مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۲، ص ۱۶۹–۱۸۸

بازه‌های اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} براساس روش‌های مجانبی و خودگردانی پارامتری

ثنا افتخار، احسان خراتی کوپایی، سلطان محمد صدوقی الوندی
گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۳۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۴/۱۰

چکیده : شاخص‌های قابلیت فرآیند به عنوان ابزاری آماری به منظور ارزیابی صحت، دقت و کارایی یک فرآیند، در صنعت کاربرد گسترده‌ای دارند. در این مقاله بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} براساس روش‌های خودگردانی پارامتری و مجانبی ارائه می‌شود. برای ارزیابی این روش‌ها، با استفاده از شبیه‌سازی، به مقایسه احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان پیشنهادی با روش بازه اطمینان تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده مناسب بودن روش‌های پیشنهادی است.

واژه‌های کلیدی : بازه اطمینان، شاخص قابلیت فرآیند، توزیع مجانبی، خودگردانی پارامتری، بازه اطمینان تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

شاخص‌های قابلیت فرآیند به عنوان ابزاری آماری به منظور ارزیابی صحت، دقت و کارایی یک فرآیند، در صنعت کاربرد گسترده‌ای دارند. شاخص‌های قابلیت فرآیند

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان خراتی کوپایی، eh.kh.ko@gmial.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۱۰

به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارند و به عنوان تابعی از میانگین و واریانس فرآیند و مقدار هدف برای مقایسه فرآیندهایی که ممکن است حتی واحد اندازه‌گیری متفاوتی نیز داشته باشند، استفاده می‌شوند. همچنین این شاخص‌ها در انتخاب بهترین فرآیند کاربرد فراوان دارند.

وان‌من (۱۹۹۵) خانواده کلی از شاخص‌های قابلیت فرآیند را، که در برگیرنده شاخص‌های متداول در صنعت است، به‌صورت

$$C_p(u,v) = \frac{d - u|\mu - M|}{۳\{\sigma^۲ + v(\mu - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}},$$

معرفی کرد، به گونه‌ای که u و v پارامترهای غیرمنفی، $d = (USL - LSL)/۲$، LSL و USL حدود مشخصات فنی پایین و بالا، μ میانگین فرآیند، $M = (USL + LSL)/۲$، $\sigma^۲$ واریانس فرآیند و T مقدار هدف هستند. تاکنون چندین شاخص قابلیت فرآیند برای بررسی عملکرد فرآیندها ارائه شده است. این شاخص‌ها در ارزیابی فرآیند در تولید محصولاتی منطبق با حدود مشخصات فنی، اندازه‌گیری میزان انحراف فرآیند از میانگین فرآیند یا مقدار هدف، نشان دادن درصد اقلام معیوب و اندازه‌گیری فاصله میانگین فرآیند تا حدود مشخصات فنی دارای توانایی و عملکردی متفاوت هستند. (برای اطلاعات بیشتر درباره شاخص‌های گوناگون به پرن و کاتز (۲۰۰۶) فصل‌های ۱ تا ۴ مراجعه شود).

هدف این مقاله ارائه بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص $C_{pmk} = C_p(۱,۱)$ است که توسط پرن و همکاران (۱۹۹۲) معرفی گردید. این شاخص، نسبت به فاصله میانگین فرآیند تا مقدار هدف و تغییرات فرآیند حساس‌تر است. شاخص C_{pmk} ترکیبی مناسب از شاخص‌های پیشین است که هم در اندازه‌گیری بازده فرآیند و هم در معرفی زیان‌های ناشی از فرآیند عملکرد بهتری دارد. بنابراین بدیهی است که شاخص C_{pmk} نسبت به بازده و زیان فرآیند اطلاعات بیشتری را برای مشتری و خریدار فراهم می‌کند. این شاخص هم نسبت به تغییرات فرآیند حساس است و هم سریع‌تر از شاخص‌های دیگر نسبت به انحراف میانگین فرآیند از مقدار هدف واکنش نشان می‌دهد. علاوه بر این C_{pmk} بیشترین اطلاعات را در مورد میانگین فرآیند ارائه می‌دهد. به عنوان مثال وقتی $C_{pmk} = ۱$ است

$\mu \in (T \pm d/۴)$ می‌باشد. این در حالی است که C_{pmk} کمترین اطلاعات را درباره درصد اقلام معیوب بیان می‌کند (پرن و کاتز، ۲۰۰۶).

در ادامه، تاریخچه‌ای از مطالعات انجام شده در مورد C_{pmk} می‌آید. چن و سو (۱۹۹۵) به مطالعه توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پرداختند. پرن و همکاران (۱۹۹۲) و رایت (۱۹۹۸) گشتاورهای دقیق و تابع چگالی برآورد C_{pmk} را تحت فرض نرمال بودن فرآیند، برای حالتی که فرآیند متقارن است یعنی زمانی که $T = M$، به‌دست آوردند. وان من (۱۹۹۷a، ۱۹۹۷b) به محاسبه توزیع و تابع چگالی دقیق برآورد $C_p(u,v)$ تحت فرض نرمال بودن فرآیند، برای هر دو حالتی که فرآیند متقارن و نامتقارن یعنی $T \neq M$، پرداخت. اما همان‌طور که وو و هوانگ (۲۰۱۰) اشاره کرده‌اند به دلیل پیچیدگی توزیع نمونه‌ای، مطالعه گسترده‌ای در مورد مقایسه دو شاخص C_{pmk} انجام نشده است. در این خصوص وو و هوانگ (۲۰۱۰) بازه اطمینان تعمیم‌یافته را برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} بر اساس مفهوم کمیت محوری تعمیم‌یافته ارائه دادند. شبیه‌سازی‌های انجام شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) نشان‌دهنده این است که بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت دو شاخص C_{pmk} عملکرد بهتری نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} دارد. با این وجود حالت‌هایی که احتمال پوشش بازه اطمینان تعمیم‌یافته کمتر از احتمال پوشش اسمی است به چشم می‌خورد. همچنین کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) به مطالعه بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} پرداخته‌اند.

در این مقاله برای دو فرآیند نرمال مستقل، بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} بر اساس روش خودگردانی پارامتری و توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پیشنهاد می‌شود. پرن و همکاران (۱۹۹۲) به برخی از خواص نامطلوب شاخص C_{pmk}، زمانی که مقدار هدف بین حدود مشخصات فنی است اما با M برابر نیست اشاره کردند (وان من، ۱۹۹۷a). علاوه بر این به دلیل متداول بودن حالت تقارن در اکثر مسائل کاربردی، فرض شده است $T = M$. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که بازه‌های اطمینان خودگردانی پارامتری و مجانبی اصلاح شده از دیدگاه احتمال پوشش عملکرد بهتر و در برخی موارد عملکرد مشابه، نسبت به بازه اطمینان

تعمیم‌یافته دارند.

در بخش ۲ ابتدا مروری بر بازه اطمینان تعمیم‌یافته خواهد شد، سپس بازه‌های اطمینان بر اساس روش‌های خودگردانی پارامتری و مجانبی توضیح داده می‌شود. در بخش ۳ بازه‌های اطمینان معرفی شده، از دیدگاه احتمال پوشش و متوسط طول بازه در مطالعه‌ای شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند و در بخش ۴، با بیان دو مثال واقعی روش‌های ارائه شده مقایسه می‌شوند.

۲ روش‌های تشکیل بازه‌های اطمینان

دو فرآیند نرمال مستقل را در نظر بگیرید و فرض کنید $X_{i1},\dots,X_{in_i}$ یک نمونه تصادفی با اندازه n_i از فرآیند iام برای $i=1,2$ باشد. همچنین فرض کنید X_{ij}، $i=1,2$، $j=1,\dots,n_i$، دارای توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 باشد. بنابراین شاخص C_{pmk} برای فرآیند iام به‌صورت

$$C_{pmki}=\frac{\min\{USL-\mu_i,\mu_i-LSL\}}{3\{\sigma_i^2+(\mu_i-T)^2\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{d-|\mu_i-M|}{3\{\sigma_i^2+(\mu_i-T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

تعریف می‌شود. در این بخش ابتدا بازه اطمینان تعمیم‌یافته ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) و کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) مرور می‌شود و سپس به چگونگی ساختن بازه اطمینان برای C_{pmk1}/C_{pmk2} و $C_{pmk1}-C_{pmk2}$ با روش خودگردانی پارامتری و بر اساس توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پراخته می‌شود.

در این مقاله، $\bar{X}$ و S_b^2 به ترتیب نشان‌دهنده میانگین و واریانس نمونه‌ای هستند به گونه‌ای که

$$\bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\quad S_{b_i}^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2,\quad i=1,2$$

۱.۲ بازه اطمینان تعمیم‌یافته

فرض کنید $\bar{x}_i$ و $s_{b_i}^2$ نشان‌دهنده مقادیر مشاهده شده $\bar{X}_i$ و $S_{b_i}^2$ برای $i=1,2$ باشد و متغیرهای تصادفی Z_i و U_i به‌صورت

$$Z_i=\frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i-\mu_i)}{\sigma_i},U_i^2=\frac{n_iS_{b_i}^2}{\sigma_i^2}$$

تعریف شوند، به گونه‌ای که $Z_i \sim N(۰,۱)$ و $U_i^۲ \sim \mathcal{X}^۲_{n_i-۱}$ برای $i = ۱,۲$. در این صورت کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$ به‌صورت

$$GR = \frac{(d - |Q_{\mu_۱} - M|)/\{Q_{\sigma_۱^۲} + (Q_{\mu_۱} - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}}{(d - |Q_{\mu_۲} - M|)/\{Q_{\sigma_۲^۲} + (Q_{\mu_۲} - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}}$$

است، که در آن $Q_{\mu_i} = \bar{x}_i - Z_i s_{b_i}/U_i$ و $Q_{\sigma_i^۲} = n_i s_{b_i}^۲/U_i^۲$ کمیت محوری تعمیم‌یافته برای μ_i و $\sigma_i^۲$ هستند. بنابراین بازه اطمینان تعمیم‌یافته $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$ به صورت $(GR_{\alpha/۲}, GR_{۱-\alpha/۲})$ است که در آن $GR_{\alpha/۲}$ و $GR_{۱-\alpha/۲}$ به ترتیب چندک $\alpha/۲$ام و $۱-\alpha/۲$ام توزیع GR است و با شبیه‌سازی مونت کارلو به‌دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر به وو و هوانگ (۲۰۱۰) مراجعه شود. به صورت مشابه بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای $C_{pmk۱} - C_{pmk۲}$ به‌دست می‌آید.

۲.۲ بازه اطمینان خودگردانی پارامتری

خودگردانی پارامتری روشی سودمند در مسائل استنباط آماری دارای پارامتر مزاحم است. در این‌جا از ایده بازه اطمینان خودگردانی پارامتری، که توسط افرون (۱۹۸۱) و افرون و تیب شیرانی (۱۹۸۶) مطرح شده است، برای ساختن بازه اطمینان برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$ و $C_{pmk۱} - C_{pmk۲}$ استفاده می‌شود. فرض کنید $s_i^۲ = n_i s_{b_i}^۲/n_i - ۱$، در این صورت کمیت محوری خودگردانی پارامتری برای شاخص C_{pmki} برابر با

$$\hat{C}^B_{pmki} = \frac{d - |\bar{X}_i^B - T|}{۳\{S_i^{۲B} + (\bar{X}_i^B - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}}, \quad i = ۱,۲$$

است، به گونه‌ای که $\bar{X}_i^B \sim N(\bar{x}_i, s_i^۲)$ و $S_i^{۲B} \sim s_i^۲ \mathcal{X}^۲_{n_i-۱}/n_i - ۱$. بنابراین، می‌توان چندک $\alpha/۲$ام و $۱-\alpha/۲$ام توزیع $BR = \hat{C}^B_{pmk۱}/\hat{C}^B_{pmk۲}$ را به‌عنوان کران پایین و بالای بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، از طریق الگوریتم زیر به‌دست آورد:

بر اساس مقادیر مشاهده شده x_{ij}، $i = ۱,۲$، $j = ۱,\ldots,n_i$ از دو فرآیند نرمال

۱- مقادیر $\bar{x}_i$ و $s_i^۲$ برای $i = ۱,۲$ محاسبه شود.

۲- $\bar{X}_i^B$ از توزیع $N(\bar{x}_i, s_i^۲)$ و $S_i^{۲B}$ از توزیع $s_i^۲ \mathcal{X}_{n_i-۱}^۲/n_i - ۱$ تولید شود.

۳- مقدار BR محاسبه شود.

۴- مراحل ۲ و ۳، K مرتبه (برای Kهای بزرگ) تکرار شود.

۵- چندک‌های $\alpha/۲$ام و $۱ - \alpha/۲$ام از توزیع BR محاسبه شود.

به‌صورت مشابه، بازه اطمینان برای $C_{pmk۲} - C_{pmk۱}$، نیز حاصل می‌گردد.

۳.۲ بازه اطمینان مجانبی

با توجه به اینکه $\bar{X}$ و $S_b^۲$ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و سازگار μ و $\sigma^۲$ هستند، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و سازگار C_{pmk} بر اساس نمونه nتایی برابر است با

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{۳\{S_b^۲ + (\bar{X} - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}}$$

چن و سو (۱۹۹۵) برای یک فرآیند نشان دادند در صورتی که $\mu \neq M$، آنگاه $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و برآورد واریانس به‌صورت

$$\begin{aligned}\hat{V}_{CH} &= \frac{۱}{۹(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})} + (\frac{۲\hat{\lambda}^*}{۳(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})^{\frac{۳}{۲}}})\hat{C}_{pmk} \\ &+ (\frac{۱۴۴\hat{\lambda}^{*۲} + (USL - LSL)^۲(\frac{m_۴}{S^۴} - ۱)}{۱۴۴(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})^۲})\hat{C}_{pmk}^۲\end{aligned}$$

است، که در آن $\hat{\lambda}^* = (\bar{X} - T)/S$ و $m_۴ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n (X_i - \bar{X})^۴$. چن و سو (۱۹۹۵) شکل نادرستی از $\hat{V}_{CH}$ را ارائه داده‌اند. لذا در این مقاله $\hat{V}_{CH}$، با آنچه که توسط چن و سو (۱۹۹۵) ارائه شده است اندکی متفاوت می‌باشد. باید توجه داشت که به‌ازای $T = \mu$ و $T = M$، شاخص C_{pmk} به $C_p(۰,۰) = C_p$ و به‌ازای $T \neq M$ و $\mu = M$

شاخص C_{pmk} به $C_{pm} = C_p(۰,۱)$ تبدیل می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به پرن و کاتز (۲۰۰۶) مراجعه شود. بنابراین در این حالت مناسب است که از توزیع مجانبی $\hat{C}_{pm}$ استفاده شود. برای اطلاعات بیشتر به چن و همکاران (۱۹۹۰) مراجعه شود.

حال فرض کنید هر دو فرآیند نامتمرکز باشند یعنی $T \neq \mu$. در این صورت بازه اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} به‌صورت

$$\hat{C}_{pmk۱} - \hat{C}_{pmk۲} \pm z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\{\frac{\hat{V}_{CH۱}}{n_۱} + \frac{\hat{V}_{CH۲}}{n_۲}\}^{\frac{۱}{۲}}$$

است، که در آن $\hat{V}_{CHi}/n_i$ برآورد واریانس مجانبی $\hat{C}_{pmki}$ برای $i = ۱,۲$ است. برای تشکیل بازه اطمینان مجانبی برای نسبت دو شاخص C_{pmk}، باید توجه داشت که $\sqrt{n}(\log(\hat{C}_{pmk}) - \log(C_{pmk}))$ بر اساس قضیه کرامر (فرگوسن، ۱۹۹۶) دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین صفر و برآورد واریانس مجانبی $\hat{V}_{CH}/\hat{C}^{۲}_{pmk}$ است. بنابراین بازه اطمینان مجانبی برای $\log(C_{pmk۱}) - \log(C_{pmk۲})$ برابر است با

$$\log(\hat{C}_{pmk۱}) - \log(\hat{C}_{pmk۲}) \pm z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\{\frac{\hat{V}_{CH۱}}{n_۱\hat{C}^{۲}_{pmk۱}} + \frac{\hat{V}_{CH۲}}{n_۲\hat{C}^{۲}_{pmk۲}}\}^{\frac{۱}{۲}}$$

با توجه به اینکه تبدیل لگاریتمی یک به یک است، بازه اطمینان مجانبی $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای نسبت دو شاخص C_{pmk} به‌صورت

$$(\frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{-z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}sd\}, \frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}sd\})$$

به‌دست می‌آید، که در آن $sd = \{\frac{\hat{V}_{CH۱}}{n_۱\hat{C}^{۲}_{pmk۱}} + \frac{\hat{V}_{CH۲}}{n_۲\hat{C}^{۲}_{pmk۲}}\}^{\frac{۱}{۲}}$.

۴.۲ بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده

با توجه به تقریبی بودن توزیع و واریانس معرفی شده توسط چن و سو (۱۹۹۵)، شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهد استفاده از $\hat{V}_{CHi}/n_i$ به عنوان برآورد واریانس تقریبی توزیع $\hat{C}_{pmk}$، باعث کاهش احتمال پوشش نسبت به احتمال پوشش اسمی می‌شود. به منظور حل این مشکل، این توزیع مجانبی اصلاح و از

واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ استفاده می‌شود. پرن و همکاران (۱۹۹۲) rامین گشتاور $\hat{C}_{pmk}$ را برای حالت $T = M$ به‌صورت

$$\begin{aligned} E(\hat{C}^r_{pmk}) &= \frac{1}{3^r}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \left(\begin{array}{c} r \\ \\ i \end{array}\right) (\frac{\delta}{\sqrt{2}})^{r-i} e^{-\frac{\lambda}{2}} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\frac{\lambda}{2})^j \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(i+1)+j)\Gamma(\frac{1}{2}(n-r+i)+j)}{\Gamma(\frac{1}{2}+j)\Gamma(\frac{1}{2}(n+i)+j)} \end{aligned} \qquad (1)$$

ارائه دادند، که در آن $\delta = \sqrt{n}(USL - LSL)/2\sigma$ و $\lambda = n(\mu - T)^2/\sigma^2$. بنابراین با استفاده از رابطه (۱) می‌توان واریانس $\hat{C}_{pmk}$ (که با σ^2_{pmk} نشان داده می‌شود) را محاسبه کرد. همان‌طور که در رابطه (۱) مشاهده می‌شود، σ^2_{pmk} به پارامترهای مجهول μ و σ^2 بستگی دارد که با استفاده از برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس $\bar{X}$ و $S^2 = nS^2_b/n - 1$ برآورد می‌شوند. در این حالت، با توجه به اینکه $\hat{\sigma}^2_{pmk}$ تابعی پیوسته از $\bar{X}$ و S^2 است، برآوردگری سازگار برای σ^2_{pmk} می‌باشد. بنابراین زمانی که فرآیند نامتمرکز است یعنی $\mu \neq T$، $\hat{C}_{pmk}$ توزیع مجانبی نرمال با میانگین C_{pmk} و برآورد واریانس $\hat{\sigma}^2_{pmk}$ دارد.

فرض کنید دو فرآیند نامتمرکز وجود داشته باشد. بنابراین، $\hat{C}_{pmk1} - \hat{C}_{pmk2}$ دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین $C_{pmk1} - C_{pmk2}$ و برآورد واریانس $\hat{V}_d = \hat{\sigma}^2_{pmk1} + \hat{\sigma}^2_{pmk2}$ است. بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ پیشنهادی بر اساس توزیع مجانبی $\hat{C}_{pmk}$، برای تفاضل دو C_{pmk} به‌صورت

$$\hat{C}_{pmk1} - \hat{C}_{pmk2} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}_d} \qquad (2)$$

است. برای محاسبه بازه اطمینان مجانبی برای نسبت دو شاخص C_{pmk} می‌توان از تبدیل لگاریتمی استفاده کرد. در این حالت بازه اطمینان مجانبی برای $\log(C_{pmk1}) - \log(C_{pmk2})$ برابر با

$$\log(\hat{C}_{pmk1}) - \log(\hat{C}_{pmk2}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}_r}$$

است، که در آن

$$\hat{V}_r = \frac{\hat{\sigma}^2_{pmk1}}{\hat{C}^2_{pmk1}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{pmk2}}{\hat{C}^2_{pmk2}}$$

بنابراین بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده $\%(\alpha - ۱)۱۰۰$ برای نسبت دو C_{pmk} به‌صورت

$$(\frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{-z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}_r}\}, \frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}_r}\}) \qquad (۳)$$

است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اگر فرآیند متمرکز و متقارن باشد استفاده از شاخص C_p صحیح می‌باشد. در این حالت می‌توان نشان داد که واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ که در روش بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده مورد استفاده قرار گرفت به صورت تقریبی با واریانس $\hat{C}_p$ برابر می‌شود. به منظور بررسی بیشتر، برای یک فرآیند متمرکز و متقارن به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} E[\hat{C}_{pmk}] &= \frac{\sqrt{\frac{n}{۲}}\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}C_p - \frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})} \\ E[\hat{C}^{۲}_{pmk}] &= \frac{n}{n-۲}C_p^{۲} - \frac{۲\sqrt{۲n}}{۳\sqrt{\pi}(n-۱)}C_p + \frac{۱}{۹n} \end{aligned}$$

با استفاده از تقریب استرلینگ، برای nهای بزرگ می‌توان نشان داد که عبارت $\Gamma(\frac{n}{۲})/\Gamma(\frac{n+۱}{۲})$ به‌صورت تقریبی برابر با $\sqrt{۲/(n+۱)}$ است. بنابراین برای nهای بزرگ، گشتاورهای اول و دوم $\hat{C}_{pmk}$ به‌صورت تقریبی برابر با گشتاورهای اول و دوم $\hat{C}_p$ هستند (پرن و کاتز، ۲۰۰۶).

محاسبه بازه‌های (۲) و (۳)، مستلزم محاسبه سری (۱) است. چون برخی از نرم‌افزارها مانند R و MATLAB قادر به محاسبه تابع گاما به‌ازای مقادیر بزرگ (۱۷۲ و بیشتر) نیستند، برای حل این مشکل روشی نظری و ابتکاری ارائه می‌شود که نسبت توابع گاما به‌صورت ضرب چند تابع در نظر گرفته شود. به عنوان مثال رابطه (۱)، به‌ازای $i = ۱$ به‌صورت

$$\frac{\Gamma(۱+j)}{\Gamma(\frac{۱}{۲}+j)} = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\prod_{l=۱}^{j}\frac{l}{j+\frac{۱}{۲}-l} & j \neq ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{\pi}} & j = ۰ \end{cases}$$

است که با استفاده از آن امکان محاسبه واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ فراهم می‌شود.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش بازه‌های اطمینان پیشنهادی و بازه اطمینان تعمیم‌یافته ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) و کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳)، از دیدگاه احتمال پوشش و متوسط طول بازه مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

برای مقادیر داده شده μ_i، σ_i و n_i، نمونه تصادفی با اندازه n_i از توزیع نرمال تولید و $\bar{x}_i$، $s_{b_i}^2$ و s_i^2 برای $i = 1, 2$ محاسبه می‌شوند. برای هر روش، بازه اطمینان با استفاده از رابطه‌های ارائه شده در بخش ۲، به‌دست آورده می‌شوند. نسبت تعداد دفعاتی که در $N = 100000$ مرتبه مقادیر واقعی C_{pmk1}/C_{pmk2} و $C_{pmk1} - C_{pmk2}$ در بازه‌های اطمینان مربوطه قرار می‌گیرند به عنوان برآورد احتمال پوشش در نظر گرفته شده است و همچنین میانگین طول بازه‌های اطمینان (اعداد داخل پرانتز) محاسبه می‌شود. برای بازه‌های اطمینان تعمیم‌یافته (GCI) و خودگردانی پارامتری (PBCI) چندک‌های مورد نیاز بر اساس نمونه $K = 40000$تایی محاسبه شده است. همچنین روش مجانبی با (ACI) و روش مجانبی اصلاح شده با (MACI) نشان داده شده‌اند.

به منظور مقایسه بهتر و اریب نبودن نتایج به‌دست آمده در شبیه‌سازی‌ها، از مقادیر مختلف میانگین و انحراف معیار ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) نیز استفاده شده است. همچنین قرار شده است $USL = 3$، $LSL = -3$ و $T = 0$. در جدول ۱، برخی طرح‌ها مربوط به فرآیند متمرکز است؛ یعنی $T = \mu$ و برخی دیگر مربوط به فرآیند نامتمرکز است، یعنی $T \neq \mu$. طرح‌های ۱ – ۴، ۶، ۱۱ و ۱۶ شامل یک فرآیند یا دو فرآیند متمرکز هستند و در مابقی طرح‌ها، فرآیندها نامتمرکز هستند. همان‌طور که در بخش ۲ تذکر داده شده است در صورتی که فرآیند متمرکز باشد، شاخص مناسب برای مقایسه فرآیندها شاخص C_p است. اما به دلیل اینکه در عمل و در مسائل کاربردی میانگین واقعی فرآیند مجهول است، عملاً مشخص نیست که فرآیند متمرکز یا نامتمرکز است.

بنابراین برای مقایسه فرآیندها در تمامی طرح‌ها از شاخص $\hat{C}_{pmk}$ استفاده می‌شود تا مشخص شود حتی در صورت استفاده از شاخص قابلیت نامناسب، کدام

جدول ۱: مقادیر متفاوت μ_iها و σ_iهای استفاده شده در شبیه‌سازی

طرح	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	C_{pmk1}	C_{pmk2}	C_{pmk1}/C_{pmk2}	$C_{pmk1}-C_{pmk2}$
۱	۰/۰۰	۰/۵۰	۰/۰۰	۰/۵۰	۲/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲	۰/۰۰	۰/۷۵	۰/۲۵	۰/۷۵	۱/۳۳۳	۱/۱۶۰	۱/۱۵۰	۰/۱۷۴
۳	۰/۰۰	۱/۰۰	۰/۵۰	۱/۰۰	۱/۰۰۰	۰/۷۴۵	۱/۳۴۲	۰/۲۵۵
۴	۰/۰۰	۱/۵۰	۱/۰۰	۱/۵۰	۰/۶۶۷	۰/۳۷۰	۱/۸۰۳	۰/۲۹۷
۵	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۲۵	۱/۵۰	۱/۶۴۰	۰/۶۰۳	۲/۷۲۰	۱/۰۳۷
۶	۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۶۰	۱/۰۰۰	۱/۱۶۰	۰/۱۶۰
۷	۰/۲۵	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۵	۰/۸۸۹	۰/۵۳۳	۱/۶۶۷	۰/۳۵۶
۸	۰/۲۵	۱/۵۰	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۶۰۳	۱/۱۷۹	۰/۵۱۱	−۰/۵۷۶
۹	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۱۷۹	۰/۹۲۵	۱/۲۷۵	۰/۲۵۴
۱۰	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰	۰/۵۰	۰/۹۲۵	۰/۵۹۶	۱/۵۵۰	۰/۳۲۸
۱۱	۰/۵۰	۱/۰۰	۰/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۴۵	۱/۰۰۰	۰/۷۴۵	−۰/۲۵۵
۱۲	۰/۵۰	۱/۵۰	۰/۲۵	۱/۰۰	۰/۵۲۷	۰/۸۸۹	۰/۵۹۳	−۰/۳۶۲
۱۳	۱/۰۰	۰/۵۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۵۹۶	۰/۴۷۱	۱/۲۶۵	۰/۱۲۵
۱۴	۱/۰۰	۰/۷۵	۰/۵۰	۱/۵۰	۰/۵۳۳	۰/۵۲۷	۱/۰۱۲	۰/۰۰۶
۱۵	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۴۷۱	۱/۶۴۰	۰/۲۸۶	−۱/۱۶۸
۱۶	۱/۰۰	۱/۵۰	۰/۰۰	۰/۷۵	۰/۳۷۰	۱/۳۳۳	۰/۲۷۷	−۰/۹۶۴

روش عملکرد بهتری دارد.

نتایج مربوط به برآورد احتمال پوشش و میانگین طول برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای حجم نمونه‌های مختلف و $1-\alpha=0/95$ در جدول ۲ بیانگر آن است که:

۱) بازه اطمینان مجانبی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk}، بر اساس واریانس مجانبی پیشنهاد شده توسط چن و سو (۱۹۹۵)، زمانی‌که اندازه نمونه کوچک است (کوچک‌تر از ۷۵ یا ۵۰) عملکرد مناسبی از دیدگاه احتمال پوشش ندارد. همچنین برآورد احتمال پوشش این روش زمانی که اندازه نمونه کوچک است و فرآیند متمرکز است $(T=\mu)$ مانند طرح‌های ۱ – ۴، ٦، ۱۱ و ١٦ اختلاف زیادی با ۰/۹۵ در مقایسه با حالتی که فرآیند نامتمرکز است $(T\neq\mu)$؛ دارد. با این وجود در برخی موارد (طرح‌های ۵ و ۷) برای اندازه نمونه کوچک، احتمال پوشش بازه اطمینان مجانبی در حالتی که حتی فرآیند نامتمرکز است نیز به صورت معنی‌داری کمتر از ۰/۹۵ است. بنابراین در عمل، به ویژه برای اندازه نمونه کوچک و در حالتی که فرآیند متمرکز است، بازه اطمینان مجانبی توصیه نمی‌شود.

۲) همان‌طور که وو و هوانگ (۲۰۱۰) متذکر شده‌اند، بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت دو شاخص C_{pmk} عملکرد بهتری نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای

جدول ۲: برآورد احتمال پوشش و متوسط طول بازه‌های اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk}

طرح	حجم نمونه	نسبت				تفاضل			
		GCI	PBCI	ACI	MACI	GCI	PBCI	ACI	MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۲	۰/۸۳۷	۰/۹۶۸	۰/۹۵۵	۰/۹۵۲	۰/۸۴۸	۰/۹۸۰
		(۱/۴۴۲)	(۱/۴۴۳)	(۰/۹۹۴)	(۱/۵۷۰)	(۲/۳۶۳)	(۲/۷۶۸)	(۱/۸۷۲)	(۲/۸۴۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۳	۰/۸۷۷	۰/۹۶۴	۰/۹۵۵	۰/۹۵۳	۰/۸۸۵	۰/۹۷۱
		(۱/۰۶۳)	(۱/۰۷۴)	(۰/۸۳۸)	(۱/۱۲۷)	(۱/۸۶۹)	(۲/۰۸۱)	(۱/۵۹۸)	(۲/۱۱۵)
۱	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴	۰/۹۵۴	۰/۸۹۹	۰/۹۶۲	۰/۹۵۴	۰/۹۵۴	۰/۹۰۵	۰/۹۶۷
		(۰/۹۰۷)	(۰/۸۹۹)	(۰/۷۴۶)	(۰/۹۲۳)	(۱/۶۱۱)	(۱/۷۴۷)	(۱/۴۳۸)	(۱/۷۶۱)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۵۳	۰/۹۰۹	۰/۹۶۰	۰/۹۵۴	۰/۹۵۳	۰/۹۱۴	۰/۹۶۴
		(۰/۷۵۱)	(۰/۷۶۰)	(۰/۶۵۳)	(۰/۷۸۰)	(۱/۳۹۳)	(۱/۴۸۷)	(۱/۲۶۴)	(۱/۵۰۱)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۵۶	۰/۹۲۷	۰/۹۵۷	۰/۹۵۴	۰/۹۵۶	۰/۹۳۰	۰/۹۶۰
		(۰/۶۰۷)	(۰/۶۰۵)	(۰/۵۴۸)	(۰/۶۱۱)	(۱/۱۳۴)	(۱/۱۸۴)	(۱/۰۶۹)	(۱/۱۸۸)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۵	۰/۹۳۶	۰/۹۵۶	۰/۹۵۲	۰/۹۵۵	۰/۹۳۸	۰/۹۵۸
		(۰/۴۸۶)	(۰/۴۸۵)	(۰/۴۵۳)	(۰/۴۸۸)	(۰/۹۲۶)	(۰/۹۵۳)	(۰/۸۸۹)	(۰/۹۵۵)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۸۵۹	۰/۹۶۷	۰/۹۴۸	۰/۹۵۱	۰/۸۵۹	۰/۹۷۳
		(۱/۷۱۰)	(۱/۶۸۵)	(۱/۲۷۹)	(۱/۸۵۹)	(۱/۵۹۵)	(۱/۸۳۸)	(۱/۳۲۱)	(۱/۸۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰	۰/۸۸۹	۰/۹۶۱	۰/۹۴۷	۰/۹۵۱	۰/۸۸۸	۰/۹۶۴
		(۱/۲۶۸)	(۱/۲۶۰)	(۱/۰۵۳)	(۱/۳۴۱)	(۱/۲۷۴)	(۱/۳۹۳)	(۱/۱۱۶)	(۱/۴۱۹)
۲	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۸	۰/۹۴۸	۰/۹۰۹	۰/۹۵۵	۰/۹۴۶	۰/۹۴۸	۰/۹۱۲	۰/۹۶۰
		(۱/۰۷۴)	(۱/۰۶۸)	(۰/۹۵۲)	(۱/۱۱۲)	(۱/۰۸۶)	(۱/۱۶۶)	(۱/۰۰۹)	(۱/۱۷۸)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۹	۰/۹۴۹	۰/۹۱۴	۰/۹۵۸	۰/۹۴۵	۰/۹۵۰	۰/۹۱۱	۰/۹۵۷
		(۰/۹۱۲)	(۰/۹۰۰)	(۰/۸۰۷)	(۰/۹۳۵)	(۰/۹۶۳)	(۱/۰۰۵)	(۰/۸۷۵)	(۱/۰۱۶)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۶	۰/۹۴۷	۰/۹۲۹	۰/۹۵۱	۰/۹۴۴	۰/۹۴۷	۰/۹۳۱	۰/۹۵۴
		(۰/۷۳۱)	(۰/۷۳۰)	(۰/۶۹۳)	(۰/۷۴۸)	(۰/۷۷۱)	(۰/۷۹۹)	(۰/۷۴۳)	(۰/۸۰۳)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۴	۰/۹۴۴	۰/۹۳۶	۰/۹۵۰	۰/۹۴۱	۰/۹۴۴	۰/۹۳۷	۰/۹۵۲
		(۰/۵۹۱)	(۰/۵۹۲)	(۰/۵۷۲)	(۰/۶۰۲)	(۰/۶۳۱)	(۰/۶۴۶)	(۰/۶۱۶)	(۰/۶۴۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۴۵	۰/۸۷۲	۰/۹۶۵	۰/۹۳۷	۰/۹۴۸	۰/۸۶۴	۰/۹۶۸
		(۲/۲۱۲)	(۲/۱۱۶)	(۱/۷۰۹)	(۲/۳۶۰)	(۱/۲۱۵)	(۱/۳۷۵)	(۱/۰۲۳)	(۱/۴۲۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۹	۰/۹۴۴	۰/۸۹۸	۰/۹۶۰	۰/۹۳۶	۰/۹۴۷	۰/۸۹۱	۰/۹۶۰
		(۱/۶۲۸)	(۱/۵۷۵)	(۱/۳۷۳)	(۱/۶۹۳)	(۰/۹۷۷)	(۱/۰۵۰)	(۰/۸۵۹)	(۱/۰۷۲)
۳	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۱	۰/۹۴۰	۰/۹۱۳	۰/۹۵۱	۰/۹۳۳	۰/۹۴۱	۰/۹۱۵	۰/۹۵۶
		(۱/۳۶۸)	(۱/۳۶۱)	(۱/۲۵۴)	(۱/۴۲۹)	(۰/۸۲۵)	(۰/۸۷۵)	(۰/۷۷۴)	(۰/۸۸۶)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۹	۰/۹۴۵	۰/۹۱۹	۰/۹۵۷	۰/۹۳۷	۰/۹۴۷	۰/۹۱۱	۰/۹۵۵
		(۱/۱۷۳)	(۱/۱۲۲)	(۱/۰۳۲)	(۱/۱۷۲)	(۰/۷۴۴)	(۰/۷۶۲)	(۰/۶۷۱)	(۰/۷۷۱)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۰	۰/۹۴۲	۰/۹۳۲	۰/۹۴۸	۰/۹۳۴	۰/۹۴۲	۰/۹۳۳	۰/۹۵۲
		(۰/۹۳۲)	(۰/۹۳۱)	(۰/۸۹۹)	(۰/۹۵۸)	(۰/۵۸۵)	(۰/۶۰۲)	(۰/۵۶۶)	(۰/۶۰۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۳۹	۰/۹۴۰	۰/۹۳۷	۰/۹۴۸	۰/۹۳۳	۰/۹۴۰	۰/۹۳۸	۰/۹۵۱
		(۰/۷۵۴)	(۰/۷۵۴)	(۰/۷۳۹)	(۰/۷۷۰)	(۰/۴۷۷)	(۰/۴۸۷)	(۰/۴۶۸)	(۰/۴۸۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۳۶	۰/۸۹۷	۰/۹۶۱	۰/۹۱۴	۰/۹۴۱	۰/۸۷۴	۰/۹۶۰
		(۵/۱۴۰)	(۴/۲۴۲)	(۳/۳۵۲)	(۴/۲۴۶)	(۰/۸۴۸)	(۰/۹۳۶)	(۰/۷۴۰)	(۰/۹۷۱)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۳۵	۰/۹۱۴	۰/۹۵۸	۰/۹۱۷	۰/۹۳۸	۰/۸۹۶	۰/۹۵۶
		(۳/۱۱۸)	(۲/۷۳۰)	(۲/۴۵۷)	(۲/۸۶۱)	(۰/۶۸۷)	(۰/۷۲۲)	(۰/۶۱۷)	(۰/۷۳۹)
۴	(۲۵,۲۵)	۰/۹۳۳	۰/۹۳۱	۰/۹۲۱	۰/۹۴۶	۰/۹۱۲	۰/۹۳۲	۰/۹۲۰	۰/۹۵۳
		(۲/۵۲۴)	(۲/۴۷۲)	(۲/۲۸۱)	(۲/۵۰۷)	(۰/۵۷۳)	(۰/۶۰۰)	(۰/۵۴۹)	(۰/۶۰۸)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۳۷	۰/۹۲۹	۰/۹۵۶	۰/۹۲۱	۰/۹۳۸	۰/۹۱۳	۰/۹۵۲
		(۲/۰۵۶)	(۱/۸۲۵)	(۱/۷۴۴)	(۱/۹۰۰)	(۰/۵۲۴)	(۰/۵۲۸)	(۰/۴۸۱)	(۰/۵۳۵)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۳۶	۰/۹۳۶	۰/۹۳۵	۰/۹۴۶	۰/۹۱۷	۰/۹۳۲	۰/۹۳۵	۰/۹۵۰
		(۱/۶۰۳)	(۱/۵۹۳)	(۱/۵۶۱)	(۱/۶۲۶)	(۰/۴۰۵)	(۰/۴۱۴)	(۰/۴۰۰)	(۰/۴۱۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۱	۰/۹۴۴	۰/۹۳۸	۰/۹۴۶	۰/۹۲۲	۰/۹۳۷	۰/۹۴۰	۰/۹۴۸
		(۱/۲۷۷)	(۱/۲۷۵)	(۱/۲۶۵)	(۱/۲۹۴)	(۰/۳۳۰)	(۰/۳۳۵)	(۰/۳۳۰)	(۰/۳۳۶)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت				تفاضل			
		GCI	PBCI	ACI	MACI	GCI	PBCI	ACI	MACI
	(۱۰, ۵)	۰/۹۵۷	۰/۹۴۴	۰/۸۷۰	۰/۹۶۵	۰/۹۵۵	۰/۹۳۴	۰/۸۶۳	۰/۹۷۲
		(۶/۲۳۱)	(۵/۳۵۵)	(۳/۶۷۸)	(۵/۲۹۵)	(۱/۷۰۰)	(۱/۹۵۸)	(۱/۲۱۳)	(۲/۰۶۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۹	۰/۹۴۸	۰/۹۲۲	۰/۹۵۹	۰/۹۵۲	۰/۹۳۹	۰/۹۰۹	۰/۹۶۴
		(۴/۰۱۸)	(۳/۶۹۲)	(۳/۱۸۲)	(۳/۶۷۴)	(۱/۳۶۵)	(۱/۵۱۹)	(۱/۳۰۱)	(۱/۵۷۴)
۵	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۲	۰/۹۳۷	۰/۹۶۱	۰/۹۵۶	۰/۹۴۴	۰/۹۲۷	۰/۹۵۹
		(۳/۳۱۹)	(۳/۲۱۲)	(۲/۸۳۸)	(۳/۰۹۷)	(۱/۱۲۷)	(۱/۱۸۲)	(۱/۰۷۹)	(۱/۲۰۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۷	۰/۹۴۹	۰/۹۳۵	۰/۹۵۴	۰/۹۴۵	۰/۹۴۳	۰/۹۲۶	۰/۹۵۷
		(۲/۶۲۲)	(۲/۴۸۶)	(۲/۳۱۰)	(۲/۴۸۹)	(۱/۰۳۹)	(۱/۱۳۲)	(۱/۰۳۶)	(۱/۱۵۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۶	۰/۹۵۶	۰/۹۴۵	۰/۹۵۵	۰/۹۵۴	۰/۹۴۸	۰/۹۴۰	۰/۹۵۵
		(۲/۰۸۹)	(۲/۰۶۰)	(۱/۹۶۰)	(۲/۰۱۸)	(۰/۸۰۱)	(۰/۸۱۹)	(۰/۷۸۵)	(۰/۸۲۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۶۰	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۳	۰/۹۵۳
		(۱/۶۸۴)	(۱/۶۳۷)	(۱/۵۸۸)	(۱/۶۱۱)	(۰/۶۵۵)	(۰/۶۶۴)	(۰/۶۴۸)	(۰/۶۶۹)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۹	۰/۹۵۳	۰/۸۶۵	۰/۹۶۱	۰/۹۶۱	۰/۹۶۸	۰/۸۷۳	۰/۹۷۸
		(۲/۰۳۰)	(۲/۱۰۰)	(۱/۵۰۷)	(۲/۱۴۰)	(۱/۵۲۴)	(۱/۶۵۱)	(۱/۲۳۵)	(۱/۷۰۱)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۴۴	۰/۸۹۴	۰/۹۵۴	۰/۹۵۳	۰/۹۴۴	۰/۹۰۴	۰/۹۶۷
		(۱/۵۰۲)	(۱/۴۷۵)	(۱/۲۳۰)	(۱/۵۱۸)	(۱/۱۲۹)	(۱/۲۵۳)	(۱/۰۵۱)	(۱/۲۸۲)
۶	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۵	۰/۹۰۹	۰/۹۵۵	۰/۹۴۸	۰/۹۴۴	۰/۹۱۶	۰/۹۶۰
		(۱/۲۷۴)	(۱/۲۴۹)	(۱/۰۶۹)	(۱/۲۴۷)	(۰/۹۶۶)	(۱/۰۳۳)	(۰/۹۱۰)	(۱/۰۴۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۲	۰/۹۱۷	۰/۹۴۸	۰/۹۴۷	۰/۹۴۳	۰/۹۲۶	۰/۹۵۸
		(۱/۰۲۸)	(۱/۰۲۹)	(۰/۹۳۳)	(۱/۰۴۳)	(۰/۸۴۹)	(۰/۹۱۴)	(۰/۸۳۲)	(۰/۹۲۸)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۲	۰/۹۴۴	۰/۹۲۸	۰/۹۵۱	۰/۹۴۵	۰/۹۴۴	۰/۹۳۲	۰/۹۵۴
		(۰/۸۳۱)	(۰/۸۲۴)	(۰/۷۶۰)	(۰/۸۱۷)	(۰/۶۸۷)	(۰/۷۱۰)	(۰/۶۶۹)	(۰/۷۱۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۲	۰/۹۴۵	۰/۹۳۴	۰/۹۵۰	۰/۹۴۳	۰/۹۴۴	۰/۹۳۸	۰/۹۵۲
		(۰/۶۵۹)	(۰/۶۵۶)	(۰/۶۲۰)	(۰/۶۵۰)	(۰/۵۶۳)	(۰/۵۶۳)	(۰/۵۵۴)	(۰/۵۷۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۸	۰/۹۰۷	۰/۹۶۴	۰/۹۶۰	۰/۹۵۹	۰/۸۹۵	۰/۹۷۳
		(۳/۱۰۲)	(۳/۰۳۰)	(۲/۳۷۸)	(۳/۰۵۱)	(۱/۲۰۰)	(۱/۲۱۳)	(۰/۹۵۶)	(۱/۲۵۷)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۶۰	۰/۹۵۲	۰/۹۲۴	۰/۹۵۹	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۱۶	۰/۹۶۶
		(۲/۰۶۲)	(۲/۰۲۵)	(۱/۸۹۵)	(۲/۲۰۰)	(۰/۸۸۰)	(۰/۹۲۹)	(۰/۸۰۶)	(۰/۹۵۴)
۷	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۴۸	۰/۹۳۴	۰/۹۵۶	۰/۹۵۱	۰/۹۵۲	۰/۹۳۳	۰/۹۵۹
		(۱/۷۰۷)	(۱/۷۲۲)	(۱/۶۷۷)	(۱/۸۲۲)	(۰/۷۱۹)	(۰/۷۴۸)	(۰/۶۹۲)	(۰/۷۵۷)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۳	۰/۹۵۳	۰/۹۳۵	۰/۹۵۴	۰/۹۵۲	۰/۹۵۴	۰/۹۳۰	۰/۹۵۸
		(۱/۵۲۰)	(۱/۴۶۴)	(۱/۴۱۸)	(۱/۵۳۵)	(۰/۶۶۵)	(۰/۶۸۶)	(۰/۶۳۷)	(۰/۶۹۸)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۲	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۴۱	۰/۹۵۳
		(۱/۱۸۳)	(۱/۱۸۹)	(۱/۱۷۹)	(۱/۲۲۲)	(۰/۵۰۸)	(۰/۵۱۸)	(۰/۵۰۲)	(۰/۵۲۱)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۵	۰/۹۵۱	۰/۹۵۱	۰/۹۵۴	۰/۹۴۳	۰/۹۵۱
		(۰/۹۶۰)	(۰/۹۶۶)	(۰/۹۶۰)	(۰/۹۸۳)	(۰/۴۱۵)	(۰/۴۲۱)	(۰/۴۱۳)	(۰/۴۲۴)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۶	۰/۹۱۴	۰/۹۷۱	۰/۹۵۸	۰/۹۵۰	۰/۹۲۱	۰/۹۷۲
		(۰/۸۶۴)	(۰/۸۹۰)	(۰/۶۹۶)	(۰/۹۰۰)	(۱/۲۴۳)	(۱/۳۲۵)	(۱/۱۰۵)	(۱/۳۳۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۳۴	۰/۹۶۷	۰/۹۶۵	۰/۹۴۷	۰/۹۳۴	۰/۹۶۵
		(۰/۵۸۴)	(۰/۵۹۸)	(۰/۵۷۱)	(۰/۶۵۹)	(۱/۰۲۵)	(۰/۹۸۲)	(۰/۸۹۳)	(۰/۹۹۶)
۸	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۴۱	۰/۹۶۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۳	۰/۹۳۹	۰/۹۶۰
		(۰/۴۹۱)	(۰/۴۹۵)	(۰/۴۹۴)	(۰/۵۳۲)	(۰/۸۷۷)	(۰/۸۹۳)	(۰/۸۳۷)	(۰/۹۰۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۸	۰/۹۴۶	۰/۹۶۲	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۴۵	۰/۹۵۹
		(۰/۴۴۰)	(۰/۴۴۲)	(۰/۴۳۹)	(۰/۴۶۷)	(۰/۷۵۸)	(۰/۶۹۷)	(۰/۶۶۸)	(۰/۷۰۳)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۵۵	۰/۹۴۸	۰/۹۵۵	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۰/۹۵۵
		(۰/۳۴۷)	(۰/۳۴۹)	(۰/۳۵۴)	(۰/۳۶۱)	(۰/۶۱۱)	(۰/۶۱۶)	(۰/۶۰۱)	(۰/۶۱۹)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۶۱	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۶۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳
		(۰/۲۸۴)	(۰/۲۸۵)	(۰/۲۹۰)	(۰/۲۹۲)	(۰/۴۹۷)	(۰/۴۹۹)	(۰/۴۹۳)	(۰/۵۰۱)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت GCI	نسبت PBCI	نسبت ACI	نسبت MACI	تفاضل GCI	تفاضل PBCI	تفاضل ACI	تفاضل MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۳	۰/۹۵۱	۰/۹۰۸	۰/۹۵۵	۰/۹۵۶	۰/۹۵۳	۰/۹۱۹	۰/۹۷۰
		(۲/۱۶۰)	(۲/۱۴۷)	(۱/۷۶۳)	(۲/۱۸۵)	(۱/۴۳۵)	(۱/۵۷۱)	(۱/۳۷۰)	(۱/۶۷۴)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۰	۰/۹۴۳	۰/۹۲۴	۰/۹۵۴	۰/۹۵۵	۰/۹۴۱	۰/۹۳۲	۰/۹۶۳
		(۱/۵۷۱)	(۱/۵۰۰)	(۱/۳۹۲)	(۱/۵۸۸)	(۱/۱۹۹)	(۱/۲۴۹)	(۱/۱۱۶)	(۱/۲۶۹)
۹	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۲۹	۰/۹۵۳	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۳۷	۰/۹۶۰
		(۱/۳۲۷)	(۱/۲۸۱)	(۱/۲۱۴)	(۱/۳۳۳)	(۱/۰۲۴)	(۱/۰۴۲)	(۰/۹۶۱)	(۱/۰۵۰)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۸	۰/۹۴۶	۰/۹۳۵	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۵	۰/۹۴۰	۰/۹۵۸
		(۱/۱۱۲)	(۱/۰۷۱)	(۱/۰۲۸)	(۱/۱۰۵)	(۰/۸۸۴)	(۰/۹۰۶)	(۰/۸۵۰)	(۰/۹۱۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۴۱	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۷	۰/۹۴۵	۰/۹۵۶
		(۰/۸۹۱)	(۰/۸۷۵)	(۰/۸۵۳)	(۰/۸۹۳)	(۰/۷۱۰)	(۰/۷۱۴)	(۰/۶۸۶)	(۰/۷۱۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۵۲	۰/۹۵۲	۰/۹۵۵	۰/۹۴۷	۰/۹۵۴
		(۰/۷۱۵)	(۰/۷۰۷)	(۰/۶۹۴)	(۰/۷۱۶)	(۰/۵۷۵)	(۰/۵۷۵)	(۰/۵۶۲)	(۰/۵۷۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۴۶	۰/۹۰۱	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۰۲	۰/۹۶۵
		(۲/۳۴۱)	(۲/۴۶۵)	(۲/۰۷۰)	(۲/۵۷۷)	(۱/۱۲۱)	(۱/۲۲۰)	(۱/۰۳۵)	(۱/۲۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۸	۰/۹۴۱	۰/۹۱۸	۰/۹۵۰	۰/۹۵۰	۰/۹۳۹	۰/۹۲۰	۰/۹۵۹
		(۱/۷۳۴)	(۱/۷۶۷)	(۱/۶۵۶)	(۱/۹۰۲)	(۰/۹۰۶)	(۰/۹۶۵)	(۰/۸۶۱)	(۰/۹۵۵)
۱۰	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۳۱	۰/۹۵۱	۰/۹۵۴	۰/۹۴۳	۰/۹۳۴	۰/۹۵۶
		(۱/۴۳۷)	(۱/۴۴۰)	(۱/۳۹۲)	(۱/۵۰۶)	(۰/۷۴۹)	(۰/۷۶۱)	(۰/۷۱۰)	(۰/۷۷۲)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۳۰	۰/۹۴۹	۰/۹۴۴	۰/۹۴۳	۰/۹۳۳	۰/۹۵۴
		(۱/۲۷۹)	(۱/۲۹۷)	(۱/۲۴۸)	(۱/۳۵۵)	(۰/۶۷۷)	(۰/۷۲۰)	(۰/۶۷۳)	(۰/۷۳۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳	۰/۹۴۷	۰/۹۴۱	۰/۹۵۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۶	۰/۹۴۳	۰/۹۵۴
		(۰/۹۹۲)	(۰/۹۹۲)	(۰/۹۷۶)	(۱/۰۱۴)	(۰/۵۲۳)	(۰/۵۲۶)	(۰/۵۰۸)	(۰/۵۳۰)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۴	۰/۹۵۱	۰/۹۵۴	۰/۹۵۲	۰/۹۴۴	۰/۹۵۳
		(۰/۸۰۳)	(۰/۸۰۴)	(۰/۷۹۴)	(۰/۸۱۴)	(۰/۴۲۱)	(۰/۴۲۵)	(۰/۴۱۶)	(۰/۴۲۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۱	۰/۸۷۵	۰/۹۵۴	۰/۹۳۵	۰/۹۳۸	۰/۸۸۳	۰/۹۷۲
		(۱/۴۴۷)	(۱/۴۳۲)	(۱/۱۱۴)	(۱/۵۰۱)	(۰/۹۸۷)	(۱/۱۴۶)	(۱/۰۴۸)	(۱/۳۷۰)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۳	۰/۹۳۷	۰/۸۹۹	۰/۹۴۷	۰/۹۳۷	۰/۹۳۹	۰/۹۱۰	۰/۹۶۱
		(۱/۰۴۶)	(۱/۰۳۵)	(۰/۸۹۹)	(۱/۰۷۲)	(۰/۹۲۸)	(۱/۰۱۵)	(۰/۸۷۸)	(۱/۰۳۴)
۱۱	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰	۰/۹۱۳	۰/۹۵۱	۰/۹۳۳	۰/۹۴۱	۰/۹۱۵	۰/۹۵۷
		(۰/۸۹۱)	(۰/۸۶۷)	(۰/۷۶۰)	(۰/۸۶۹)	(۰/۸۲۴)	(۰/۸۷۵)	(۰/۷۷۳)	(۰/۸۸۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۳۴	۰/۹۳۷	۰/۹۱۹	۰/۹۴۳	۰/۹۳۰	۰/۹۳۷	۰/۹۲۹	۰/۹۵۴
		(۰/۷۱۷)	(۰/۷۳۰)	(۰/۶۷۷)	(۰/۷۴۳)	(۰/۶۸۹)	(۰/۷۳۶)	(۰/۶۸۲)	(۰/۷۴۵)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۰	۰/۹۴۱	۰/۹۳۰	۰/۹۵۰	۰/۹۳۴	۰/۹۴۱	۰/۹۳۲	۰/۹۵۴
		(۰/۵۸۱)	(۰/۵۷۴)	(۰/۵۳۴)	(۰/۵۷۰)	(۰/۵۸۵)	(۰/۶۰۲)	(۰/۵۶۶)	(۰/۶۰۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۳۱	۰/۹۴۳	۰/۹۳۶	۰/۹۴۹	۰/۹۳۴	۰/۹۴۴	۰/۹۳۸	۰/۹۵۳
		(۰/۴۶۰)	(۰/۴۵۶)	(۰/۴۳۴)	(۰/۴۵۲)	(۰/۴۷۷)	(۰/۴۸۷)	(۰/۴۶۸)	(۰/۴۸۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۶۲	۰/۹۵۴	۰/۹۱۵	۰/۹۶۷	۰/۹۶۴	۰/۹۵۵	۰/۹۰۵	۰/۹۷۰
		(۱/۱۳۹)	(۱/۱۰۳)	(۰/۹۷۱)	(۱/۱۶۰)	(۱/۰۱۹)	(۱/۱۳۷)	(۰/۹۵۴)	(۱/۱۶۹)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۹	۰/۹۵۶	۰/۹۲۷	۰/۹۵۹	۰/۹۶۳	۰/۹۵۶	۰/۹۲۲	۰/۹۵۹
		(۰/۸۲۹)	(۰/۸۲۶)	(۰/۷۸۲)	(۰/۸۸۲)	(۰/۸۱۴)	(۰/۸۶۸)	(۰/۷۹۳)	(۰/۸۸۴)
۱۲	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۸	۰/۹۵۴	۰/۹۳۴	۰/۹۵۷	۰/۹۵۶	۰/۹۵۴	۰/۹۲۸	۰/۹۵۶
		(۰/۷۰۹)	(۰/۶۹۷)	(۰/۶۶۵)	(۰/۷۱۷)	(۰/۷۳۳)	(۰/۷۷۷)	(۰/۷۲۵)	(۰/۷۸۹)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۴	۰/۹۳۶	۰/۹۵۱	۰/۹۶۱	۰/۹۵۴	۰/۹۳۶	۰/۹۵۱
		(۰/۵۹۰)	(۰/۵۹۸)	(۰/۵۹۰)	(۰/۶۲۳)	(۰/۶۱۳)	(۰/۶۳۰)	(۰/۶۰۸)	(۰/۶۳۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۳	۰/۹۴۱	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۵۴	۰/۹۳۸	۰/۹۵۱
		(۰/۴۸۱)	(۰/۴۷۷)	(۰/۴۶۸)	(۰/۴۸۴)	(۰/۵۲۹)	(۰/۵۴۵)	(۰/۵۳۰)	(۰/۵۴۹)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۵۰	۰/۹۴۴	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۵۱	۰/۹۴۱	۰/۹۵۰
		(۰/۳۸۹)	(۰/۳۸۷)	(۰/۳۸۲)	(۰/۳۹۱)	(۰/۴۳۷)	(۰/۴۴۵)	(۰/۴۳۷)	(۰/۴۴۸)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت				تفاضل			
		GCI	PBCI	ACI	MACI	GCI	PBCI	ACI	MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۶۹	۰/۹۳۹	۰/۹۲۹	۰/۹۵۴	۰/۹۶۵	۰/۹۳۸	۰/۹۴۱	۰/۹۶۷
		(۲/۵۳۱)	(۲/۰۶۷)	(۱/۹۰۳)	(۲/۱۶۷)	(۰/۸۲۵)	(۰/۷۸۶)	(۰/۷۰۹)	(۰/۷۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۶۸	۰/۹۴۳	۰/۹۳۸	۰/۹۵۴	۰/۹۶۳	۰/۹۴۲	۰/۹۴۶	۰/۹۶۲
		(۱/۷۴۹)	(۱/۵۱۲)	(۱/۴۴۶)	(۱/۵۵۸)	(۰/۶۳۴)	(۰/۶۰۲)	(۰/۵۶۴)	(۰/۶۰۴)
۱۳	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴	۰/۹۴۲	۰/۹۳۷	۰/۹۵۳	۰/۹۵۴	۰/۹۴۳	۰/۹۴۴	۰/۹۶۰
		(۱/۴۳۹)	(۱/۳۶۲)	(۱/۳۰۷)	(۱/۳۹۴)	(۰/۵۳۶)	(۰/۵۲۹)	(۰/۵۰۲)	(۰/۵۳۲)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۷۰	۰/۹۴۶	۰/۹۴۳	۰/۹۵۲	۰/۹۶۴	۰/۹۴۶	۰/۹۴۷	۰/۹۵۷
		(۱/۱۹۹)	(۱/۰۵۳)	(۱/۰۳۱)	(۱/۰۷۱)	(۰/۴۶۰)	(۰/۴۳۳)	(۰/۴۱۸)	(۰/۴۳۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۲	۰/۹۴۷	۰/۹۴۴	۰/۹۵۲	۰/۹۵۲	۰/۹۴۷	۰/۹۴۸	۰/۹۵۶
		(۰/۹۴۱)	(۰/۹۱۸)	(۰/۹۰۱)	(۰/۹۲۹)	(۰/۳۶۷)	(۰/۳۶۴)	(۰/۳۵۴)	(۰/۳۶۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۴۷	۰/۹۴۵	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰	۰/۹۴۷	۰/۹۴۹	۰/۹۵۴
		(۰/۷۵۰)	(۰/۷۳۸)	(۰/۷۲۹)	(۰/۷۴۴)	(۰/۲۹۶)	(۰/۲۹۴)	(۰/۲۸۹)	(۰/۲۹۵)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۲۶	۰/۹۵۹	۰/۹۵۱	۰/۹۶۰	۰/۹۲۸	۰/۹۶۶
		(۲/۱۱۱)	(۱/۹۸۹)	(۱/۸۳۹)	(۲/۱۵۹)	(۰/۸۷۰)	(۰/۹۰۰)	(۰/۸۰۲)	(۰/۹۲۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۷	۰/۹۴۷	۰/۹۳۶	۰/۹۵۴	۰/۹۵۷	۰/۹۴۷	۰/۹۳۸	۰/۹۵۸
		(۱/۷۰۱)	(۱/۵۰۸)	(۱/۳۸۰)	(۱/۵۱۲)	(۰/۶۷۲)	(۰/۶۹۷)	(۰/۶۵۰)	(۰/۷۰۶)
۱۴	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۶	۰/۹۴۹	۰/۹۳۶	۰/۹۵۳	۰/۹۵۶	۰/۹۴۹	۰/۹۳۶	۰/۹۵۵
		(۱/۳۹۲)	(۱/۳۱۰)	(۱/۲۰۳)	(۱/۲۸۰)	(۰/۵۸۸)	(۰/۶۰۰)	(۰/۵۷۳)	(۰/۶۰۶)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۶۰	۰/۹۵۱	۰/۹۴۰	۰/۹۵۲	۰/۹۶۲	۰/۹۵۴	۰/۹۴۲	۰/۹۵۴
		(۱/۱۱۵)	(۱/۰۳۰)	(۰/۹۸۵)	(۱/۰۳۴)	(۰/۴۹۸)	(۰/۵۰۱)	(۰/۴۸۹)	(۰/۵۱۲)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳	۰/۹۴۹	۰/۹۴۳	۰/۹۵۰	۰/۹۵۳	۰/۹۵۰	۰/۹۴۳	۰/۹۵۰
		(۰/۸۷۶)	(۰/۸۵۲)	(۰/۸۲۱)	(۰/۸۴۵)	(۰/۴۱۶)	(۰/۴۲۰)	(۰/۴۱۱)	(۰/۴۲۲)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۵۰	۰/۹۴۴	۰/۹۵۰	۰/۹۵۱	۰/۹۴۹	۰/۹۴۴	۰/۹۵۱
		(۰/۶۹۱)	(۰/۶۸۰)	(۰/۶۶۳)	(۰/۶۷۷)	(۰/۳۴۰)	(۰/۳۴۲)	(۰/۳۳۷)	(۰/۳۴۳)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۵	۰/۹۱۱	۰/۹۵۵	۰/۹۵۷	۰/۹۶۳	۰/۹۰۸	۰/۹۶۶
		(۰/۵۷۹)	(۰/۵۸۰)	(۰/۴۶۸)	(۰/۵۸۲)	(۱/۵۶۷)	(۱/۴۵۶)	(۱/۳۷۸)	(۱/۶۸۳)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۰	۰/۹۲۶	۰/۹۵۳	۰/۹۶۵	۰/۹۴۵	۰/۹۲۶	۰/۹۶۰
		(۰/۳۹۲)	(۰/۳۹۴)	(۰/۳۷۳)	(۰/۴۲۵)	(۱/۲۲۸)	(۱/۲۳۳)	(۱/۱۱۱)	(۱/۲۵۳)
۱۵	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۴۳	۰/۹۳۱	۰/۹۵۴	۰/۹۵۴	۰/۹۴۵	۰/۹۲۴	۰/۹۵۸
		(۰/۳۳۴)	(۰/۳۲۱)	(۰/۳۰۶)	(۰/۳۳۶)	(۱/۱۲۴)	(۱/۱۶۹)	(۱/۰۶۳)	(۱/۱۹۱)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۱	۰/۹۳۷	۰/۹۵۳	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰	۰/۹۳۹	۰/۹۵۷
		(۰/۲۹۷)	(۰/۲۷۵)	(۰/۲۷۹)	(۰/۳۰۰)	(۰/۸۱۲)	(۰/۸۳۵)	(۰/۸۱۹)	(۰/۸۷۲)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۰/۹۴۱	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۳۸	۰/۹۵۵
		(۰/۲۲۴)	(۰/۲۲۰)	(۰/۲۱۵)	(۰/۲۲۵)	(۰/۷۹۳)	(۰/۸۰۸)	(۰/۷۷۰)	(۰/۸۱۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۴۹	۰/۹۴۴	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۹	۰/۹۴۱	۰/۹۵۴
		(۰/۱۸۰)	(۰/۱۷۷)	(۰/۱۷۵)	(۰/۱۸۰)	(۰/۶۴۷)	(۰/۶۵۴)	(۰/۶۳۴)	(۰/۶۵۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۱	۰/۹۴۵	۰/۹۰۱	۰/۹۵۱	۰/۹۲۴	۰/۹۵۲	۰/۹۱۴	۰/۹۶۴
		(۱/۳۳۹)	(۱/۳۴۱)	(۰/۹۸۷)	(۱/۳۴۰)	(۱/۲۵۴)	(۱/۳۳۱)	(۰/۹۶۰)	(۱/۳۴۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۳۳	۰/۹۳۵	۰/۹۱۳	۰/۹۶۲	۰/۹۱۷	۰/۹۴۷	۰/۹۰۴	۰/۹۵۳
		(۰/۴۵۲)	(۰/۴۶۱)	(۰/۴۳۳)	(۰/۵۶۴)	(۰/۹۲۳)	(۰/۹۸۳)	(۰/۸۴۱)	(۰/۹۹۸)
۱۶	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۳	۰/۹۴۲	۰/۹۲۴	۰/۹۴۹	۰/۹۲۳	۰/۹۵۲	۰/۹۰۰	۰/۹۵۸
		(۰/۳۸۹)	(۰/۳۷۵)	(۰/۳۴۷)	(۰/۳۸۶)	(۰/۸۶۴)	(۰/۹۲۰)	(۰/۷۸۶)	(۰/۹۳۴)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۲۴	۰/۹۳۸	۰/۹۲۷	۰/۹۴۴	۰/۹۱۸	۰/۹۴۳	۰/۹۲۸	۰/۹۵۵
		(۰/۳۱۷)	(۰/۳۳۵)	(۰/۳۲۴)	(۰/۳۵۰)	(۰/۶۶۷)	(۰/۶۹۲)	(۰/۶۳۸)	(۰/۶۹۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۴	۰/۹۴۱	۰/۹۳۶	۰/۹۴۹	۰/۹۲۵	۰/۹۵۱	۰/۹۲۲	۰/۹۵۴
		(۰/۲۵۶)	(۰/۲۵۳)	(۰/۲۴۱)	(۰/۲۵۴)	(۰/۶۰۹)	(۰/۶۲۷)	(۰/۵۸۰)	(۰/۶۳۴)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۳	۰/۹۳۹	۰/۹۴۹	۰/۹۲۹	۰/۹۴۵	۰/۹۳۱	۰/۹۵۲
		(۰/۲۰۴)	(۰/۲۰۱)	(۰/۱۹۵)	(۰/۲۰۲)	(۰/۴۹۷)	(۰/۵۰۸)	(۰/۴۸۲)	(۰/۵۱۰)

تفاضل دارد. با این وجود در برخی موارد مانند طرح‌های ۳، ۴، ۱۱ و ۱۶ برآورد احتمال پوشش بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} به صورت معنی‌داری کمتر از احتمال پوشش اسمی است. اگر چه بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} در این حالات عملکرد بهتر یا قابل رقابت نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد، اما در برخی موارد مانند طرح ۴ نیز برآورد احتمال پوشش بازه اطمینان خودگردانی پارامتری کمتر از ۰/۹۵ است. ذکر این نکته الزامی است که طرح‌های ۳، ۴، ۱۱ و ۱۶ مربوط به حالتی است که فرآیند نامتمرکز است. همچنین بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای نسبت دو شاخص C_{pmk}، عملکردی همانند بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد. در مجموع به نظر می‌آید که بازه اطمینان خودگردانی پارامتری در برخی موارد عملکرد بهتر و در برخی موارد عملکرد مشابه و یا قابل رقابت با بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد و نتایج حاصل از این دو روش در حالتی که فرآیند نامتمرکز است، از اعتبار بیشتری برخوردار است.

۳) بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده در تمامی طرح‌ها و برای تمام اندازه نمونه‌های در نظر گرفته شده و در هر دو حالت $T = \mu$ و $T \neq \mu$ دارای حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ است بنابراین در این روش میانگین طول بازه اطمینان کمی بیشتر از دیگر روش‌ها است. البته در برخی موارد نیز بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده با حفظ حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ طول کمتری نسبت به برخی روش‌ها دارد. مانند طرح ۴ و ۵ در نسبت دو شاخص C_{pmk}. با این حال زمانی که بازه‌های اطمینان مجانبی اصلاح شده، خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته برآورد احتمال پوشش یکسانی دارند، تفاوت طول بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده با سایر روش‌ها ناچیز می‌باشد. تنها در یک مورد، طرح ۱۱، احتمال پوشش بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده برای نسبت دو شاخص C_{pmk} ۰/۹۴ است که در این طرح نیز بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده دارای احتمال پوشش بزرگتر نسبت به دیگر روش‌ها است.

۴) با توجه به اینکه در بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده نیازی به برآورد چندک‌ها از طریق روش مونت کارلو نمی‌باشد، استفاده از این روش در مقایسه با دو

روش خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته راحت‌تر است.

۵) با افزایش اندازه نمونه، تمامی روش‌ها عملکرد مشابهی از دیدگاه متوسط طول بازه دارند.

۴ مثال کاربردی

مثال ۱ : کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) از مجموعه داده‌های ارائه شده توسط چن و تنگ (۲۰۰۳) استفاده کردند. این داده‌ها در ارتباط با دو فرآیند تولید مواد تشکیل‌دهنده فلز آلومینیوم از یک کارخانه الکترونیکی در تایوان است. فلز آلومینیوم بخش مهمی از کیفیت خازن‌ها و ولتاژ آن‌ها را تعیین می‌کند. حدود مشخصات فنی پایین و بالا برای ولتاژ به صورت $LSL = ۵۱۰$ و $USL = ۵۳۰$ در نظر گرفته شده و مقدار هدف $T = ۵۲۰$ است. یک نمونه تصادفی ۵۰ تایی از هر کدام از دو فرآیند تولید که تقریباً دارای توزیع نرمال می‌باشد گرفته شده است و $(\bar{x}, s)$ برای اولین و دومین فرآیند به ترتیب برابر با $(۵۱۹/۷۸۲, ۱/۷۹۴)$ و $(۵۲۲/۱۶۸, ۳/۰۰۹)$ است. همچنین $\hat{C}_{pmk۱} = ۱/۸۲۲$ و $\hat{C}_{pmk۲} = ۰/۷۰۹$ محاسبه شده است.

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} در جدول ۳ ارائه شده است. بر اساس نتایج به دست آمده از روش‌های مجانبی اصلاح شده، خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته فرآیند تولید ۱ از قابلیت بیشتری نسبت به فرآیند تولید ۲ برخوردار است. اما در روش مجانبی بر اساس بازه اطمینان برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$، دو فرآیند تولید عملکردی مانند هم دارند و بر اساس بازه اطمینان برای $C_{pmk۱} - C_{pmk۲}$ فرآیند تولید ۱ قابلیت بیشتری نسبت به فرآیند تولید ۲ دارد. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رفت طول بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده کمی بیشتر از سایر روش‌ها است.

مثال ۲ : داده‌های[۱] این مثال از موسسه ملی استاندارد و تکنولوژی آمریکا[۲] در رابطه با دو فرآیند که بسته‌بندی محصولات را بر عهده دارد، گرفته شده است. زمان بسته‌بندی در دو فرآیند با اندازه نمونه‌های $n_۱ = ۱۱$ و $n_۲ = ۸$ بر اساس دقیقه

[۱] http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section3/prc31.htm

[۲] National Institute of Standards and Technology, U.S. Department of Commerce, NIST

جدول ۳: بازه ۰/۹۵ برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای دو فرآیند تولید در مثال ۱

		روش			
		MACI	PBCI	GCI	ACI
نسبت	بازه	(۱/۸۱۳ , ۳/۶۴۸)	(۱/۸۲۲ , ۳/۶۰۶)	(۱/۸۰۳ , ۳/۶۲۴)	(۰/۲۶۳ , ۱/۶۱۶)
	طول	۱/۸۳۵	۱/۷۸۳	۱/۸۲۱	۱/۳۵۳
تفاضل	بازه	(۰/۶۸۰ ,۱/۵۴۷)	(۰/۷۰۵ ,۱/۵۷۰)	(۰/۶۶۰ , ۱/۵۱۴)	(۰/۱۳۲ , ۲/۰۹۰)
	طول	۰/۸۶۶	۰/۸۶۵	۰/۸۵۴	۱/۹۵۸

محاسبه و $\bar{x}_۱ = ۳۶/۰۹۰۹$، $\bar{x}_۲ = ۳۲/۲۲۲۲$، $s_۱ = ۴/۹۰۸۲$ و $s_۲ = ۲/۵۳۸۶$ حاصل شده است. همچنین $LSL = ۲۳$، $USL = ۴۵$ و $T = ۳۴$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در جدول ۴ ملاحظه می‌شود دو فرآیند قابلیت و کارایی یکسانی دارند. همچنین کمترین طول در نسبت و تفاضل به ترتیب مربوط به روش‌های خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته هستند.

جدول ۴: بازه اطمینان ۰/۹۵ برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای دو فرآیند در مثال ۲

		روش			
		MACI	PBCI	GCI	ACI
نسبت	بازه	(۰/۲۱۴ , ۱/۴۷۶)	(۰/۲۱۸ , ۱/۲۱۱)	(۰/۲۰۱ , ۱/۲۹۲)	(۰/۱۸۷ , ۱/۶۹۳)
	طول	۱/۲۶۲	۰/۹۹۳	۱/۰۹۱	۱/۵۰۶
تفاضل	بازه	(−۱/۲۵۹ , ۰/۳۵۵)	(−۱/۲۷۹ , ۰/۱۴۰)	(−۱/۱۲۹ , ۰/۱۶۴)	(−۱/۲۵۸ , ۰/۳۵۵)
	طول	۱/۶۱۴	۱/۴۱۹	۱/۲۹۳	۱/۶۱۳

بحث و نتیجه‌گیری

در نهایت، روش مجانبی اصلاح شده برای تشکیل بازه اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} توصیه می‌شود. زیرا با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام شده، این روش دارای حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ است (کمترین احتمال پوشش در این روش ۰/۹۴ و آن هم فقط در یک مورد است.) و متوسط طول در این روش تفاوت ناچیزی با بازه‌های اطمینان تعمیم‌یافته و خودگردانی پارامتری دارد. همچنین تشکیل بازه اطمینان با استفاده از این روش، بسیار ساده‌تر از روش تعمیم‌یافته و خودگردانی پارامتری است و علاوه بر این روش مجانبی اصلاح شده عملکرد

مناسبی در هر دو حالت $\mu = T$ و $\mu \neq T$ دارد. به نظر می‌آید دلیل این امر، استفاده از واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ در بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، دارند.

مراجع

Chan, L. K., Xiong, Z. and Zhang, D. (1990), On The Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 11-18.

Chen, S. M. and Hsu, N. F. (1995), The Asymptotic Distribution of The Process Capability Index C_{pmk}, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 1279-1291.

Chen, J. P. and Tong, L. I. (2003), Bootstrap Confidence Interval of The Difference Between Two Process Capability Indices, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **21**, 249-256.

Efron, B. (1981), Nonparametric Standard Errors and Confidence Intervals, *Canadian Journal of Statistics*, **9**, 139-172.

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1986), Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Interval and Other Measures of Statistical Accuracy, *Statistical Science*, **1**, 54-77.

Ferguson, T. S. (1996), *A Course in Large Sample Theory*, Chapman and Hall, London.

Kanichukattu, J. K. and Luke, J. A. (2013), Comparison Between Two Process Capability Indices Using Generalized Confidence Intervals, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **69**, 2793-2798.

Pearn, W. L. and Kotz, S. (2006), *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices, A Comprehensive Expansion of Quality Control Measures, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics* Vol. 12, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992), Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 216-231.

Vännman, k. (1995), A Unified Approach to Capability Indices, *Statistica Sinica*, **5**, 805-820.

Vännman, k. (1997a), Distribution and Moments in Simplified Form for A General Calss of Capability Indices, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 159-179.

Vännman, k. (1997b), A General Class of Capability Indices in The Case of Asymmetric Tolerances, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 2049-2072.

Wright, P. A. (1998), The Probability Density Function of Process Capability Index C_{pmk}, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **27**, 1781-1789.

Wu, C. W. and Huang, P. H. (2010), Generalized Confidence Intervals for Comparing The Capability of Two Process, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 2351-2364.