مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۸
جلد ۳، شماره ۲، ص ۲۰۹-۲۲۰

خانواده‌ای دیگر از توزیع‌های دو متغیره با استقلال و ناهمبستگی معادل

رضا هاشمی، قباد برمال‌زن، عابدین حیدری
گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۱۰/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۴/۱۶

چکیده : با توجه به این که در توزیع نرمال دو متغیره، ناهمبسته بودن دو متغیر تصادفی معادل با استقلال آن‌ها است لذا بررسی این موضوع که آیا توزیع نرمال دو متغیره، تنها توزیعی است که در آن ناهمبستگی معادل با استقلال است جالب به نظر می‌رسد. در این مقاله سعی شده است با ارائه مفاهیمی به این سؤال پاسخ داده شود و یک خانواده دیگر از توزیع‌ها معرفی شود که در آن ناهمبستگی معادل با استقلال است.

واژه‌های کلیدی : استقلال، تعویض پذیری، توزیع نرمال دو متغیره، خانواده فارلی-گامبل-مورگنشترن، ناهمبستگی.

۱ مقدمه

معمولاً تجسم یک تابع چگالی احتمال توأم خیلی واضح نیست و اطلاع از تابع چگالی احتمال‌های حاشیه‌ای، برای ساختن این توزیع‌های توأم کافی نیست. تقریباً به طور غیر قابل اجتنابی برای توصیف توزیع‌های توأم، لازم است قسمت‌های

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: رضا هاشمی، rezahmi@yahoo.fr

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲F۹۹ و ۶۲H۹۹

مشترکی از چگالی‌ها بررسی شوند که پس از نرمالیزه شدن به عنوان چگالی‌های شرطی شناخته می‌شوند. نقش این چگالی‌های شرطی در ساختن توزیع‌های توأم انکار ناپذیر است. این بحث در خصوص توزیع نرمال نیز برقرار می‌باشد. تنها تفاوت جزیی در خصوص توزیع نرمال، این است که ناهبسته بودن دو متغیر تصادفی نرمال، استقلال آن‌ها را نتیجه می‌دهد و در نتیجه چگالی‌های شرطی در این حالت به چگالی‌های حاشیه‌ای، تبدیل می‌شوند. لذا با شرط ناهمبستگی دو متغیر تصادفی نرمال، می‌توان با استفاده از چگالی‌های احتمال حاشیه‌ای، توزیع توأم را به‌دست آورد.

در این مقاله سعی شده به این سؤال پاسخ داده شود که آیا غیر از توزیع نرمال، توزیع‌های دیگری نیز وجود دارند که با در اختیار داشتن تابع چگالی‌های احتمال حاشیه‌ای، بتوان چگالی توأم آن‌ها را به‌دست آورد. به مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به جاشی (۱۹۷۸) اشاره نمود، که در آن توزیع دو متغیره‌ای ساخته شد که قادر بود حالت‌های خاصی را که به عنوان مثال نقض در پیشینه وجود داشته و به شرح ذیل می‌باشند توجیه نماید.

۱) وقتی دو متغیر مستقل هستند تابع مولد گشتاور توأم آن‌ها را می توان به شکل حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور حاشیه‌ای متغیرها نوشت. حال آن‌که اگر تابع مولد گشتاور توأم دو متغیر تصادفی، به صورت حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور حاشیه‌ای آن‌ها باشد در حالت کلی نمی‌توان گفت که آن دو متغیر تصادفی مستقل از هم هستند. (یک مثال آن در کرامر (۱۹۴۶) صفحه ۳۱۷ ارائه شده است)

۲) تابع چگالی‌های حاشیه‌ای از یک توزیع نرمال دو متغیره، نرمال هستند. اما می‌توان توزیع‌های دو متغیره غیرنرمالی را یافت که چگالی‌های حاشیه‌ای نرمال داشته باشند.

۳) توزیع توأم دو متغیر تصادفی غیرمستقل X و Y به نحوی باشد که $X^۲$ و $Y^۲$ بتوانند مستقل باشند (پارزن، ۱۹۶۰ ص. ۲۹۷).

متغیرهای تصادفی $X_۱, \dots, X_n$ با تابع‌های توزیع حاشیه‌ای $F_{X_۱}(\cdot), \dots, F_{X_n}(\cdot)$ و تابع توزیع توأم $F_{X_۱,\dots,X_n}(\cdot, \dots, \cdot)$ مستقل هستند اگر و فقط اگر به ازای هر

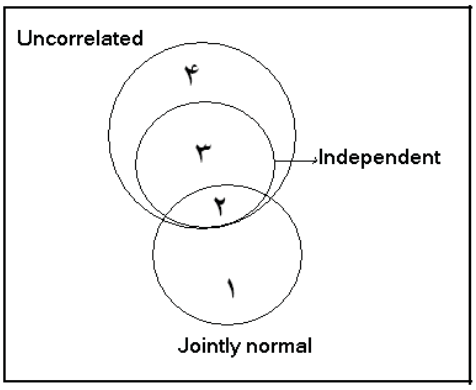
بردار $(x_1, \dots, x_n) \in \Re^n$ تساوی

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n),$$

برقرار باشد. بعلاوه دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 ناهمبسته هستند هرگاه $Cov(X_1, X_2) = 0$. در واقع ناهمبستگی بین دو متغیر تصادفی به این معنی است که آن دو متغیر تصادفی رابطه خطی با همدیگر ندارند، اما در عوض ممکن است رابطه بین آن‌ها از درجه دو یا بیشتر باشد. در حالی که استقلال بین دو متغیر به این معنی است که آن دو متغیر هیچ رابطه‌ای با یکدیگر ندارند. لذا بدیهی است که استقلال همواره ناهمبستگی را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.

شکل ۱ برای تمایز و درک بهتر رابطهٔ استقلال و ناهمبستگی می‌تواند مفید باشد. این شکل نشان‌دهنده کلاس تمام متغیرهای تصادفی (X_1, X_2) است. ناحیه ۱ متغیرهای توأماً نرمال را دربر دارد که مستقل و ناهمبسته نیستند. متغیرهای تصادفی نرمال دو متغیره با پارامترهای $(0, 0, 1, 1, \frac{1}{2})$ نمونه‌ای از این نوع متغیرها است. در ناحیه ۲ متغیرها توأماً نرمال بوده و ناهمبسته هستند، در نتیجه مستقل نیز هستند. به عنوان مثالی از این متغیرهای توأم، می‌توان به توزیع نرمال دو متغیره با پارامترهای $(0, 0, 1, 1, 0)$ اشاره کرد. ناحیه ۳ بیانگر متغیرهایی است که مستقل و ناهمبسته هستند ولی توزیع توأم آن‌ها نرمال نیست. نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲ از توزیع برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}$ مثالی از این گونه متغیرها است. ناحیه ۴ شامل متغیرهای توأمی است که ناهمبسته هستند ولی مستقل نیستند و توزیع توأم آن‌ها نرمال نیست. به عنوان مثالی از این متغیرها فرض کنید X_1 دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(-1, 1)$ و $X_2 = X_1^2$ باشد. واضح است که X_1 و X_2 ناهمبسته هستند ولی مستقل نبوده و توزیع توأم آن‌ها نرمال نیست.

در بخش ۲ این مقاله، برخی از مشخصه‌های توزیع نرمال دو متغیره که مورد نیاز است مرور می‌شوند. در بخش ۳ خانواده‌ای که در آن ناهمبستگی معادل استقلال است معرفی می‌گردد. بخش ۴ شامل محاسبه کواریانس این خانواده از توزیع‌های توأم و ارائه معیاری برای معادل بودن ناهمبستگی و استقلال است. در بخش ۵ عدم



شکل ۱: کلاس تمام متغیرهای تصادفی

تعلق توزیع نرمال توأم به این خانواده از توزیع‌های توأم مورد بررسی قرار گرفته است. سر انجام در بخش آخر به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲ دانسته‌های پیشین

در این بخش برخی خواص توزیع نرمال دو متغیره، که در ادامه مورد نیاز است، ارائه می‌شود. متغیرهای تصادفی $(X_۱, X_۲)$ دارای توزیع نرمال توأم با پارامترهای $(\mu_۱, \mu_۲, \sigma_۱^۲, \sigma_۲^۲, \rho)$ هستند هرگاه تابع چگالی توأم آن‌ها به صورت

$$f(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{۲\pi\sigma_۱\sigma_۲\sqrt{۱-\rho^۲}} \exp\{-Q(x_۱, x_۲)/۲\}, \quad |x_۱| < \infty, \ |x_۲| < \infty,$$

باشد، که در آن $|\mu_۱| < \infty$، $|\mu_۲| < \infty$، $\sigma_۱ > ۰$، $\sigma_۲ > ۰$، $|\rho| < ۱$ و $Q(x_۱, x_۲)$ تابعی درجه دو به صورت

$$\frac{۱}{۱-\rho^۲}\left\{\left(\frac{x_۱-\mu_۱}{\sigma_۱}\right)^۲ + \left(\frac{x_۲-\mu_۲}{\sigma_۲}\right)^۲ - ۲\rho\left(\frac{x_۱-\mu_۱}{\sigma_۱}\right)\left(\frac{x_۲-\mu_۲}{\sigma_۲}\right)\right\},$$

است. در این توزیع توأم، چگالی‌های حاشیه‌ای $X_۱$ و $X_۲$ هر دو نرمال تک متغیره به ترتیب با پارامترهای $(\mu_۱, \sigma_۱^۲)$ و $(\mu_۲, \sigma_۲^۲)$ هستند. تابع مولد گشتاور توأم این توزیع عبارت است از

$$M(t_۱, t_۲) = \exp\left\{\mu_۱ t_۱ + \mu_۲ t_۲ + \frac{\sigma_۱^۲ t_۱^۲ + \sigma_۲^۲ t_۲^۲ + ۲\rho\sigma_۱\sigma_۲ t_۱ t_۲}{۲}\right\}.$$

قضیه ۱ (ماردیا و همکاران، ۱۹۷۹): فرض کنید X_1 و X_2 دارای توزیع نرمال دو متغیره باشند. در این صورت X_1 و X_2 مستقل هستند اگر و فقط اگر ناهمبسته باشند.

۳ معرفی خانواده‌ای با استقلال و ناهمبستگی معادل

در این بخش خانواده‌ای از توزیع‌های توأم به غیر از خانواده توزیع نرمال دو متغیره معرفی می‌شود، که برای آن ناهمبستگی معادل استقلال است.

فرض کنید $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$ تابع‌های چگالی دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 و $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ به ترتیب تابع توزیع‌های متناظر با آن‌ها باشند. برای $|\alpha| \leq 1$، تابع

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \left\{1 + \alpha[2\,F_1(x_1) - 1]\,[2\,F_2(x_2) - 1]\right\},$$

را درنظر بگیرید. چون مقادیر $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ بین صفر و یک هستند، بنابراین

$$[2F_1(x_1) \; - \; 1]\,[2\,F_2(x_2) \; - \; 1] \leq 1,$$

در نتیجه برای $|\alpha| \leq 1$ همواره نامساوی زیر برقرار است

$$1 + \alpha[2F_1(x_1) - 1]\,[2F_2(x_2) - 1] \geq 0,$$

لذا $f_\alpha(x_1, x_2)$ تابعی نامنفی است. به‌علاوه

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= 1 + \alpha\,\left[F_1^2(x_1)|_{-\infty}^{+\infty} - 1\right]\,\left[F_2^2(x_2)|_{-\infty}^{+\infty} - 1\right] \\ &= 1.\end{aligned}$$

بنابراین تابع $f_\alpha(x_1, x_2)$ به ازای هر مقدار ثابت $|\alpha| \leq 1$ یک تابع چگالی احتمال توأم است. این تابع‌های چگالی عضو خانوادهٔ توزیع‌های فارلی-گامبل-مورگنشترن[1]

[1] Farlie-Gumbel-Morgenstern Family

هستند، که در آن پارامتر α مرتبط با ضریب همبستگی X_1 و X_2 است. به راحتی می‌توان نشان داد X_1 و X_2 به ترتیب دارای تابع‌های چگالی احتمال حاشیه‌ای $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$ هستند. همان طور که ملاحظه می‌شود چگالی توأم $f_\alpha(x_1, x_2)$ را نمی‌توان به صورت $f_\alpha(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)$ نوشت بجز در حالتی‌که $\alpha = 0$ است. لذا در این خانواده از توزیع‌های توأم، برای $\alpha \neq 0$، متغیرهای X_1 و X_2 مستقل نیستند.

ویژگی مهم این خانواده از توزیع‌ها این است که با داشتن تابع چگالی توأم می‌توان چگالی‌های حاشیه‌ای را به صورت منحصربفرد تعیین نمود، اما عکس آن میسر نیست. زیرا با معلوم بودن چگالی‌های حاشیه‌ای، برای مقادیر $|\alpha| \leq 1$، بینهایت تابع چگالی توأم وجود دارد.

۴ بررسی معادل بودن استقلال و ناهمبستگی

به منظور اثبات معادل بودن ناهمبستگی و استقلال برای توزیع‌های خانوادهٔ فارلی-گامبل-مورگنشترن، ابتدا کواریانس بین X_1 و X_2 را به دست آورده و با استفاده از شکل کلی آن، قضیه‌ای بیان و اثبات می‌شود.

به سادگی می‌توان نشان داد که در این خانواده تابع چگالی X_2 به شرط $X_1 = x_1$ به صورت

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = f_2(x_2)\{1 + \alpha[2F_1(x_1) - 1]\,[2F_2(x_2) - 1]\}.$$

و امید ریاضی X_2 به شرط $X_1 = x_1$ نیز به صورت

$$E(X_2|X_1 = x_1) = E(X_2) + \alpha[2\, F_1(x_1) - 1]\, E\{X_2[2\, F_2(X_2) - 1]\}.$$

است. بنابراین کواریانس X_1 و X_2 بر اساس توزیع‌های شرطی به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= Cov[E(X_2|X_1),\, X_1] \\ &= Cov\{E(X_2) + \alpha[2F_1(X_1) - 1]E\{X_2[2F_2(X_2) - 1]\}, X_1\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Cov[E(X_2), X_1] \\
&+ \alpha Cov\{[2F_1(X_1) - 1]E[X_2[2F_2(X_2) - 1]], X_1\} \\
&= 0 + \alpha E\{X_2[2F_2(X_2) - 1]\}Cov[2F_1(X_1) - 1, X_1] \\
&= 2\alpha E\{X_2[2F_2(X_2) - 1]\}Cov[F_1(X_1), X_1].
\end{aligned}
$$

لذا در صورت معلوم بودن تابع‌های توزیع X_1 و X_2 به راحتی می‌توان مقدار کواریانس را محاسبه نمود که تابعی از α است.

مثال ۱ : فرض کنید X_1 و X_2 دارای توزیع یکنواخت $U[0, 1]$ و چگالی توأم $f_\alpha(x_1, x_2)$ باشند، در این صورت داریم

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= 2\alpha E[X_2(2X_2 - 1)]Cov(X_1, X_1) \\
&= 2\alpha E(2X_2^2 - X_2)Var(X_1) \\
&= 2\alpha\{2[Var(X_2) + E^2(X_2)] - E(X_2)\}Var(X_1) \\
&= 2\alpha[2(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}]\frac{1}{12} \\
&= \frac{\alpha}{36}.
\end{aligned}
$$

مثال ۲ : فرض کنید X_1 و X_2 دارای توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال استاندارد و تابع چگالی احتمال توأم $f_\alpha(x_1, x_2)$ باشند. چون $E[X_2 F(X_2)] = (2\sqrt{\pi})^{-1}$، بنابراین

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= 2\alpha\, E[2X_2F(X_2) - X_2]Cov[F_1(X_1), X_1] \\
&= 2\alpha(2.\frac{1}{2\sqrt{\pi}} - 0).\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\alpha}{\pi}.
\end{aligned}
$$

با توجه به مطالب بیان شده معیاری برای معادل بودن ناهمبستگی و استقلال در این خانواده در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۲ : فرض کنید X_1 و X_2 دارای تابع چگالی احتمال توأم

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, \{1 + \alpha\, [2\, F_1(x_1) - 1]\, [2\, F_2(x_2) - 1]\},$$

باشند. اگر $E[X_2[2F_2(X_2) - 1]] \neq 0$، آنگاه X_1 و X_2 مستقل هستند اگر و فقط اگر ناهمبسته باشند.

برهان فرض کنید X_1 و X_2 ناهمبسته باشند آنگاه $Cov(X_1, X_2) = 0$. به عبارت دیگر

$$2\, \alpha E\{X_2\, [2\, F_2(X_2) - 1]\}\, Cov\, [F_1(X_1), X_1] = 0,$$

بدیهی است که $Cov\, [F_1(X_1), X_1] \neq 0$ است زیرا X_1 و $F_1(X_1)$ به هم وابسته‌اند. بنابراین با توجه به شرط قضیه، می‌بایست α برابر صفر باشد. لذا صفر بودن کواریانس معادل با صفر بودن α است و صفر بودن α نیز استقلال X_1 و X_2 را نتیجه می‌دهد. برعکس اگر X_1 و X_2 مستقل باشند شرط ناهمبسته بودن همواره برقرار است و در نتیجه اثبات کامل است.

تعریف ۱ متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ تعویض‌پذیر[2] نامیده می‌شوند هرگاه

$$(X_1, \ldots, X_n) \overset{d}{=} (X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}).$$

اکنون ویژگی‌های تعویض پذیری و هم توزیعی متغیرهای تصادفی در خانوادهٔ توزیع‌های معرفی شده در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۳ : فرض کنید Z_1 و Z_2 متغیرهای تصادفی با تابع‌های چگالی احتمال حاشیه‌ای به ترتیب f_1 و f_2 و متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 دارای تابع چگالی احتمال توأم

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, \{1 + \alpha\, [2\, F_1(x_1) - 1]\, [2\, F_2(x_2) - 1]\},$$

باشند، که در آن $|\alpha| \leq 1$. آنگاه

الف – X_1 هم توزیع با Z_1 و X_2 هم توزیع با Z_2 است.

[2] Exchangeable

ب - X_1 و X_2 تعویض‌پذیرند اگر و فقط اگر Z_1 هم توزیع با Z_2 باشد.

برهان اثبات قسمت (الف) بدیهی است. برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید X_1 و X_2 تعویض‌پذیر باشند. آنگاه $(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (X_2, X_1)$ و با توجه به توزیع توأم (X_1, X_2) نتیجه می‌شود که $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$ است. بنابراین طبق قسمت (الف) $Z_1 \stackrel{d}{=} Z_2$ است. برعکس فرض کنید $Z_1 \stackrel{d}{=} Z_2$ باشد. با توجه به قسمت (الف)، $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$ و در نتیجه $f_\alpha(x_1, x_2) = f_\alpha(x_2, x_1)$. یعنی X_1 و X_2 تعویض‌پذیرند و اثبات کامل است.

تذکر ۱ : اگر $X_1, \ldots, X_n$ تعویض‌پذیر باشند آنگاه X_iها هم توزیع هستند، اما لزومی ندارد X_iها مستقل باشند. بنابراین تعویض‌پذیری، ضعیفتر از iid بودن متغیرها است.

تذکر ۲ : تعویض‌پذیری همواره هم توزیعی را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۳ : فرض کنید (X_1, X_2) دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x_1^3 x_2), & |x_1| < 1, |x_2| < 1, \\ 0 & \text{سایر جا ها} \end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد X_1 و X_2 هم توزیع و دارای تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0 & \text{سایر جا ها} \end{cases}$$

هستند اما (X_1, X_2) تعویض پذیر نیستند.

بنابراین هم توزیعی، همواره تعویض‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد، اما براساس قضیه ۳ در خانواده توزیع‌های توأم فارلی-گامبل-مورگنشترن تعویض پذیری، هم توزیعی را نتیجه می‌دهد و هم توزیعی نیز تعویض پذیری را نتیجه می‌دهد. نکته‌ای که باید در اینجا متذکر شد این است که خاصیت استقلال در آمار، بر پایه اندازه احتمال بنا نهاده شده است. بنابراین ممکن است با جایگزین کردن اندازه احتمال دیگری،

خاصیت استقلال برقرار نباشد. به عبارت دیگر می‌توان گفت که استقلال ویژگی ذاتی متغیرها نیست و ممکن است با اندازه احتمال دیگری، این ویژگی ظاهر یا محو شود. به عنوان مثال اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال باشد، آنگاه $\bar{X}$ و S^2 از یکدیگر مستقل هستند. اما اگر X_iها دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشند، آنگاه $\bar{X}$ و S^2 مستقل نیستند. زیرا در توزیع پواسون $\bar{X}$ برآورد کننده $UMVU$ برای پارامتر λ است. لذا با توجه به قضیه لهمن شفه، چون کواریانس $\bar{X}$ و هر برآورد کننده نااریب صفر $g(\underline{X})$ برابر صفر است بنابراین با قرار دادن $g(\underline{X}) = \bar{X} - S^2$ به عنوان برآورد کننده نااریب صفر در قضیه لهمن شفه به سادگی دیده می‌شود

$$Cov\ \left[\bar{X},\, S^2\right] = \frac{\lambda}{n} \neq 0,$$

یعنی $\bar{X}$ و S^2 در توزیع پواسون مستقل نیستند.

۵ تمایز خانواده توزیع‌های معرفی شده از خانواده توزیع نرمال

در این بخش نشان داده می‌شود اگر $f_1(x_1)$ و $f_2(x_2)$ تابع‌های چگالی نرمال استاندارد باشند، $f_\alpha(x_1, x_2)$ نمی‌تواند به شکل توزیع نرمال توأم باشد. اگر (X_1, X_2) دارای توزیع توأم نرمال باشد، باید $E[X_1] = E[X_2] = 0$ و $Var[X_1] = Var[X_2] = 1$ باشد. به عبارت دیگر باید به ازای تمام $(x_1, x_2) \in \Re^2$ داشته باشیم

$$\begin{aligned} & f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, \{1 + \alpha\, [2\, F_1(x_1) - 1]\, [2\, F_2(x_2) - 1]\} = \\ & \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\, \left[x_1^2 + x_2^2 - 2\rho\, x_1\, x_2\right]\right\}, \end{aligned} \qquad (1)$$

لذا باید $(x_1, x_2) = (0, 0)$ نیز در رابطه (۱) صدق کند. به عبارت دیگر باید

$$f_1(0)\, f_2(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}},$$

در نتیجه باید $\rho = 0$ باشد. بنابراین اگر تابع چگالی‌های حاشیه‌ای X_1 و X_2 نرمال استاندارد باشند زمانی توزیع توأم آن‌ها نرمال است که ضریب همبستگی آن‌ها صفر

باشد. اما از طرفی هرگاه $\rho = ۰$ باشد آنگاه با جایگذاری در رابطه (۱) داریم

$$f_۱(x_۱)f_۲(x_۲) = f_۱(x_۱)\, f_۲(x_۲) + \alpha\, f_۱(x_۱)\, f_۲(x_۲)[۲\, F_۱(x_۱) - ۱]\, [۲\, F_۲(x_۲) - ۱],$$

اما به ازای $(x_۱, x_۲) = (۱, ۱)$ می‌بینیم که تساوی بالا برقرار نیست و یک جمله اضافی دارد. لذا برای این‌که در خانواده $f_\alpha(x_۱, x_۲)$، توزیع $(X_۱, X_۲)$ نرمال توأم باشد باید حتماً $\alpha = ۰$ برقرار باشد. بنابراین در این خانواده $\rho = ۰$ معادل با $\alpha = ۰$ است. در نتیجه خانواده $f_\alpha(x_۱, x_۲)$ خانواده‌ای جدا از توزیع نرمال دو متغیره است که در آن ناهمبستگی معادل استقلال است.

بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله بیانگر آن است که توزیع نرمال دو متغیره، تنها توزیع توأمی نیست که در آن ناهمبستگی معادل استقلال است. همچنین استقلال ویژگی ذاتی متغیرها نیست و ممکن است با تغییر اندازه احتمال، این ویژگی ظاهر یا محو شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائهٔ بهتر این مقاله شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Amini, M. Jabbari. H. and Mohtashami Borzadaran. G. R. (2011), Aspects of Dependence in Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions, *Communications in Statistics-Simulations and Computation*, **40**, 1192-1205.

Cramer, H. (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press.

Dudewice, E. J. and Mishra, S, N. (1988). *Modern Mathematical Statistics*, Wiley, New York.

Joshi, S. W. (1970), Construction of Certain Bivariate Distribution, *The American Statistician*, **24**, 32.

Mardia, K. V., Kent, J. T., and Bibby, J. M. (1979), *Multivariate Analysis*, London: Academic Press.

Parzen, E. (1960), *Modern Probability Theory and its Applications*, John Wiley and Sons.

Rohatgi, V. K. (1976), *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley, New York.