod_{i=۱}^n p_i\Big) \, (\bar{F}^{\lambda_۱\theta}(x) + \cdots + \bar{F}^{\lambda_n\theta}(x))^{-۱/\theta}.$$

فرض کنید $\prod_{i=۱}^n p_i^* \geq \prod_{i=۱}^n p_i$. در این صورت کافی است طبق بند (الف) قضیه ۲ نشان داده شود

$$g(x, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n) = (\bar{F}^{\lambda_۱\theta}(x) + \cdots + \bar{F}^{\lambda_n\theta}(x))^{-۱/\theta}$$

تابعی غیرنزولی و شُور-مقعر در بردار $(\lambda_۱, \cdots, \lambda_n)$ است. مشتق جزئی $g(x, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n)$ نسبت به λ_i عبارت است از:

$$\frac{\partial g(x, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n)}{\partial \lambda_i} = -\, g(x, \lambda_۱, \cdots, \lambda_n) \, (\ln \bar{F}(x)) \, \frac{\bar{F}^{\lambda_i\theta}(x)}{\bar{F}^{\lambda_۱\theta}(x) + \cdots + \bar{F}^{\lambda_n\theta}(x)}.$$

واضح است $g(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ تابعی غیرنزولی از λ_i است. برای هر $i\neq j$ داریم

$$
\begin{aligned}
I &= (\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial g(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial g(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}{\partial\lambda_j}\Big)\\
&= g(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,\ln\bar F(x)\,\frac{1}{\bar F^{\lambda_1\theta}(x)+\cdots+\bar F^{\lambda_n\theta}(x)}\,(\lambda_i-\lambda_j)\\
&\times\quad(\bar F^{\lambda_j\theta}(x)-\bar F^{\lambda_i\theta}(x)),
\end{aligned}
$$

اگر $\lambda_i\geq\lambda_j$ آنگاه $\bar F^{\lambda_j\theta}(x)\geq\bar F^{\lambda_i\theta}(x)$ و چون مقدار $\ln\bar F(x)$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر است، بنابراین $I\leq 0$. در نتیجه تابع $g(x,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ شُور-مقعر در بردار $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ است و از این رو نتیجه مطلوب، حاصل می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده در این مقاله، در دو راستا است. ابتدا چندین نوع مقایسه تصادفی میان کوچکترین مقادیر خسارات مورد بررسی قرار گرفته است که در آن خسارات مستقل و دارای توزیع وایبل هستند. باید توجه داشت که در حالت کلی مقادیر خسارات نمی‌توانند مستقل باشند. زیرا که از یک ساختار تولید ادعای خسارت ناشی شده‌اند یا تحت تاثیر یک محیط خاص اقتصادی یا فیزیکی قرار دارند. بنابراین از فرض استقلال تخطی می‌شود و نمی‌توان از آن برای یافتن تابع بقای کوچکترین مقادیر خسارات استفاده نمود. چون ساختار وابستگی بین مقادیر خسارات در کارهای بیمه‌ای، معمول‌تر و منطقی‌تر است از این رو، مطالعه و بررسی ترتیب‌های تصادفی میان مقادیر خسارات وابسته، حائز اهمیت است. بنابراین به مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارات پرداخته شده است که در آن خسارات، وابسته و دارای توابع مفصل ارشمیدسی، گامبل-هوگارد و کلایتون هستند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شده است کمال قدردانی و تشکر فراوان را دارند. این تحقیق با حمایت مالی دانشگاه زابل انجام شده است. شماره گرنت: UOZ-GR-9517-61.

مراجع

Barmalzan, G. and Payandeh Najafabadi, A. T. (2015), On the Convex Transform and Right-Spread Orders of Smallest Claim Amounts, *Insurance: Mathematics and Economics*, **64**, 380-384.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T. and Balakrishnan, N. (2016), Likelihood Ratio and Dispersive Orders for Smallest Order Statistics and Smallest Claim Amounts from Heterogeneous Weibull Sample, *Statistics and Probability Letters*, **110**, 1-7.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T. and Balakrishnan, N. (2017), Ordering Properties of the Smallest and Largest Claim Amounts in a General Scale Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **20**, 105-124.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T. and Balakrishnan, N. (2015), Stochastic Comparison of Aggregate Claim Amounts between Two Heterogeneous Portfolios and Its Applications, *Insurance: Mathematics and Economics*, **61**, 235-241.

Denuit, M. and Frostig, E. (2006), Heterogeneity and the Need for Capital in the Individual Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 42-66.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons, Ltd.

Fang, L. and Zhang, X. (2013), Stochastic Comparisons of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components, *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

Frostig, E. (2001), A Comparison between Homogeneous and Heterogeneous Portfolios, *Insurance: Mathematics and Economics*, **29**, 59-71.

Hu, T. and Ruan, L. (2004), A Note on Multivariate Stochastic Comparisons of Bernoulli Random Variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**, 281-288.

Karlin, S. and Novikoff, A. (1963), Generalized Convex Inequalities. *Pacific Journal of Mathematics*, **13**, 1251-1279.

Khaledi, B. and Ahmadi, S. S. (2008), On Stochastic Comparison between Aggregate Claim Amounts, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **138**, 3121-3129.

Li, C. and Li, X. (2014), Likelihood Ratio Order of Sample Minimum from Heterogeneous Weibull Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, **97**, 46-53.

Ma, C. (2000), Convex Orders for Linear Combinations of Random Variables, *Journal of Statistical Planning Inference*, **84**, 11-25.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika,* **84**, 641-652.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007), *Life Distributions*. Springer: New York.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Second edition, Springer, New York.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Van Zwet, W. R. (1970), Convex Transformations of Random Variables, *MC Tracts*, **7**, 1-16.