مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۲، ص ۳۱۷-۳۲۷
DOI: 10.18869/acadpub.jss.10.2.317

استنباط آماری در فرایند حرکت براونی کسری

میثم مقیم بیگی
گروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۱/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۱/۲۸

چکیده : تحلیل آماری فرایند حرکت براونی کسری یکی از موضوعات مهم در مبحث فرایندهای تصادفی است. مهم‌ترین مسئله در بررسی این فرایند، استنباط آماری در مورد پارامتر هرست حرکت براونی کسری است. یکی از روش‌های برآورد پارامتر مورد اشاره استفاده از روش برآورد ماکسیمم درستنمایی است. به‌دلیل پیچیدگی‌های محاسباتی مرتبط با این روش در ارائه جواب بسته، سعی می‌شود پارامتر هرست به کمک روش‌های عددی برآورد شود. نتایج نظری مقاله، در قالب مطالعه شبیه‌سازی برای حالات متفاوت نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : پارامتر هرست، حرکت براونی کسری، ماکسیمم درستنمایی.

۱ مقدمه

در بسیاری از نوشتگان، حرکت براونی کسری محصول کارهای مندلبرات و ون‌نس (۱۹۶۸) معرفی شده است اما باید گفت که این فرایند در ابتدا به‌وسیله کولموگروف (۱۹۴۰) در تولید مارپیچ‌های گاوسی در فضای هیلبرت به‌کار رفته بود. پس از

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: meisam.moghimbeygi@modares.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲M ۰۹

معرفی حرکت براونی کسری به وسیله مندلبرات و ون‌نس (۱۹۶۸)، این فرایند به سرعت تبدیل به یکی از مسائل محبوب در میان نوشتگان به منظور بررسی پدیده‌های خودمشابه شد. حرکت براونی کسری کاربردهای زیادی نیز پیدا کرد که از جمله می‌توان به مطالعات بران (۱۹۹۴) در آب‌شناسی، کولینز و دلوکا (۱۹۹۴) در زیست‌شناسی، فریش (۱۹۹۵) در زمین‌شناسی و پلتیر (۱۹۹۸) در اقتصاد اشاره کرد. فرایند حرکت براونی کسری را با $(B_H(t))_{t\in R}$ نشان می‌دهند. این فرایند در واقع یک فرایند گاوسی مرکزی با مسیرهای پیوسته و تابع کوواریانس

$$R(t,s)=\frac{\sigma^{2}}{2}(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H})$$

است، که در آن σ پارامتر مقیاس بوده و معمولاً برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. پارامتر این فرایند را به احترام هرست[۱] با H $(0<H<1)$ نشان می‌دهند. در حالت خاص $H=1/2$ حرکت براونی کسری تبدیل به فرایند حرکت براونی استاندارد می‌شود. در حالت کلی فرایند حرکت براونی کسری دارای ویژگی خودمشابه است یعنی برای هر $a>0$ داریم، $(B_H(at))_{t\in R}=a^H(B_H(t))_{t\in R}$. همچنین تابع اتوکوواریانس این فرایند رفتاری از مرتبه $O(|n|^{2H-1})$ برای $n\to\infty$ دارد. بنابراین نموهای فرایند حرکت براونی کسری دارای وابستگی دور برد برای $H>1/2$ هستند. از آنجایی‌که رفتار این فرایند برای $H>1/2$ و $H<1/2$ متفاوت است، در بسیاری از نوشتگان روش‌های متفاوتی را نیز برای بررسی این فرایند معرفی کرده‌اند. همچنین نمایه H نمایانگر میزان همواری مسیر فرایند است به‌طوری‌که بعد برخال حرکت براونی کسری برابر با $D=2-H$ است. با توجه به ارتباط بعد برخال فرایند حرکت براونی کسری و همچنین همواری مسیر این فرایند با پارامتر هرست، برآورد این پارامتر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مطالعات بسیاری در این حوزه انجام گرفته است که از جمله می‌توان به بران (۱۹۹۴)، کورجولی (۲۰۰۱) و دوخان و همکاران (۲۰۰۳) اشاره کرد.

یکی از روش‌های معمول در برآوردیابی، روش ماکسیمم درستنمایی است. در بخش ۲ به تشریح این روش به‌منظور برآورد پارامتر هرست پرداخته و در بخش ۳

---
۱ Hurst

برآوردی از پارامتر هرست با استفاده از روش‌های عددی معرفی می‌کنیم. مقایسه روش ارائه شده با دو روش متداول برآورد پارامتر هرست نیز در بخش ۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی

به منظور برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر هرست فرایند حرکت براونی کسری، فرض کنید $t_1, \ldots, t_m$ نقاط گسسته‌ای که لزوماً هم فاصله نیستند از بازه $[0, 1)$ باشند. بنابراین $\underline{B}_H = (B_H(t_1), \ldots, B_H(t_m))$ برداری تصادفی از توزیع گاوسی M متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_H = (R_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ است، که در آن

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}).$$

با در نظر گرفتن تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(H) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \det(\Sigma_H)^{-1/2} exp(-\frac{1}{2}\underline{B}_H^T \Sigma_H^{-1} \underline{B}_H)$$

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی H_m بصورت

$$\hat{H}_m = arg\max(-\frac{1}{2}[\log|\det(\Sigma_H)| + \underline{B}_H^T \Sigma_H^{-1} \underline{B}_H]), \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید، یا می‌توان آنرا از برابری

$$\frac{d}{dH}\log|\det(\Sigma_H)| + \underline{B}_H^T \frac{d}{dH}\Sigma_H^{-1} \underline{B}_H = 0,$$

به‌دست آورد. انجام محاسبات بالا تحت تأثیر دو مسئله مهم است. اولاً برآورد H با استفاده از Σ_H^{-1} و $\log|\det(\Sigma_H)|$ بسیار کند و هزینه بر است و ثانیاً Σ_H به‌شدت شرطی است (کورجولی، ۲۰۰۰). برای غلبه بر این مسئله بران (۱۹۹۴) با استفاده از تابع درستنمایی تقریبی به برآورد پارامتر هرست حرکت براونی کسری پرداخت.

این برآوردگر به برآوردگر ویتل[۲] معروف و به‌صورت

$$\hat{H}_m = arg\min \sum_{j=1}^{m} \frac{I_N(\lambda_j, m)}{f(\lambda_{j,m}(1, H))}$$

است، که در آن $f(., (1, H))$ تابع چگالی طیفی نموهای حرکت براونی کسری با پارامتر $(1, H)$ و $I_m(\lambda)$ دوره‌نگار تجربی است. او نشان داد که $\hat{H}_m \xrightarrow{a.s.} H$ و $\hat{H}_m$ دارای توزیع نرمال مجانبی به‌صورت

$$\sqrt{m}(\hat{H}_m - H) \xrightarrow{d} N(0, 2D^{-1})$$

است، که در آن

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\frac{d}{dH} \log f(x, \theta)\}^2 dx.$$

با در نظر گرفتن این برآورد باید گفت که برآوردگر ویتل از دو مسئله رنج می‌برد، به‌کندی قابل اجراست و همچنین یک برآوردگر اریب است (کورجولی، ۲۰۰۰). از طرفی برآوردگر ویتل نشان می‌دهد که برای Mهای بزرگ برآورد ماکسیمم درستنمایی به‌دست آمده دارای توزیع نرمال مجانبی است. با این وجود در عمل فرم بسته‌ای برای برآورد پارامتر H به روش ماکسیمم درستنمایی وجود ندارد. یکی از راه‌های پیشنهادی استفاده از روش‌های عددی است که در بخش ۳ یکی از این روش‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

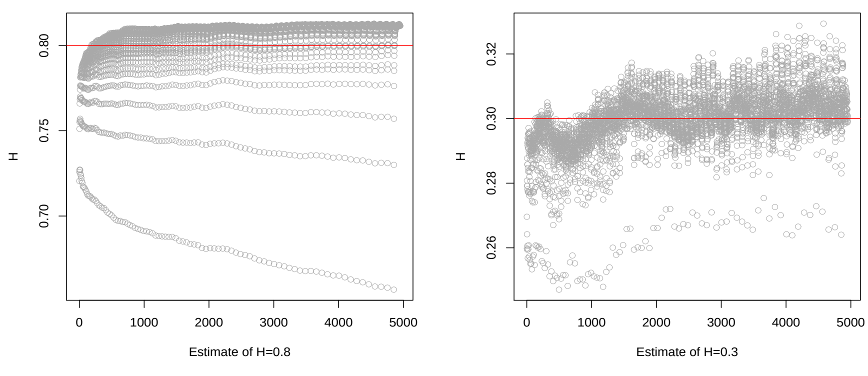
۳ برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی

یکی‌از پارامترهایی که می‌تواند در برآورد پارامتر هرست راه‌گشا باشد ماتریس کوواریانس حرکت براونی کسری در زمان‌های مختلف است. در این مقاله با در نظر گرفتن ماتریس کوواریانس نمونه‌ای S به‌عنوان برآورد ماتریس کوواریانس Σ_H به‌دنبال برآورد پارامتر هرست فرایند حرکت براونی کسری هستیم. یعنی با در نظر گرفتن برابری $\hat{\Sigma} = (n-1)S/n$ به دنبال برآورد پارامتر H هستیم. از آنجائیکه

[۲] Whittle

ماتریس Σ_H فرم پیچیده‌ای دارد، نمی‌توان آن را به‌عنوان تابع مشخصی از H نشان داد. بنابراین قصد داریم با ایجاد یک تناظر یک به یک میان درایه‌های ماتریس Σ_H و S مقادیر H را با استفاده از روش‌های عددی موجود در نرم افزارهای کامپیوتری برآورد کنیم. در این مقاله استفاده از بسته dvfBm در نرم افزار R به‌منظور شبیه‌سازی حرکت براونی کسری و همچنین روش‌های برآورد ارائه شده در این بسته مورد توجه است. به‌وضوح هر تناظر میان درایه‌های ماتریس کوواریانس نمونه‌ای و نظری موجب برآورد یک مقدار $\hat{H}_{ij}$ می‌شود و ممکن است این مقادیر از $\hat{H}_{ij}$ها با یکدیگر یکسان نباشند. ارائه یک تابع مناسب براساس $\hat{H}_{ij}$ها هدف اصلی این مقاله است.

با توجه به اینکه برای Mهای بزرگ H_m دارای توزیع نرمال با میانگین H است و با در نظر گرفتن قانون قوی اعداد بزرگ انتظار داریم میانگین $\hat{H}_{ij}$ها برآوردگر مناسبی برای پارامتر H باشد. با شبیه‌سازی ۵۰ مسیر حرکت براونی کسری با پارامتر $H = ۰/۳$ و $H = ۰/۸$ در ۵۰ زمان مختلف در بازه $(۰, ۱)$ ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به‌دست آورده می‌شود. با ایجاد تناظر میان درایه‌های ماتریس کوواریانس نمونه‌ای و نظری پارامتر H می‌شود برآورد می‌پرازیم که نمونه‌ای از آن در شکل ۱ ارائه شده است. نقاط خاکستری برآوردهای حاصل از تناظر قطرهای اصلی و مثلث



(الف) (ب)

شکل ۱: برآورد $\hat{H}_{ij}$ ها برای الف- $H = ۰/۳$ و ب- $H = ۰/۸$

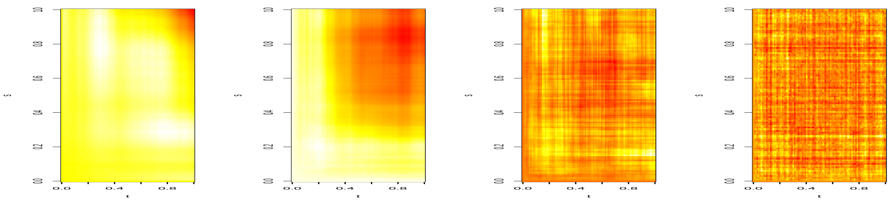
بالایی دو ماتریس کوواریانس نظری و نمونه‌ای است. همانگونه که مشخص است با افزایش زمان t و s در ماتریس کوواریانس برآوردها نیز تغییرات چشمگیری پیدا می‌کنند. به‌منظور روشن‌تر شدن مسئله، حرکت براونی کسری را ۱۰۰ بار در ۱۰۰ زمان مختلف در بازه $(۰,۱)$ شبیه‌سازی می‌کنیم. مقادیر تابع کواریانس نظری را نیز در نقاط زمانی مورد نظر به‌دست آورده و اختلاف دو تابع کوواریانس نظری و نمونه‌ای را به‌دست می‌آوریم. اختلاف بین دو تابع کوواریانس نمونه‌ای و نظری برای Hهای مختلف در زمان $t,s\in(۰,۱)$ در شکل ۲ نشان داده شده است. همتن‌طور که ملاحظه می شود با افزایش پارامتر H و زمان t و s مقادیر کوواریانس نظری و نمونه‌ای اختلاف بیشتری خواهند داشت. این اختلاف از تیره‌تر شدن رنگ تصاویر ارائه شده نمایان است. بنابراین به‌منظور بهبود برآورد پیشنهادی، کافی است $\hat{H}_{ij}$های برآورد شده در زمان‌های نزدیکتر به صفر برای ارائه برآورد پارامتر H در نظر گرفته می‌شود. به بیان ساده‌تر کافی است از $\hat{H}_{ij}$ها برای i و j های کوچکتر، به‌طور مثال $i,j\leq\alpha$ به‌منظور برآوردیابی استفاده شود.

با توجه به شکل ۲ و عملکرد یکسان کوواریانس‌ها و واریانس‌ها در زمان‌های ابتدایی، یکی از برآوردهای پیشنهادی استفاده از واریانس‌ها در زمان‌های اولیه است. بنابراین یکی از برآوردهای اولیه می‌تواند، برآورد به‌دست آمده از واریانس‌ها باشد. به‌همین منظور با توجه به اینکه $R_{ii}=t_i^{۲H}$، با در نظر گرفتن تناظر $\hat{R}_{ii}=s_{ii}$ و با استفاده از حاصل ضرب واریانس‌های نظری و نمونه‌ای $\prod_{i=۱}^{\alpha}t_i^{۲\hat{H}}=\prod_{i=۱}^{\alpha}s_{ii}$، داریم

$$\hat{H}=\frac{\sum_{i=۱}^{\alpha}\log s_{ii}}{۲\sum_{i=۱}^{\alpha}\log t_i}.$$

از آن‌جایی که $\hat{H}_{ij}$ها به روش‌های عددی به‌دست می‌آیند، ممکن است حافظ دامنه نباشند بنابراین می‌توان از برآورد مقید استفاده کرد.

لم ۱ : (لی‌من و کسلا، ۲۰۰۳) اگر برد تابع برآورد شونده $g(\theta)$ بازه‌ای به‌شکل $[a,b]$ باشد، آن‌گاه هر برآوردگر δ که مقادیر خارج از بازه‌ی $[a,b]$ را با احتمال مثبت



شکل ۲: ماتریس تصویر تفاوت میان ماتریس کوواریانس نظری و نمونه‌ای، از راست به چپ برای $H = ۰/۰۵$، $H = ۰/۳$، $H = ۰/۸$ و H=۰/۹۵

اختیار کند، دارای ریسک بیشتری از برآوردگر مقید زیر است:

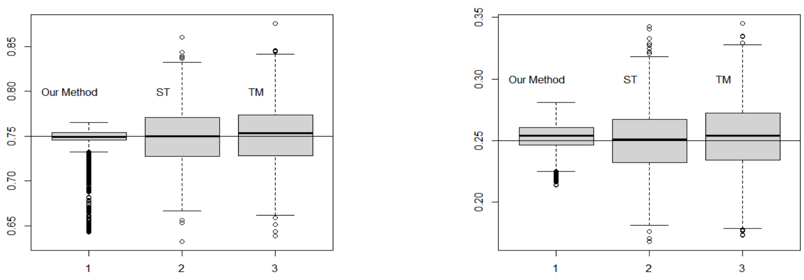
$$\delta^* = \begin{cases} a & \delta \leq a \\ \delta & a < \delta < b \\ b & \delta \geq b \end{cases}$$

با توجه به لم ۱ و به‌منظور افزایش دقت برآورد، می‌توان از $۰ \leq \hat{H}_{ij}$ و $۱ \geq \hat{H}_{ij}$ صرف‌نظر کرد. در این مقاله بر اساس $\hat{H}_{ij}$ها، دو برآورد $\hat{H}$ و میانگین $\hat{H}_{ij}$ها را برای $۱ < i,j < \alpha$ معرفی می‌شود. توجه داریم که در روش ما ماتریس کوواریانس نمونه‌ای نقشی کلیدی دارد و برای به‌دست آوردن این ماتریس نیاز به حداقل دو مسیر مستقل از فرایند حرکت براونی کسری است. بنابراین با در نظر گرفتن m مسیر نمونه‌ای از حرکت براونی کسری تنها می‌توان یک برآورد $\hat{H}$ معرفی کرد. لذا در این مقاله برآورد $\hat{H}$ تنها معرفی شده و مورد تحلیل قرار نمی‌گیرد.

شن و همکاران (۲۰۰۷) وکورجولی (۲۰۰۸) روش‌هایی را بر اساس چارک‌ها ارائه داده‌اند که دو روش با عملکرد مناسب را انتخاب می‌کنیم. این دو روش در منابع یاد شده با نمادهای ST و TM نشان داده شده‌اند. جدول ۱ و شکل ۳ بر اساس ۱۰۰۰ بار شبیه‌سازی از حرکت براونی کسری در ۱۰۰۰ زمان هم‌فاصله در بازه $(۰,۱)$ و برآورد $\hat{H}_{ij}$ها برای $\alpha = ۱۰۰$ به‌دست آمده است. با توجه به جدول ۱ و شکل ۳ میانگین برآوردها تقریباً با یکدیگر برابر است. اما در مورد انحراف معیارها برآورد $\bar{H}$ تقریباً در تمام سطوح داری انحراف معیار کمتری از برآوردهای دیگر است. همچنین نمودار جعبه‌ای ۳ نشان می‌دهد که برآورد ما همچنان از وجود

جدول ۱: برآورد پارامتر H

TM(SD)	ST(SD)	$\bar{H}$(SD)	$\hat{H}$	H
۰/۰۵۲(۰/۰۲۱)	۰/۰۴۹(۰/۰۱۸)	۰/۰۵۷(۰/۰۲۲)	۰/۰۵۶	۰/۰۵
۰/۱۰۳(۰/۰۲۳)	۰/۱۰۰(۰/۰۲۲)	۰/۱۰۱(۰/۰۱۰)	۰/۱۰۰	۰/۱۰
۰/۳۰۳(۰/۰۲۸)	/۳۰۰(۰/۰۲۷)	۰/۳۰۰(۰/۰۱۱)	۰/۲۹۶	۰/۳۰
۰/۵۰۲(۰/۰۳۲)	۰/۴۹۹(۰/۰۳۰)	۰/۴۹۸(۰/۰۱۳)	۰/۴۹۶	۰/۵۰
۰/۷۰۲(۰/۰۳۳)	۰/۶۹۹(۰/۰۳۱)	۰/۶۹۱(۰/۰۱۸)	۰/۶۹۲	۰/۷۰
۰/۹۰۳(۰/۰۳۳)	۰/۸۹۹(۰/۰۳۱)	۰/۸۹۰(۰/۰۲۴)	۰/۸۹۲	۰/۹۰
۰/۹۵۲(۰/۰۳۴)	۰/۹۴۸(۰/۰۳۱)	۰/۹۳۶(۰/۰۲۲)	۰/۹۳۹	۰/۹۵

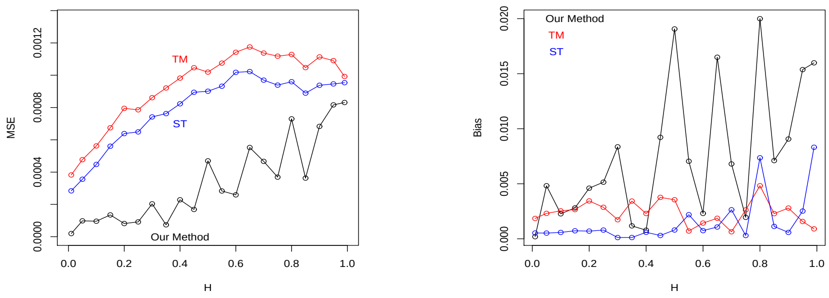


(ب) (الف)

شکل ۳: برآورد H برای الف- ۰/۲۵ و ب- ۰/۷۵ به‌ترتیب از راست به چپ با روش‌های TM، ST و برآوردهای $\hat{H}_{ij}$های روش ما

$\hat{H}_{ij}$های دور افتاده رنج می‌برد.

به منظور تحلیل دقیق‌تری از برآوردگرهای معرفی شده، میانگین توان دوم خطای برآوردها به‌دست آورده می‌شود. شکل ۴ مقدار اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردها را برای Hهای مختلف نشان می‌دهد. نمودار۴-ب نشان از عملکرد خوب برآورد $\bar{H}$ از نظر میانگین توان دوم خطا نسبت به دو برآورد دیگر دارد. همچنین نمودار ۴-الف نشان می‌دهد که برآوردهای $\bar{H}$ دارای میزان اریبی بیشتری از دو برآورد دیگر است که با افزایش پارامتر H این اریبی نیز افزایش می‌یابد. این مسئله را می‌توان ناشی از افزایش وجود $\hat{H}_{ij}$های دور افتاده با افزایش پارامتر H



(ب) (الف)

شکل ۴: نمودارهای الف- اریبی و ب- میانگین توان دوم خطاها برای سه برآوردگر ST، TM و $\bar{H}$

دانست که این افزایش با توجه به شکل ۲ و ۳ قابل پیش‌بینی بود.

بحث و نتیجه‌گیری

معیار میانگین توان دوم خطا یکی از معیارهای مناسب برای مقایسه‌ی برآوردگرها است. براساس این معیار برآوردگر معرفی شده دارای میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به دو برآوردگر دیگر است. با در نظر گرفتن برآوردگرهای ارائه شده به نظر می‌رسد که روش پیشنهادی ما نسبت به دو روش دیگر عملکرد مناسب‌تری داشته باشد. هرچند نقاط ضعفی نیز وجود دارد که از جمله می‌توان به وابستگی این روش به میزان α اشاره کرد. با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ با افزایش H شاهد افزایش واریانس و همچنین تعداد برآوردهای دور افتاده هستیم. به منظور بهبود برآوردها برای Hهای بزرگتر، می‌توان از αهای کوچکتر استفاده نمود. یکی دیگر از مسائلی که باید به آن توجه داشت، داشتن حداقل دو مسیر مستقل از یک فرایند حرکت براونی کسری برای برآورد پارامتر فرایند است. البته میدان‌های تصادفی با این ویژگی‌ها نیز وجود دارد که می‌توان با ایجاد برش‌های مناسب، نمونه‌های مورد نظر را به‌دست آورد. برخی از این میدان‌های تصادفی توسط ژیا او و ژانگ (۲۰۰۲) مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

مراجع

Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, CRC Press, Florida.

Coeurjolly, J, F. (2000), Simulation and Identification of the Fractional Brownian Motion: a Bibliographical and Comparative Study, *Journal of Statistical Software*, **5**, 1-53.

Coeurjolly, J, F. (2001), Estimating the Parameters of a Fractional Brownian Motion by Discrete Variations of its Sample Paths, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **4**, 199-227.

Coeurjolly, J, F. (2008), Hurst Exponent Estimation of Locally Self-Similar Gaussian Processes Using Sample Quantiles, *Annals of Statistics*, **36**, 1404-1434.

Collins J, J. and De Luca C, J.(1994), Upright, Correlated Random Walks: A Statistical-Biomechanics Approach to the Human Postural Control System, *Chaos*, **5**, 57-63.

Doukhan, P., Oppenheim, G. and Taqqu, M. S. (2003), *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, Springer, Science and Business Media.

Frisch, U. (1995), *Turbulence*, Cambridge University Press, New York.

Kolmogorov, A. (1940), Wienersche Spiralen und Einige Andere Interessante Kurven im Hilbertschen Raum, *C. R. Academy of Sciences, URSS*, **83**, 115-118.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (2003), *Theory of Point Estimation*, Springer, New York.

Mandelbrot, B, B. and Van Ness, J. (1968), Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applicatios, *SIAM Review*, **10**, 422-437.

Peltier R, F. (1998), Processus Stochastiques Fractals Avec Applications en Finance, *These de Doctoral, University Paris VI.*

Shen H., Zhu, Z. and Lee, T, C, M. (2007), Robust Estimation of the Self-Similarity Parameter in Network Traffic Using Wavelet Transform, *Signal Process*, **87**, 2111-2124.

Xiao, Y., and Zhang, T. (2002), Local Times of Fractional Brownian Sheets, *Probability Theory and Related Fields*, **124**, 204-226.