مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۱، ص ۱ – ۱۹
DOI: 10.29252/jss.12.1.1

برآوردیابی پارامترهای مدل های خطی دو مرحله ای منظم

میثم آگاهی، یداللّه واقعی، مجید رضائی

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۱۰/۲۷

چکیده: مدل‌های خطی دو مرحله‌ای وقتی کاربرد دارند که داده‌های متغیرهای مستقل و وابسته در دو مقطع یا مرحله زمانی به دست آمده و لازم باشد از اطلاعات هر دو مرحله در برازش مدل استفاده شود. در این مقاله پس از معرفی مدل‌های خطی چند مرحله‌ای و دو مرحله‌ای، به دو شیوه مختلف برآورد پارامترهای مدل‌های خطی دو مرحله‌ای منظم به دست آورده می‌شوند. پس با توجه به پیچیده بودن برآوردها، روش‌های محاسباتی با نرم‌افزار R برای برآورد پارامترها ارائه می‌شوند. در پایان نحوه کاربست مدل ارائه شده در قالب یک مثال کاربردی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل های خطی دو مرحله‌ای منظم، مدل تبدیل یافته، برآوردیابی.

۱ مقدمه

مدل‌های خطی چند مرحله‌ای و به ویژه دو مرحله‌ای دارای اهمیت زیادی هستند و در مواردی که اطلاعات مرتبطی از یک یا چند متغیر در دو یا چند مرحله زمانی به دست می‌آید، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. به عنوان مثال، پذیرش دانش‌آموزان در رشته‌های مورد علاقه‌یشان در دانشگاه را می‌توان بر اساس نمره‌های مربوط به آزمون ورودی و نمره دروس دوره دبیرستان، تحت یک مدل خطی دو مرحله‌ای بررسی کرد. ولافوا (۱۹۸۷ و ۱۹۸۸) به بحث برآورد میانگین و واریانس مدل‌های خطی دو مرحله‌ای پرداخته، همچنین در سال ۲۰۰۴ نکاتی را در خصوص مدل‌های خطی چند مرحله‌ای بیان داشته است. کاباسک (۱۹۸۶ و ۱۹۸۸) به معرفی مدل‌های خطی چند مرحله‌ای و دو مرحله ای پرداخته است. سینها و همکاران (۲۰۱۳) مدل‌های

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: میثم آگاهی، meysam_agahi@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J99

خطی دو مرحله‌ای منظم را همراه با مثال توضیح داده است. مدل‌های خطی دو مرحله‌ای، نوعی مدل خطی معمولی (شامل رتبه کامل ورتبه ناقص) به حساب می‌آیند. برای آشنایی بیشتر با نظریه و کاربرد مدل‌های خطی می‌توان به گریبیل (۱۹۷۶)، دریگس (۱۹۷۵)، دِراپِر و اِسمیت (۱۹۸۱)، کریستنسن (۲۰۰۱) و میرز و میلتون (۱۹۹۱) مراجعه نمود.

ولافوا (۱۹۸۷) و سینها و همکاران (۲۰۱۳) با ضرب طرفین مدل خطی دو مرحله‌ای منظم در یک ماتریس وارون‌پذیر، مدل را به صورت یک مدل خطی تبدیل‌یافته نوشته و برآورد پارامترهای آن را به دست آورده‌اند، فرمول‌هایی که آنها با این روش به دست آورده‌اند بسیار پیچیده اند و به طبع آن محاسبه آنها نیز پیچیده خواهد بود. در این مقاله مدل‌های خطی چند مرحله‌ای را معرفی کرده و به برآوردیابی پارامترهای مدل‌های خطی دو مرحله‌ای منظم پرداخته می‌شود.

در بخش ۲ چارچوب کلی مدل‌های خطی چند مرحله‌ای بیان شده و مدل‌های خطی دو مرحله‌ای به عنوان حالت خاصی از آن معرفی می‌شود. در بخش ۳ برآوردیابی پارامترهای مدل خطی دو مرحله‌ای منظم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۱.۳ برآوردیابی پارامترهای مدل به روش مستقیم و بدون استفاده از تبدیلات انجام می‌شود. در بخش ۲.۳ به برآوردیابی پارامترهای مدل به کمک مدل تبدیل‌یافته بر اساس ولافوا (۱۹۸۷) و سینها و همکاران (۲۰۱۳) پرداخته می‌شود. در ادامه یکسان بودن نتایج حاصل از دو روش نشان داده می‌شود.

از آنجا که برآوردیابی‌های حاصل از این دو روش به صورت عبارت‌های طولانی و پیچیده‌ای خواهند بود، در بخش ۴ ضمن بیان مثال کاربردی یک روش محاسباتی بسیار ساده‌تر، به کمک برنامه‌نویسی با نرم‌افزار آماری R، برای برآورد پارامترهای مدل‌های خطی دو مرحله‌ای منظم ارائه می‌شود. استفاده از این ایده می‌تواند برآورد پارامترهای مدل‌های خطی چند مرحله‌ای را نیز ساده‌تر سازد.

۲ مدل خطی چند مرحله‌ای

یک مدل خطی چند مرحله‌ای به صورت

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{D}_{2,1}\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{y}_m &= \boldsymbol{D}_{m,1}\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{D}_{m,2}\beta_2 + \cdots + \boldsymbol{D}_{m,m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1} + \boldsymbol{X}_m\boldsymbol{\beta}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_m
\end{aligned} \tag{1}$$

است، که در آن متغیرهای پاسخ $\boldsymbol{y}_i$، بردارهای تصادفی $n_i \times ۱$ $(i = ۱, \dots, m)$ با توزیع نرمال چند متغیره، $\boldsymbol{\beta}_i$ ها بردارهای $p_i \times ۱$ پارامترهای رگرسیونی، $\boldsymbol{X}_i$ ها ماتریس‌های با ابعاد $n_i \times p_i$ شامل متغیرهای مستقل $(p_i \leq n_i)$، $\boldsymbol{D}_{i,j}$ $(i = ۲, \dots, m, j = ۱, \dots, i-۱)$ ماتریس‌هایی با ابعاد $n_i \times p_j$ نشان‌دهنده ارتباط بین پارامترهای مختلف مدل هستند به طوری‌که $C(\boldsymbol{D}'_{i,j}) \subset C(\boldsymbol{X}'_j)$ یعنی فضای ستونی ماتریس $\boldsymbol{D}'_{i,j}$ زیر مجموعه فضای ستونی ماتریس $\boldsymbol{X}'_j$ است (کریستین، ۲۰۰۱). ε_j ها بردارهای تصادفی خطای مدل با ابعاد $n_i \times ۱$ دارای توزیع نرمال با بردار میانگین ۰ و ماتریس کواریانس $\sigma_i^۲ \boldsymbol{V}_i$ هستند $(\varepsilon_i \sim N_{n_i}(۰, \sigma_i^۲ \boldsymbol{V}_i))$ بطوری‌که $\sigma_i^۲ > ۰$ پارامترهای واریانس و $\boldsymbol{V}_i$ ها ماتریس معین مثبت معلوم با ابعاد $n_i \times n_i$ است.

با ادغام m مدل خطی یاد شده، (۱) را می‌توان به صورت

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(۰, \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}}), \tag{۲}$$

نوشت، که در آن

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_۱ \\ \varepsilon_۲ \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_۱ \\ \boldsymbol{\beta}_۲ \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ \boldsymbol{D}_{۲,۱} & \boldsymbol{X}_۲ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{D}_{m,۱} & \boldsymbol{D}_{m,۲} & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix},$$

و

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_۱ \\ \boldsymbol{y}_۲ \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_\varepsilon = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma_۱^۲ \boldsymbol{V}_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & \sigma_۲^۲ \boldsymbol{V}_۲ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & \sigma_m^۲ \boldsymbol{V}_m \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱: هرگاه ماتریس‌های $\boldsymbol{X}_i$ و $\boldsymbol{V}_i$ $(i = ۱, \dots, m)$ پر رتبه ستونی باشند، یعنی $r(\boldsymbol{V}_i) = n_i$ و $r(\boldsymbol{X}_i) = p_i$، مدل (۱) یک مدل خطی چند مرحله‌ای منظم نامیده می‌شود.

یک مدل خطی دو مرحله‌ای منظم حالت خاصی از مدل (۱) با $m = ۲$ مرحله و به صورت

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(\circ, \boldsymbol{V}_{\varepsilon}), \tag{۳}$$

است، که در آن

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{۱} \\ \varepsilon_{۲} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{۱} \\ \boldsymbol{\beta}_{۲} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{۱} & \circ \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{X}_{۲} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{۱} \\ \boldsymbol{y}_{۲} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{V}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{۱}^{۲}\boldsymbol{V}_{۱} & \circ \\ \circ & \sigma_{۲}^{۲}\boldsymbol{V}_{۲} \end{bmatrix}.$$

بطوری‌که $\boldsymbol{V}_{۱}$، $\boldsymbol{V}_{۲}$، $\boldsymbol{X}_{۱}$ و $\boldsymbol{X}_{۲}$ ماتریس‌های معلوم و پر رتبه، $C(\boldsymbol{D}') \subset C(\boldsymbol{X}_{۱}')$ و $\boldsymbol{D}$ ماتریسی با ابعاد $n_{۲} \times p_{۱}$ است.

۳ برآورد β در مدل خطی دو مرحله‌ای منظم

چنانچه بخواهیم $\boldsymbol{\beta}$ را در مدل خطی (۳) تنها به کمک $\boldsymbol{y}_{۱}$ و $\boldsymbol{X}_{۱}$ برآورد کنیم، یعنی $\boldsymbol{y}_{۱}$ و $\boldsymbol{y}_{۲}$ را مجزا از هم در نظر بگیریم، برآوردگر کمترین توان‌های دوم تعمیم‌یافته $\boldsymbol{\beta}_{۱}$ عبارت است از $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{۱} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_{۱}$، که در آن $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{X}_{۱}'\boldsymbol{V}_{۱}^{-۱}\boldsymbol{X}_{۱})^{-۱}\boldsymbol{X}_{۱}'\boldsymbol{V}_{۱}^{-۱}$. حال آنکه در یک مدل دومرحله‌ای، مراحل با همدیگر در ارتباط‌اند و باید $\boldsymbol{\beta}_{۱}$ و $\boldsymbol{\beta}_{۲}$ با هر دو مرحله به دست آورده شوند.

۱.۳ برآورد پارامتر β به روش مستقیم

در مدل (۳) بهترین برآوردگر خطی ناااریب (BLUE) برای پارامتر $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_{۱}, \boldsymbol{\beta}_{۲})'$ عبارت است از (رنچر و شالجی، ۲۰۰۸):

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}_{\varepsilon}^{-۱}\boldsymbol{X})^{-۱}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}_{\varepsilon}^{-۱}\boldsymbol{y}, \tag{۴}$$

با فرض $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ از آنجا که

$$\boldsymbol{V}_{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 \boldsymbol{V}_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \boldsymbol{V}_2 \end{array}\right] = \rho\sigma_1^2 \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{V}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{V}_2 \end{array}\right]$$

یک ماتریس بلوک قطری است داریم:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} &= \left[\frac{1}{\rho\sigma_1^2} \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{D}' \\ 0 & \boldsymbol{X}_2' \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \rho\boldsymbol{V}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{V}_2^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{X}_2 \end{array}\right] \right]^{-1} \\ &= \rho\sigma_1^2 \left[\begin{array}{cc} \rho\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 \end{array}\right]^{-1},\end{aligned}$$

حال با این فرض که

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{A}_{11} = \rho\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A}_{12} &= \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{A}_{21} &= \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A}_{22} &= \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}_{22.1} = \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2 \end{aligned}$$

داریم:

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}_{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} = \rho\sigma_1^2 \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{L}^- + \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{E}^-\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^- & -\boldsymbol{L}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{E}^- \\ -\boldsymbol{E}^-\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^- & \boldsymbol{E}^- \end{array}\right],$$

که در آن E^- و L^- به ترتیب ماتریس‌های وارون تعمیم‌یافته E و L هستند، همچنین

$$\begin{aligned} X'V_\varepsilon^{-1}y &= \frac{1}{\rho\sigma_1^2}\begin{bmatrix} X_1' & D' \\ 0 & X_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho V_1^{-1} & 0 \\ 0 & V_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho\sigma_1^2}\begin{bmatrix} \rho X_1'V_1^{-1}y_1 + D'V_2^{-1}y_2 \\ X_2'V_2^{-1}y_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= (X'V_\varepsilon^{-1}X)^{-1}X'V_\varepsilon^{-1}y \\ &= \begin{bmatrix} L^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 + L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}DL^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 \\ +L^-D'V_2^{-1}y_2 + L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}DL^-D'V_2^{-1}y_2 \\ -L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}y_2 \\ \\ -E^-X_2'V_2^{-1}DL^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 - E^-X_2'V_2^{-1}DL^-D'V_2^{-1}y_2 \\ +E^-X_2'V_2^{-1}y_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= L^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 + L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}DL^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 \\ &\quad +L^-D'V_2^{-1}y_2 + L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}DL^-D'V_2^{-1}y_2 \\ &\quad -L^-D'V_2^{-1}X_2E^-X_2'V_2^{-1}y_2, \\ \tilde{\beta}_2 &= -E^-X_2'V_2^{-1}DL^-\rho X_1'V_1^{-1}y_1 - E^-X_2'V_2^{-1}DL^-D'V_2^{-1}y_2 \\ &\quad +E^-X_2'V_2^{-1}y_2. \end{aligned}$$

۲.۳ برآورد β به روش تبدیل مدل

چنانچه طرفین یک مدل خطی در یک ماتریس وارون‌پذیر ضرب شود، نتایج حاصل از برآورد پارامترها به کمک متغیرهای تبدیل‌یافته با متغیرهای اصلی یک سان هستند، ولافوا (۱۹۸۷) برای این منظور طرفین

مدل (۲) را در ماتریس مربعی وارون‌پذیر

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & 0 \\ -\boldsymbol{DQ} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{bmatrix}_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$$

ضرب کرد که در آن $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}$. آنگاه برآورد پارامترهای مدل تبدیل‌یافته را به صورت

$$\boldsymbol{Fy} = \boldsymbol{FX\beta} + \boldsymbol{F\varepsilon},$$

به دست آورد. برای سادگی محاسبات فرض کنید $\boldsymbol{I}_{n_i} = \boldsymbol{I}_i$ ماتریس همانی از مرتبه $n_i \times n_i$ باشد. یا

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ -\boldsymbol{DQ} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ -\boldsymbol{DQ} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ -\boldsymbol{DQ} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

یا

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ -\boldsymbol{DQy}_1 + \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ -\boldsymbol{DQX}_1 + \boldsymbol{D} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ -\boldsymbol{DQ}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

و با فرض $\boldsymbol{y}_2^* = -\boldsymbol{DQy}_1 + \boldsymbol{y}_2$، $\varepsilon_2^* = -\boldsymbol{DQ}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ و از آنجا که $\boldsymbol{QX}_1 = \boldsymbol{I}_{p_1}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2^* \end{bmatrix},$$

حال مدل فوق را می‌توان به صورت

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \varepsilon^*, \qquad \varepsilon^* \sim N(0, \boldsymbol{V}_{\varepsilon^*}), \tag{۵}$$

نوشت، که در آن

$$\boldsymbol{y}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2^* \end{bmatrix},$$

و ماتریس کواریانس ε^* به صورت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{\varepsilon^*} &= \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{F\varepsilon}) = \boldsymbol{F}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{F}' \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ -\boldsymbol{DQ} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2\boldsymbol{V}_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2\boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{D}' \\ 0 & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2\boldsymbol{V}_1 & -\sigma_1^2\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{D}' \\ -\boldsymbol{DQ}\sigma_1^2\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{DQ}\sigma_1^2\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{D}' + \sigma_2^2\boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

است. با فرض $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{DQV}_1$ و $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ داریم:

$$\boldsymbol{V}_{\varepsilon^*} = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & -\boldsymbol{C}' \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{C}' + \rho\boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{۶}$$

برآورد BLUE برای $\boldsymbol{\beta}$ در مدل (۵) عبارت است از:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{V}_{\varepsilon^*}^{-1}\boldsymbol{X}^*)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{V}_{\varepsilon^*}^{-1}\boldsymbol{y}^*, \tag{۷}$$

ولافوا (۱۹۸۷) بعد از انجام یک سری عملیات جبری و پیچیده، مقادیر $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^*$ و $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2^*$ را به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^* &= \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{y}_2^* \\ &\quad + \boldsymbol{L}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{E}^-\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}(\boldsymbol{DL}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{y}_2^*, \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2^* &= \boldsymbol{E}^-\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{y}_2^* - \boldsymbol{E}^-\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{DL}^-\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_2^{-1}\boldsymbol{y}_2^*, \end{aligned} \tag{۸}$$

به دست آورد، که در آن $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_1$، $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1')^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}$ و $\boldsymbol{y}_2^* = -\boldsymbol{DQ}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$.

۳.۳ مقایسه برآورد β در روش‌های تبدیل‌یافته و مستقیم

رابطه (۵) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 &= \boldsymbol{(L^- + L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^-)(\rho X_1' V_1^{-1} y_1 + D' V_2^{-1} y_2)} \\ &\quad \boldsymbol{- L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} y_2,}\end{aligned} \tag{۹}$$

نوشت. با استفاده از رابطه

$$\boldsymbol{L\widehat{\beta}_1 = \rho X_1' V_1^{-1} y_1 + D' V_2^{-1} D Q y_1}$$

داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 &= \boldsymbol{(L^- + L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^-)} \\ &\quad \boldsymbol{\times (L\widehat{\beta}_1 - D' V_2^{-1} D Q y_1 + D' V_2^{-1} y_2) - L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} y_2,} \\ &= \boldsymbol{L^- L \hat{\beta}_1 + L^- D' V_2^{-1}(-D Q y_1 + y_2)} \\ &\quad \boldsymbol{+ L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- L \hat{\beta}_1} \\ &\quad \boldsymbol{+ L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- D' V_2^{-1}(-D Q y_1 + y_2)} \\ &\quad \boldsymbol{- L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} y_2,}\end{aligned}$$

چون $\boldsymbol{y_2^* = -DQy_1 + y_2}$ و $\boldsymbol{\hat{\beta}_1 = Qy_1}$، بنابراین $\boldsymbol{y_2^* = -D\hat{\beta}_1 + y_2}$، حال با جایگذاری $\boldsymbol{y_2^*}$ در رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 &= \boldsymbol{L^- L \hat{\beta}_1 + L^- D' V_2^{-1} y_2^* + L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- L \hat{\beta}_1} \\ &\quad \boldsymbol{+ L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- D' V_2^{-1} y_2^*} \\ &\quad \boldsymbol{- L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} y_2} \\ &= \boldsymbol{L^- L \widehat{\beta}_1 + L^- D' V_2^{-1} y_2^* + L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- L \widehat{\beta}_1} \\ &\quad \boldsymbol{+ L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D L^- D' V_2^{-1} y_2^*} \\ &\quad \boldsymbol{- L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} y_2^* - L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} D \hat{\beta}_1}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\tilde{\beta}_1 = L^- L\hat{\beta}_1 + L^- D' V_2^{-1} y_2^* + L^- D' V_2^{-1} X_2 E^- X_2' V_2^{-1} (D L^- D' V_2^{-1} - I) y_2^*.$$

که با $\tilde{\beta}_1^*$ در رابطه (۸) یکسان است. به طور مشابه می‌توان نشان داد $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_2^*$، بنابر این روابط (۵) و (۸) با یک دیگر یکسان هستند ($\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^*$).

۴ مثال کاربردی

در این بخش، داده‌های موجود در صفحه وب دانشگاه ملی-تجربی تاچیرای ونزوئلا[1] با مدل خطی دو مرحله‌ای منظم مدل‌بندی و تحلیل می‌شود. این داده‌ها نمره‌های مربوط به آزمون ورودی و نمره دروس مقدماتی دوره دبیرستان دانش‌آموزانی است که می‌خواستند یک مهارت عملی را در رشته‌های مهندسی مکانیک ، الکترونیک ، علوم کامپیوتر یا عمران در نیمسال اول ۲۰۰۹ و نیمسال اول ۲۰۱۰ در دانشگاه مذکور بگذرانند. از هر نیمسال نمونه‌ای تصادفی به حجم ۴۰ نفر گرفته شده است، از آنجا که داده‌ها متعلق به گروهی از دانش‌آموزانی است که دروس مقدماتی را گذرانده‌اند و آزمون ورودی در نیمسال‌های مختلف به صورت غیر متوالی انجام می‌شود، داده‌ها در میان گروه‌های مختلف متقاضیان مستقل فرض می‌شوند.

متغیرهای پاسخ y_1 و y_2 در مرحله اول و دوم در نظر گرفته می‌شوند که به ترتیب نمرات نیمسال اول ۲۰۰۹ و نیمسال اول ۲۰۱۰ در آزمون ورودی داوطلبان هستند. ماتریس‌های X_1 و X_2 هر کدام از دو ستون تشکیل شده‌اند که ستون اول شامل بردار $\mathbf{1}$، متناظر با عرض از مبدأ و ستون دوم متغیرهای توضیحی هستند. یعنی در واقع $X_1 = [\mathbf{1}|\mathbf{X_{11}}]$ و $X_2 = [\mathbf{1}|\mathbf{X_{22}}]$، که در آنها X_{11} و X_{22} به ترتیب مشاهدات متغیرهای توضیحی مرحله یک و مرحله دو متناظر با نمرات دروس مقدماتی هستند.داده‌های نمونه در مراحل اول و دوم یعنی نیمسال اول ۲۰۰۹ و نیمسال اول ۲۰۱۰ در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

می‌توان مدل خطی دو مرحله‌ای منظم را برای داده‌ها به صورت

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1\beta_1 + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2 V_1), \\ y_2 &= D\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2 V_2). \end{aligned}$$

---

[1] آدرس سایت دانشگاه: http://www.unet.edu.ve

جدول ۱. داده‌های نمونه در مراحل اول و دوم

نمونه	مرحله اول		مرحله دوم		نمونه	مرحله اول		مرحله دوم	
	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{X}_{11}$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{X}_{22}$		$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{X}_{11}$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{X}_{22}$
۱	۴۴٫۶۹	۵٫۵۰	۴۷٫۰۸	۳۳٫۲۵	۲۱	۴۹٫۶۱	۱۶	۳۴٫۸۳	۲۸٫۵
۲	۵۷٫۳۳	۳۶٫۷۵	۴۱٫۳۷	۳۱٫۶۷	۲۲	۵۲٫۷۹	۱۲	۴۸٫۷۵	۳۶٫۴۲
۳	۶۷٫۸۶	۴۷٫۱۷	۴۵٫۴۱	۳۵٫۰۸	۲۳	۵۱٫۶۵	۱۵٫۵۰	۴۶٫۷۰	۴۱٫۰۸
۴	۴۴٫۵۷	۱۶٫۶۷	۳۸٫۸۷	۳۳٫۳۳	۲۴	۶۱٫۷۲	۱۵٫۰۸	۳۷٫۷۶	۲۹٫۷۵
۵	۴۹٫۲۵	۱۷٫۵۸	۳۷٫۷۴	۲۶٫۴۲	۲۵	۵۵٫۹۳	۲۲٫۶۷	۴۱٫۵۰	۲۵٫۷۵
۶	۵۱٫۷۹	۲۳٫۶۷	۴۲٫۶۷	۳۹٫۲۵	۲۶	۵۲٫۸۳	۳۶٫۳۳	۴۶٫۰۱	۳۶٫۰۸
۷	۵۲٫۳۲	۲۸٫۳۳	۳۶٫۹۲	۲۳٫۷۶	۲۷	۴۰٫۶۸	۹٫۰۸	۴۹٫۰۱	۳۷٫۵۰
۸	۴۱٫۰۳	۶٫۴۲	۳۱٫۵۶	۲۵	۲۸	۵۰٫۸۳	۱۹٫۲۵	۴۲٫۵۱	۲۷٫۵۸
۹	۴۶٫۲۵	۱۳٫۳۳	۴۴٫۵۷	۳۲٫۱۷	۲۹	۴۷٫۵۰	۱۰٫۴۲	۳۹٫۹۴	۲۶٫۶۷
۱۰	۵۸٫۲۶	۲۷٫۵۰	۴۶٫۹۶	۳۷٫۸۳	۳۰	۴۶٫۲۵	۱۳٫۳۳	۳۰٫۱۸	۲۵٫۷۵
۱۱	۴۶٫۸۰	۱۲٫۱۷	۳۳٫۴۲	۲۵٫۴۲	۳۱	۴۹٫۴۲	۲۲٫۹۲	۳۸٫۱۸	۲۴٫۷۵
۱۲	۴۹٫۱۹	۱۶٫۱۷	۳۸٫۲۰	۳۱٫۴۲	۳۲	۵۱٫۱۷	۲۰٫۷۵	۴۱٫۶۷	۱۷٫۱۷
۱۳	۵۴٫۶۸	۲۹٫۱۷	۴۱٫۳۳	۲۸٫۹۲	۳۳	۴۲٫۷۳	۲٫۱۷	۳۵٫۱۷	۲۳٫۵۸
۱۴	۶۱٫۹۲	۲۷٫۰۸	۴۳٫۵۸	۴۲٫۴۲	۳۴	۴۲٫۵۷	۵٫۳۳	۳۳٫۵۰	۱۹٫۶۷
۱۵	۴۸٫۰۴	۱۸٫۰۸	۴۶٫۴۲	۳۴٫۸۳	۳۵	۴۹٫۵۹	۱۶٫۴۲	۳۲٫۷۹	۲۱٫۰۸
۱۶	۵۷٫۷۹	۳۶٫۹۲	۳۷٫۱۷	۲۸٫۶۷	۳۶	۴۴٫۶۳	۱۰٫۶۷	۳۳٫۴۰	۲۳
۱۷	۴۴٫۳۸	۹٫۵۸	۴۷٫۵۳	۴۱٫۱۷	۳۷	۵۲٫۵۳	۱۴٫۷۵	۳۳٫۴۰	۲۳
۱۸	۵۶٫۵۸	۱۳٫۵۰	۴۹٫۶۷	۳۲	۳۸	۴۶٫۸۷	۱۵٫۹۲	۳۸٫۳۷	۲۲٫۱۷
۱۹	۴۰٫۶۲	۷٫۵۰	۳۳٫۵۰	۲۰٫۷۵	۳۹	۵۳٫۷۵	۱۴	۴۷٫۷۹	۴۱٫۰۸
۲۰	۴۷٫۶۷	۱۸٫۵۸	۳۷٫۱۴	۲۹	۴۰	۵۸٫۶۳	۳۲٫۵۸	۳۹٫۰۵	۲۱٫۹۲

تشکیل داد. برای آنکه فضای ستونی ماتریس $\boldsymbol{D}$ زیر مجموعه فضای ستونی ماتریس $\boldsymbol{X}_2$ باشد، ماتریس $\boldsymbol{D}$ به صورت $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}$ تعریف شود که در آن $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس ضرب‌پذیر با ابعاد $p_2 \times p_1$ به یکی از سه صورت

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

است. واضح است که با انتخاب هر $\boldsymbol{A}$ داریم: $C(\boldsymbol{D}) \subset C(\boldsymbol{X}_2)$. در رابطه ماتریس کواریانس مدل،

فرض می‌شود واریانس‌ها نامعلوم ولی برابرند. در این صورت $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$ و $\boldsymbol{V}_1$ و $\boldsymbol{V}_2$ به صورت

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & \cdots & 0.3 \\ 0.3 & 1 & \cdots & 0.3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.3 & 0.3 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

در نظر گرفته می‌شوند، یعنی نمرات افراد درون هر نمونه دارای همبستگی برابر هستند. با در نظر گرفتن

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \end{bmatrix} \tag{10}$$

مدل به صورت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \mathbf{1}\beta_{10} + \boldsymbol{X}_{11}\beta_{11} + \varepsilon_1, \\ \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{X}_{22}\beta_{11} + \mathbf{1}\beta_{20} + \boldsymbol{X}_{22}\beta_{21} + \varepsilon_2 \\ &= \mathbf{1}\beta_{20} + \boldsymbol{X}_{22}(\beta_{11} + \beta_{21}) + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

نوشته می‌شود. با تغییر پارامتر $\beta_{22}^* = \beta_{11} + \beta_{21}$ و $\beta_{20}^* = \beta_{20}$، مدل خطی دو مرحله‌ای منظم برای داده‌های ذکر شده به صورت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \mathbf{1}\beta_{10} + \boldsymbol{X}_{11}\beta_{11} + \varepsilon_1, \\ \boldsymbol{y}_2 &= \mathbf{1}\beta_{20}^* + \boldsymbol{X}_{22}\beta_{22}^* + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند، که در آن β_{11} نشان‌دهنده میزان تأثیر مرحله ۱ بر مرحله ۲ است.

۱.۴ برآورد پارامترهای مدل

برای داده‌های جدول ۱ در (۲) ماتریس‌های مورد نیاز عبارتند از:

$$\boldsymbol{X}_{۱} = [\mathbf{1}|\boldsymbol{X}_{۱۱}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۵٫۵ \\ ۱ & ۳۶٫۷۵ \\ \vdots & \vdots \\ ۱ & ۳۲٫۵۸ \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_{۲} = [\mathbf{1}|\boldsymbol{X}_{۲۲}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۳۳٫۲۵ \\ ۱ & ۳۱٫۶۷ \\ \vdots & \vdots \\ ۱ & ۲۱٫۹۲ \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_{۲}\boldsymbol{A} = [\mathbf{1}|\boldsymbol{X}_{۲۲}] \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳۳٫۲۵ \\ ۰ & ۳۱٫۶۷ \\ \vdots & \vdots \\ ۰ & ۲۱٫۹۲ \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_{۱} = \begin{bmatrix} ۴۴٫۶۹ \\ ۵۷٫۳۳ \\ \vdots \\ ۵۸٫۶۳ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_{۲} = \begin{bmatrix} ۴۷٫۰۸ \\ ۴۱٫۳۷ \\ \vdots \\ ۳۹٫۰۵ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{۱} \\ \boldsymbol{y}_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۴٫۶۹ \\ ۵۷٫۳۳ \\ \vdots \\ ۵۸٫۶۳ \\ \\ ۴۷٫۰۸ \\ ۴۱٫۳۷ \\ \vdots \\ ۳۹٫۰۵ \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 5.5 & 0 & 0 \\ 1 & 36.75 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 32.58 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 33.25 & 0 & 33.25 \\ 0 & 31.67 & 0 & 31.67 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 21.92 & 0 & 21.92 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0.3\sigma_1^2 & \cdots & 0.3\sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.3\sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & 0.3\sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0.3\sigma_1^2 & 0.3\sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_2^2 & 0.3\sigma_2^2 & \ldots & 0.3\sigma_2^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.3\sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \ldots & 0.3\sigma_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.3\sigma_2^2 & 0.3\sigma_2^2 & \ldots & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

در ادامه BLUE پارامتر $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)'$ که $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{10}, \beta_{11})'$ و $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{20}, \beta_{21})'$ با دو روش بیان می‌شود.

ابتدا داده‌های جدول ۱ در محیط Excel به صورت $[\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{X}_{11}|\boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{X}_{22}]$ مرتب شده‌اند. سپس در قالب یک فایل Text به نام data در چند سطر و چند ستون ذخیره می‌شوند. آنگاه به کمک تابع read.table در محیط نرم‌افزار R داده‌ها فراخوانی می‌شوند. سه برنامه برای بدست آوردن برآورد $\boldsymbol{\beta}$ تهیه

شده است (پیوست الف) که نتایج حاصل از این برنامه‌ها با یک دیگر یک سان هستند. با توجه به اینکه فرمول‌های به دست آمده برای $\boldsymbol{\beta}_1$ و $\boldsymbol{\beta}_2$ در دو روش مستقیم و تبدیل‌یافته عبارت‌های پیچیده‌ای هستند، برنامه شماره ۱ (برنامه beta.hat) با استفاده از (۴) پیشنهاد می‌شود که بعد از اجرای آن داریم:

$$\hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{10} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۱/۴۷۷ \\ ۰/۴۹۳ \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{20} \\ \hat{\beta}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۱/۹۸۵ \\ ۰/۱۲۶ \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\beta}^*_{22} = \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{21} = ۰/۴۹۳ + ۰/۱۲۶ = ۰/۶۱۹.$$

۲.۴ تحلیل نتایج

برآورد پارامترهای مدل (۱) در جدول ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود $\hat{\beta}_{20} = \hat{\beta}^*_{20}$

جدول ۲. برآورد پارامترهای مدل خطی دو مرحله‌ای منظم

برآوردهای مرحله ۱		برآوردهای مرحله ۲			
$\widehat{\beta}_{10}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\beta}_{20}$	$\widehat{\beta}_{21}$	$\widehat{\beta}^*_{20}$	$\widehat{\beta}^*_{22}$
۴۱/۴۷۷	۰/۴۹۳	۲۱/۹۸۵	۰/۱۲۶	۲۱/۹۸۵	۰/۱۶۹

برآورد عرض از مبدأ مدل و $\hat{\beta}^*_{22} = \hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{21} = ۰/۶۱۹$ تأثیر دروس مقدماتی روی نمره آزمون پذیرش در نیمسال اول ۲۰۱۰، که توسط مجموعه دو جزء بیان شده است، یکی از مؤلفه‌ها مربوط به عوامل ذاتی در دروس مقدماتی که همان $\hat{\beta}_{11} = ۰/۴۹۳$ است و مؤلفه دیگر مربوط به دانش‌آموز است که $\widehat{\beta}_{21} = ۰/۱۲۶$ است. $\widehat{\beta}_{11} = ۰/۴۹۳$ نشان دهنده میزان اثر نفوذ مرحله یک بر مرحله دو است.

این تفسیر از ضرایب مدل فوق نشان‌دهنده این واقعیت است که با توجه به کمبود دانش دانش‌آموزان در کارهای تجربی نیاز است که بسیاری از دانش‌آموزان دوره‌های تجربی را با جدیت پیگیری کنند. بنابراین بردارهای برآورد شده مدل خطی دو مرحله‌ای منظم مثال فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_1 = ۴۱/۴۷۷ + ۰/۴۹۳\boldsymbol{X}_{11}, \qquad \widehat{\boldsymbol{y}}_2 = ۲۱/۹۸۵ + ۰/۶۱۹\boldsymbol{X}_{22}.$$

۵ بحث و نتیجه‌گیری

نظریه مدل‌های خطی چند مرحله‌ای و به ویژه دو مرحله‌ای در سال‌های اخیر توجه برخی نظریه‌پردازان آماری را جلب کرده است ولی به دو دلیل کمتر مورد استفاده قرارگرفته است. دلیل اول در دسترس نبودن داده‌های مناسب دو مرحله‌ای است و دلیل دیگر پیچیده بودن عبارت‌های محاسباتی و نبود بسته نرم‌افزاری برای محاسبه آنهاست. در این مقاله ضمن ارائه یک روش تئوری، درکنار روش مربوط به ولافوا (۱۹۸۷) و سینها و همکاران (۲۰۱۳)، نشان دادیم برآوردهای حاصل از این دو روش یک سان هستند. از آنجا که تبدیل کردن مدل خطی دو مرحله‌ای سبب ساده شدن روش‌های محاسباتی نمی‌شود. استفاده از روش مستقیم پیشنهاد می‌شود. ضمن اینکه مستقیماً و بدون ساده کردن رابطه (۴) نیز می‌توان با استفاده از یک برنامه محاسباتی نسبتاً ساده برآورد پارامترهای مدل را با مدل خطی دومرحله‌ای (۳) محاسبه کرد.

پیوست الف: برنامه‌های محاسباتی

برنامه شماره ۱: محاسبه فرمول (۴) به روش مستقیم

```
>fix(beta.hat)
bata.hat=function(data,n۱=۴۰,n۲=۴۰,p۱=۲,p۲=۲){
Y۱=data[,۱]
Y۲=data[,(p۱+۱)]
x۱۱=data[,c(۲:p۱)]
x۲۲=data[,c((p۱+۲):(p۱+p۲))]
Y=rbind(as.matrix(Y۱),as.matrix(Y۲))
one=rep(۱,n۱)
X۱=cbind(one,X۱۱)
X۲=cbind(one,x۲۲)
zero=matrix(۰,n۱,p۱)
D=cbind(rep(۰,n۲),x۲۲)
X=rbind(cbind(X۱,zero),cbind(D,X۲))
V۱=matrix(۰.۳,n۱,n۲)
diag(V۱)=rep(۱,n۱)
V۲=V۱
zero۲=matrix(۰,n۱,n۲)
V.ep=rbind(cbind(V۱,zero۲),cbind(t(zero۲),V۲))
beta.hat=solve((t(X)%*%solve(V.ep)%*% X))%*%t(X)%*%solve(V.ep)%*%Y
beta۱.hat=beta.hat[۱:p۱]
```

```
beta۲.hat=beta.hat[(p۱+۱):(p۱+p۲)]
result=list(beta۱.hat,beta۲.hat)
return(result)}
```

برنامه شماره ۲: محاسبه فرمول (۵) به روش مستقیم

```
>fix(beta.tillstar)
function(data,n۱=۴۰,n۲=۴۰,p۱=۲,p۲=۲){
Y۱=data[,۱]
Y۲=data[,(p۱+۱)]
x۱۱=data[,c(۲:p۱)]
x۲۲=data[,c((p۱+۲):(p۱+p۲))]
one=rep(۱,n۱)
X۱=cbind(one,x۱۱)
X۲=cbind(one,x۲۲)
zero=matrix(۰,n۱,p۱)
D=cbind(rep(۰,n۲),x۲۲)
V۱=matrix(۰.۳,n۱,n۲)
diag(V۱)=rep(۱,n۱)
V۲=V۱
L=t(X۱)%*%solve(V۱)%*%X۱+t(D)%*%solve(V۲)%*%D
E=t(X۲)%*%solve(V۲)%*%X۲-t(X۲)%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)
%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲
A۱=ginv(L)%*%t(X۱)%*%solve(V۱)%*%Y۱
A۲=ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲%*%ginv(E)%*%t(X۲)
%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)%*%t(X۱)%*%solve(V۱)%*%Y۱
A۳=ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%Y۲
A۴=ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲%*%ginv(E)%*%t(X۲)
%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%Y۲
A۵=-ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲%*%ginv(E)%*%t(X۲)
%*%solve(V۲)%*%Y۲
beta۱.tillstar=A۱+A۲+A۳+A۴+A۵
B۱=-ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)%*%t(X۱)
%*%solve(V۱)%*%Y۱
B۲=-ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)%*%t(D)
%*%solve(V۲)%*%Y۲
B۳=ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)%*%Y۲
beta۲.tillstar=B۱+B۲+B۳
result=list(beta۱.till,beta۲.till)
return(result)}
```

برنامه شماره ۳: محاسبه فرمول (۸) به روش تبدیل مدل

```
>fix(beta.till)
function(data,n۱=۴۰,n۲=۴۰,p۱=۲,p۲=۲){
Y۱=data[,۱]
Y۲=data[,(p۱+۱)]
x۱۱=data[,c(۲:p۱)]
x۲۲=data[,c((p۱+۲):(p۱+p۲))]
one=rep(۱,n۱)
X۱=cbind(one,x۱۱)
X۲=cbind(one,x۲۲)
zero=matrix(۰,n۱,p۱)
D=cbind(rep(۰,n۲),x۲۲)
V۱=matrix(۰.۳,n۱,n۱)
diag(V۱)=rep(۱,n۱); V۲=V۱
l=matrix(۰,n۲,n۲)
diag(l)=rep(۱,n۲)
L=t(X)%*%solve(V۱)%*%X۱+t(D)%*%solve(V۲)%*%D
E=t(X۲) %*% solve(V۲) %*% X۲-t(X۲) %*% solve(V۲) %*% D %*% ginv(L)
%*% t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲
Q=solve((t(X۱)%*%solve(V۱)%*%X۱))%*%t(X۱)%*%solve(V۱)
K=D%*%Q
Y۲star=-K%*%Y۱+Y۲
betahat۱=Q%*%Y۱
A۱=ginv(L)%*%L%*%betahat۱
A۲=ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%Y۲star
U=D%*%ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)
W=U-l
A۳=ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)%*%X۲%*%ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)
%*%W%*%Y۲star
B۱=ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)%*%Y۲star
B۲=-ginv(E)%*%t(X۲)%*%solve(V۲)%*%D%*%ginv(L)%*%t(D)%*%solve(V۲)
%*%Y۲star
beta۱.till=A۱+A۲+A۳
beta۲.till=B۱+B۲
result=list(beta۱.till,beta۲.till)
return(result)}
```

مراجع

Christensen, R. (2001), *Plane Answers to Complex Question: The theory of Linear Models*, Springer, New York.

Draper, N. R. and Smith, H. (1981), *Applied Regression Analysis*, 2end, Wiley, New York.

Drygas, H. (1975). Estimation and Prediction for Linear Models in General Spaces. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **6**, 301-324.

Graybill, F. A. (1976), *Theory and Application of the Linear Model. Duxbury Press*, North Scituate, Ma.

Kubacek, L. (1986), Multistage Regression Model, *Applications of Mathematics*, **31**, 89-96.

Kubacek, L. (1988), Two-stage Regression Model, *Mathematica Slovaca*, **38**, 383-393.

Rencher, A. C. and Schaalje, G. B. (2008), *Linear Models in Statistics*, Johnn Wiley, New Jersey.

Sinha, S. P., Goitia, A. and Valera, J. L. (2013), UBLUE for the Regular Two-Stage Linear Model from the Perspective of Projection Operators. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **6**, 97–109.

Volaufova, J. (1987), Estimation of Parameters of Mean and Variance in Two-Stage Linear Models, *Aplikace Matematiky*, **32**, 1-8.

Volaufova, J. (1988), Note on the Estimation of Parameters of the Mean and The Variance In n-stage Linear Models, *Aplikace matematiky*, **33**, 41-48.

Volaufova, J. (2004), Some Estimation Problems in Multi-stage, *Linear Algebra and its Applications*, **388**, 389-397.