مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۲، ص ۲۶۱-۲۸۰
DOI: 10.18869/acadpub.jss.10.2.261

طرح‌های همسایه- متعادل مدور بهینه

فاطمه دلشاد چرمهینی، سعید پولادساز
گروه آمار، دانشگاه صنعتی اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۴/۳۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۹/۲۹

چکیده : در برخی آزمایش‌ها، تیمارها تحت تأثیر اثرات همسایه‌ها قرار می‌گیرند. در این موارد بهتر است از طرح‌هایی استفاده شود که هر تیمار، هر یک از تیمارهای دیگر را به تعداد یکسان در همسایگی خود داشته باشد و به‌عبارت دیگر همسایه‌ها متعادل باشند. طرح‌های همسایه- متعادل به دو دسته تقسیم می‌شوند. در طرح‌های دستهٔ اول، اثرات همسایه چپ و راست یکسان است درحالی‌که در طرح‌های دستهٔ دوم این دو اثر با هم متفاوتند. در بسیاری از پژوهش‌هایی که انجام شده است به ساختن طرح‌های دستهٔ اول پرداخته‌اند. در این مقاله چگونگی ساختن طرح‌های دستهٔ دوم با روش تغییرات دوره‌ای بیان می‌شود. همچنین برای چندین مقدار از v (تعداد تیمار) و k (اندازهٔ بلوک) با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ این طرح‌ها به‌دست آورده می‌شوند. سپس برخی از آن‌ها که تحت مدل با اثرات همسایهٔ یک‌طرفه، بهینهٔ عمومی هستند مشخص خواهند شد.

واژه‌های کلیدی : اثرات همسایه، طرح‌های همسایه- متعادل، بهینگی عمومی، بلوک مدور، تغییرات دوره‌ای.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: فاطمه دلشاد چرمهینی، f.delshad.sta@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲K۰۵، ۶۲K۱۰

۱ مقدمه

اغلب در کشاورزی، جنگل‌داری و باغبانی آزمایش‌هایی که اثرات همسایه را نشان دهد، مورد نیاز است. در گیاهانی مانند سیب‌زمینی که سیستم رویشی آن‌ها مهم است، گونه‌هایی که زودتر رشد می‌کنند و ریشه‌هایشان سریع‌تر شکل می‌گیرد، مواد مغذی را از واحدهای مجاور در هر دو طرف جذب می‌کنند. در محصول غلات، حبوبات و گل آفتاب‌گردان، گونه‌های بلند قامت به‌گونهٔ قرار گرفته در واحد موجود در سمت شمال خود، سایه می‌اندازند. در این موارد یک تیمار در میزان رشد دیگری تأثیرگذار است. در آزمایش‌های مربوط به حشره‌کش و قارچ‌کش بخشی از تیمار به‌کار برده شده در یک واحد آزمایش ممکن است در اثر وزش باد به واحد همسایه‌اش پخش شود. این مثال‌ها نشان‌دهندهٔ وضعیت‌هایی است که یک تیمار، تحت تأثیر تیمار به‌کار برده شده در واحدهای آزمایشی همسایه قرار می‌گیرد. در این حالت‌ها، استفاده از طرح‌های همسایه- متعادل در حذف اثرات همسایه‌ها مفید است و باعث می‌شود که مقایسه‌های تیماری کمتر تحت تأثیر اثرات همسایه‌ها قرار گیرند (جاگی، ۲۰۰۷).

تعریف ۱ : بلوکی که تیمار موجود در اولین واحد آزمایش همسایهٔ تیمار موجود در آخرین واحد آزمایش فرض می‌شود را بلوک مدور می‌گویند.

در بعضی کشورها، آزمایش‌های کشاورزی بر روی دامنهٔ تپه‌ها انجام می‌گیرد، بنابراین به‌طور طبیعی، بلوک‌ها مدور درنظر گرفته می‌شوند. اما در برخی آزمایش‌ها بلوک‌ها خطی‌اند. در یک بلوک خطی تیمارهای موجود در اولین و آخرین واحد آزمایش همسایه نیستند. استفاده از بلوک‌های خطی در طرح‌هایی که تیمارها تحت تأثیر همسایه‌ها قرار می‌گیرند، باعث می‌شود که شرایط آزمایش برای تمام تیمارها یکسان نباشد. مثلاً در مزارع گندم گونه‌های بلند قد بر گونه‌های کوتاه قد سایه می‌اندازند. گیاهی که تحت تأثیر سایه گیاه مجاور خود قرار می‌گیرد نسبت به گیاهی که تحت تأثیر گیاه همسایه خود نیست، در عمل فتوسنتز، کمتر از نور خورشید استفاده می‌کند. برای رفع این مشکل می‌توان به انتهای بلوک‌های خطی واحدهای مرزی فرضی اضافه کرد (آزایس و همکاران، ۱۹۹۳).

تعریف ۲ : طرح بلوکی که هر جفت از تیمارها به تعداد یکسان با هم در یک بلوک ظاهر می‌شوند را طرح بلوکی تیمار- متعادل می‌نامند.

تعریف ۳ : طرحی که تمام بلوک‌های آن مدور باشند را طرح مدور گویند.

اگر تیمار در u- امین واحد آزمایش در j- امین بلوک مدور با $d(u,j)$ نشان داده شود آنگاه $d(u+\gamma,j)$ همسایه سمت راست $d(u,j)$ در فاصلهٔ γ و $d(u-\gamma,j)$ همسایه سمت چپ آن در فاصلهٔ γ ($1 \leq \gamma \leq k-1$) هستند. ($u+\gamma$ و $u-\gamma$ در پیمانهٔ k درنظر گرفته می‌شوند).

طرح‌های همسایه- متعادل مدور اولین بار توسط ریس (۱۹۶۷) در رابطه با علم سرم‌شناسی مطرح شده‌اند. ریس در تحقیقات ویروسی از تکنیکی استفاده کرد که می‌بایست تعدادی مادهٔ ویروسی در یک صفحهٔ مدور، مجاور نمونه‌ای از هر مادهٔ ویروسی دیگر قرار گیرند. در مقالات مختلف دو تعریف زیر برای طرح‌های همسایه- متعادل مدور درنظر گرفته می‌شود.

۱) طرح همسایه- متعادل مدور، طرح مدوری است که برای هر زوج نامرتب متمایز از تیمارها به تعداد $\lambda = \frac{2bk}{v(v-1)}$ واحد آزمایش وجود داشته باشد و هر واحد آزمایش یکی از این تیمارها را دریافت کند و تیمار دیگر در واحد آزمایش سمت چپ در فاصلهٔ γ ($1 \leq \gamma \leq k-1$) قرار گیرد. به‌عبارت دیگر، در چنین طرحی هر جفت از تیمارها به تعداد λ مرتبه همسایهٔ یکدیگر در فاصلهٔ γ قرار می‌گیرند.

۲) طرح همسایه- متعادل مدور، طرح مدوری است که برای هر زوج مرتب متمایز از تیمارها به تعداد $\lambda' = \frac{bk}{v(v-1)}$ واحد آزمایش وجود داشته باشد، به‌طوری‌که هرکدام از این واحدهای آزمایش اولین تیمار را دریافت کنند و تیمار دوم به‌عنوان همسایهٔ سمت چپ تیمار اول در فاصلهٔ γ ($1 \leq \gamma \leq k-1$) قرار گیرد. به‌عبارت دیگر، در چنین طرحی هر تیمار به تعداد λ' مرتبه در سمت راست هر یک از تیمارهای دیگر در فاصلهٔ γ قرار می‌گیرد.

در این مقاله طرح‌های دستهٔ اول با نماد $CNB_1(v,b,k,\gamma,\lambda)$ و طرح‌های دستهٔ دوم

با نماد $CNB_2(v,b,k,\gamma,\lambda')$ نشان داده می‌شوند. با توجه به تعاریف بالا، واضح است طرح $CNB_2(v,b,k,\gamma,\lambda')$ که بین همسایه‌های سمت چپ و راست تفاوت درنظر گرفته می‌شود، یک طرح $CNB_1(v,b,k,\gamma,2\lambda')$ نیز هست ولی عکس این مطلب درست نیست، یعنی هر طرح $CNB_1(v,b,k,\gamma,\lambda)$ ضرورتاً یک طرح $CNB_2(v,b,k,\gamma,\lambda'=\frac{\lambda}{2})$ نیست. در ادامه نماد $CNB_i(v,b,k,\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2\},\lambda)$ نشان‌دهندهٔ آن است که طرح مربوطه یک طرح $CNB_i(v,b,k,\gamma_1,\lambda)$ و نیز یک طرح $CNB_i(v,b,k,\gamma_2,\lambda)$ به‌طوری‌که $i=1,2$ است.

ریس (۱۹۶۷) با استفاده از روش تفاضلی، فهرستی از طرح‌های $CNB_1(v,b,k=v,\gamma,\lambda)$ که v یک عدد فرد کوچکتر یا مساوی ۴۱ باشد، فراهم آورد. برموند و فابر (۱۹۷۶) برخی از این طرح‌ها را برای زمانی‌که v عدد زوج باشد، توسعه دادند. وانگ (۱۹۷۷)، دی و چاکراورتی (۱۹۷۷)، وانگ و لین (۱۹۷۳) و چانداک (۱۹۸۱) نیز روش‌هایی برای ساختن طرح‌های $CNB_1(v,b,k,\gamma,\lambda)$ پیشنهاد دادند. برای مثال، وانگ (۱۹۷۷) چگونگی ساختن این طرح‌ها را با استفاده از آرایه‌های ۲- متعادل بیان نمود. اما در بسیاری از موارد، روش تفاضلی ریس اساس ساختن طرح‌ها بوده است. احمد و اختر ($2008a, 2008b$) نیز با استفاده از روش تفاضلی ریس برای برخی از مقادیر v و k فهرستی از طرح‌های $CNB_1(v,b,k,\gamma,\lambda)$ به‌دست آوردند. اقبال و همکاران (۲۰۰۶) از روش تغییرات دوره‌ای برای ساختن طرح‌های $CNB_1(v,b,k,\gamma=2,\lambda)$ استفاده کردند و در سال (۲۰۰۹) این روش را برای ساختن $CNB_1(v,b,k,\gamma=1,\lambda)$ به‌کار بردند. احمد و اختر (۲۰۰۹) روش تغییرات دوره‌ای را برای ساختن طرح‌های $CNB_1(v,b,k,\gamma,\lambda)$ و هر مقدار γ ($1 \leq \gamma \leq k-1$) تعمیم دادند. در بخش دوم این مقاله روش تغییرات دوره‌ای را معرفی و چگونگی ساختن طرح‌های همسایه- متعادل مدور با این روش توضیح داده می‌شود. بیلی و درایلت (۲۰۰۴) برای براورد اثرات کلی (منظور از اثرات کلی، مجموع اثر مستقیم یک تیمار واثرات همسایه‌های آن است) به بررسی بهینگی طرح‌های همسایه-متعادل مدور تحت مدل با اثرات همسایهٔ دو طرفهٔ متفاوت پرداختند.

فیلیپیاک و مارکیویز (۲۰۰۳،۲۰۰۷) بهینگی طرح‌های مدور تحت مدل با اثرات

همسایهٔ دو طرفه متفاوت که اثرات همسایه تصادفی هستند را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در سال ۲۰۰۵ بهینگی طرح‌های همسایه- متعادل مدور تحت مدل با اثرات همسایهٔ یک‌طرفه و مشاهدات وابسته را بررسی کردند. همچنین بهینگی طرح‌های مدور برای براورد اثرات کلی و مشاهدات وابسته در سال ۲۰۰۷ توسط آی و همکاران بررسی شد. فیلیپیاک (۲۰۱۲) بهینگی طرح‌ها تحت مدل با اثرات همسایهٔ نامتفاوت را مورد بررسی قرار داد. در این مقاله مشاهدات مستقل و هر یک از اثرات تیمار، همسایه‌های چپ و راست به‌صورت جداگانه در نظر گرفته شده‌اند. در بخش سوم به بررسی بهینگی طرح‌های بلوکی تحت سه مدل آماری با اثرات همسایه پرداخته می‌شود . در پایان با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ و روش تغییرات دوره‌ای و به‌کارگیری قضایای مربوط به بهینگی طرح‌ها و برای مقادیر مختلف v و k، طرح بهینهٔ عمومی تحت مدل با اثرات همسایهٔ یک‌طرفه و دوطرفه نامتفاوت به‌طور جداگانه به‌دست آورده می‌شود.

۲ روش تغییرات دوره‌ای

روش تغییرات دوره‌ای، یک روش کلی برای ساختن طرح‌های بلوکی است. در این روش، $b = v$ بلوک درنظر گرفته می‌شود. به اولین واحد آزمایش در هر یک از بلوک‌های $۱, ۲, \ldots, v$ به‌ترتیب تیمارهای $۰, ۱, \ldots, v - ۱$ تخصیص داده می‌شوند. برای این منظور بردار $U_۱^*$ را به‌صورت $U_۱^* = [۰, ۱, \ldots, v - ۱]$ تعریف کرده، به‌طوری‌که j- امین عضو آن نشان‌دهندهٔ تیمار اختصاص داده شده به اولین واحد آزمایشی بلوک j است. با اعمال تغییراتی بر روی تیمارها در اولین واحد آزمایش هر بلوک، تیمارها در سایر واحدهای آزمایش به‌دست می‌آیند. فرض کنید بردار U_u^* دربردارندهٔ تیمارها در u- امین واحد آزمایشی در بلوک‌ها است، یعنی j- امین عضو آن، تیمار اختصاص داده شده به u- امین واحد آزمایش بلوک j است. یک تغییر دوره‌ای با اندازهٔ q_u برای u- امین واحد آزمایش به‌صورت $U_{u+۱}^* = [U_u^* + q_u \mathbf{1}_v']$ است که در آن $۱ \leq q_u \leq v - ۱$ و جمع در پیمانهٔ v درنظر گرفته می‌شود. در واقع اگر در بلوک j، تیمار در واحد آزمایش u با مقدار q_u جمع شود، تیمار در واحد

آزمایش $u + ۱$ به‌دست می‌آید. با توجه به آنچه گفته شد، برای ساختن طرحی که اندازه‌های بلوک‌هایش k باشد به $k - ۱$ تغییر نیاز است. اگر Q بردار دربردارندهٔ تمام تغییرات درنظر گرفته شود، یعنی $Q = [q_۱, \dots, q_{k-۱}]$، آنگاه مشخصات کامل طرح را می‌توان با استفاده از بردار Q به‌جای ساختن تمام بلوک‌های طرح به‌دست آورد (اقبال و همکاران، ۲۰۰۹).

مثال ۱ : فرض کنید از بردار $Q = [۱, ۲, ۲]$ برای ساختن طرحی با $v = ۶$ و $k = ۴$ استفاده شود. دراین‌صورت $q_۱ = ۱$، $q_۲ = ۲$، $q_۳ = ۲$ و نتیجه می‌شود،

$$U_۱^* = (۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$$

$$U_۲^* = U_۱^* + \mathbf{1}'_۶ q_۱ = (۰+۱, ۱+۱, ۲+۱, ۳+۱, ۴+۱, ۵+۱) \equiv (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۰)$$

$$U_۳^* = U_۲^* + \mathbf{1}'_۶ q_۲ = (۱+۲, ۲+۲, ۳+۲, ۴+۲, ۵+۲, ۰+۲) \equiv (۳, ۴, ۵, ۰, ۱, ۲)$$

$$U_۴^* = U_۳^* + \mathbf{1}'_۶ q_۳ = (۳+۲, ۴+۲, ۵+۲, ۰+۲, ۱+۲, ۲+۲) \equiv (۵, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴)$$

و بنابراین طرح

۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۳	۴	۵	۰
۳	۴	۵	۰	۱	۲
۵	۰	۱	۲	۳	۴

به‌دست می‌آید که در آن ستون‌ها به‌عنوان بلوک‌ها درنظر گرفته می‌شوند.

همچنین می‌توان طرح‌های حاصل از چند مجموعه تغییرات را کنار هم قرار داد تا طرح‌هایی با تعداد بلوک بیشتر تولید کرد. در این مقاله نماد $Q_۱ + \dots + Q_m$ به این معناست که طرح مورد نظر از کنار هم قرار دادن m طرح حاصل از $Q_۱$، ... و Q_m به‌دست می‌آید. این مجموعه تغییرات با هم یک طرح با $b = mv$ بلوک ایجاد می‌کنند. برای ساختن طرح‌هایی که تعداد بلوک آن‌ها مضربی از v نباشد از طرح‌های کسری (اقبال و همکاران، ۲۰۰۹) استفاده می‌شود. با نگاهی به روند ساختن طرح‌ها با این روش، در طرحی که با استفاده از مجموعه تغییرات $Q = [q_۱, \dots, q_{k-۱}]$

ساخته می‌شود، در بلوک j، تیمار در اولین واحد آزمایش برابر با $j-۱$ و در u-امین واحد آزمایش در این بلوک $(u \neq ۱)$ برابر با $(j-۱)+(q_۱+\ldots+q_{u-۱})$ است ($\sum q_i$ در پیمانهٔ v درنظر گرفته می‌شود). به‌عبارت دیگر نتیجه می‌شود،

$$d(u,j)=\begin{cases} j-۱ & \text{اگر } u=۱ \\ \\ (j-۱)+(q_۱+\ldots+q_{u-۱}) & \text{اگر } u\neq ۱ \end{cases} \qquad (۱)$$

با استفاده از (۱)، واضح است که برای ساختن طرح‌های دودویی لازم است که مجموع هر دو تغییر متوالی، سه تغییر متوالی، ...، هر $k-۱$ تغییر متوالی در پیمانهٔ v، برابر صفر نباشد. اگر تیمار صفر در واحد آزمایش u از بلوک j قرار گیرد، آنگاه تیمار موجود در واحد آزمایشی u' از این بلوک را می‌توان از رابطهٔ،

$$d(u',j)=\begin{cases} v-(q_{u'}+\ldots+q_{u-۱}) & \text{اگر } u'<u \\ \\ q_u+\ldots+q_{u'-۱} & \text{اگر } u'>u \end{cases} \qquad (۲)$$

به‌دست آورد. در رابطه (۲)، با قرار دادن $u,u'=۱,۲,\ldots,k$ به‌طوری‌که $u\neq u'$، تمام تیمارها که با تیمار صفر در یک بلوک قرار می‌گیرند، مشخص می‌شوند. این تیمارها را می‌توان در سه لیست زیر خلاصه کرد.

لیست ۱. شامل مقادیر $q_۱,\ldots,q_{k-۱}$.

لیست ۲. شامل مجموع h تغییر متوالی به‌طوری‌که $h=۲,۳,\ldots,k-۱$.

لیست ۳. متمم لیست ۱ و ۲. منظور از متمم یک مجموعه مانند $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_r\}$ مجموعهٔ $v\mathbf{1}'_r-A=\{v-a_۱,v-a_۲,\ldots,v-a_r\}$ است.

واضح است، اجتماع سه لیست بالا شامل تمام تیمارهایی است که با تیمار صفر در یک بلوک قرار می‌گیرند. بنابراین، اگر این سه لیست با هم همهٔ مقادیر ۱ تا $v-۱$ را به تعداد یکسان شامل شود، آنگاه طرح حاصل از $Q=[q_۱,\ldots,q_{k-۱}]$ یک طرح تیمار- متعادل است (اقبال و همکاران، ۲۰۰۹).

به‌دلیل دوره‌ای بودن این طرح‌ها، برای به‌دست آوردن تعداد دفعاتی که دو تیمار به‌عنوان همسایهٔ یکدیگر ظاهر می‌شوند، کافیست تعداد دفعاتی که تیمار صفر با دیگر تیمارها همسایه است را محاسبه نمود. چهار حالت در رابطه با همسایه‌های

چپ و راست در فاصلهٔ γ، برای تیمار صفر که در u- امین واحد آزمایش از بلوک j قرار دارد، امکان‌پذیر است.

الف) اگر $u \leq k-\gamma$ باشد، آنگاه $d(u+\gamma, j) = q_u + \ldots + q_{u+\gamma-1}$.

ب) اگر $u > k-\gamma$ باشد، آنگاه $d(u+\gamma, j) = q_{u-k+\gamma} + \ldots + q_{u-1}$.

ج) اگر $u \leq \gamma$ باشد، آنگاه $d(u-\gamma, j) = q_u + \ldots + q_{u+(k-\gamma)-1}$.

د) اگر $u > \gamma$ باشد، آنگاه $d(u-\gamma, j) = q_{u-\gamma} + \ldots + q_{u-1}$.

قضیه ۱ (اقبال و همکاران، ۲۰۰۹): یک طرح $CNB_1(v, b=mv, k, \gamma=1, \lambda)$ در $b=nv$ بلوک با اندازهٔ k را می‌توان با استفاده از $Q_1, \ldots, Q_m$ به‌دست آورد اگر و تنها اگر مجموعهٔ $Q_1, \ldots, Q_m, \sum Q_1, \ldots, \sum Q_m$ (منظور از $\sum Q_i$ مجموع تمام اعضای بردار Q_i است) و متمم آن‌ها، همهٔ مقادیر ۱ تا $v-1$ را به تعداد یکسان داشته باشد.

قضیه ۲ (اقبال و همکاران، ۲۰۰۹): طرح D_1 با $v-1$ تیمار در b_1 بلوک با اندازهٔ k و n_{D_1} تکرار از هر تیمار و طرح D_2 با $v-1$ تیمار در b_2 بلوک با اندازهٔ $k-1$ و n_{D_2} تکرار از هر تیمار را درنظر بگیرید. فرض کنید D_1 با استفاده از $Q_{1i}, i=1, \ldots, m_1$ و D_2 با استفاده از $Q_{2j}, j=1, \ldots, m_2$ ساخته شود. با اضافه کردن تیمار $v-1$ در واحد آزمایش k در تمام بلوک های D_2 یک طرح $CNB_1(v, b_1+b_2, k, 1, \lambda)$ در صورت برقرار بودن سه شرط زیر ایجاد می‌شود،

۱) اگر $Q_{1i}(i=1, \ldots, m_1)$، $\sum Q_{1i}$، $Q_{2j}(j=1, \ldots, m_2)$ و متمم آن‌ها دارای تمام مقادیر ۱ تا $v-2$ را به تعداد یکسان (λ مرتبه) باشد.

۲) اگر $b_2 = n_{D_1} + n_{D_2}$ باشد.

۳) اگر در اولین و $(k-1)$- امین واحدهای آزمایش طرح D_2، تمام تیمارهای ۰ تا $v-2$ به تعداد λ مرتبه وجود داشته باشند.

مجموعهٔ تغییراتی مانند $Q=[q_1, \ldots, q_{k-2}]$ که طرحی با اندازهٔ هر بلوک برابر $k-1$ می‌سازد و پس از اضافه شدن یک تیمار به آن، طرحی ایجاد می‌شود که اندازهٔ بلوک‌هایش k است با نماد $Q=[q_1, \ldots, q_{k-2}]t$ نشان داده می‌شود. با استفاده

از این مجموعهٔ تغییرات، طرحی با $b = v - 1$ بلوک ساخته می‌شود.

قضیهٔ زیر چگونگی ساختن یک طرح $CNB_1(v, b, k, \gamma, \lambda)$ را برای هر مقدار γ که $1 \leq \gamma \leq k - 1$ با روش تغییرات دوره‌ای بیان می‌کند.

قضیه ۳ (احمد و اختر، ۲۰۰۹): مجموعهٔ تغییراتی که در آن مجموع هر γ تغییر متوالی، $(k - \gamma)$ تغییر متوالی و متمم آن‌ها تمام مقادیر ۱ تا $v - 1$ را به تعداد λ مرتبه داشته باشد، یک طرح $CNB_1(v, b, k, \gamma, \lambda)$ ایجاد می‌کند.

برای مقادیر مختلفی از v و k اقبال و همکاران (۲۰۰۹) بردارهایی به‌دست آوردند که در شرایط قضیهٔ ۱ و ۲ صادق هستند. در این مقاله، برای $v = 14$ ،$k = 7$ و همچنین $v = 16$ ،$k = 8$ که در اقبال و همکاران (۲۰۰۶) و (۲۰۰۹) نیستند با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ بردارهایی به‌دست آورده می‌شوند که در شرایط قضیهٔ ۲ صادق هستند. این بردارها همراه با طرح مربوط به آن‌ها عبارتند از:

۱) بردار $[10, 6, 11, 11, 9, 1] + [6, 12, 5, 5, 10]t$ برای $k = 7$ و $v = 14$ را درنظر بگیرید. فرض کنید طرح D_1 با استفاده از $Q_1 = [10, 6, 11, 11, 9, 1]$ و طرح D_2 با استفاده از $Q_2 = [6, 12, 5, 5, 10]t$ ساخته شوند. با ترکیب دو طرح D_1 و D_2 که به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند، یک طرح $CNB_1(v = 14, b = 26, k = 7, \gamma = 1, \lambda = 2)$ ایجاد می‌شود.

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰
۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۰	۱
۱۲	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳

بررسی شرایط قضیه ۲:

- مجموعهٔ $\{Q_۱, Q_۲, \sum Q_۱, v-Q_۱, v-Q_۲\}$ عبارت است از

$$\{۱۰, ٦, ۱۱, ۱۱, ۹, ۱, ٦, ۱۲, ۵, ۵, ۱۰, ۹, ۳, ۷, ۲, ۲, ۴, ۱۲, ۴, ۷, ۱, ۸, ۸, ۳\}$$

که همهٔ مقادیر ۱ تا $۱۲ = ۲ - v$ را $\lambda = ۲$ مرتبه شامل می‌شود و شرط اول برقرار است.

- در واحدهای اول و ششم طرح $D_۲$، هر تیمار ۲ مرتبه وجود دارد و بنابراین شرط دوم برقرار است.
- $n_{D_۱} = ۷$، $n_{D_۲} = ٦$، $b_۲ = ۱۳$ و بنابراین شرط سوم برقرار است.

با توجه به قضیهٔ ۲، دو طرح $D_۱$ و $D_۲$ با هم، یک طرح $CNB_۱(۱۴, ۲٦, ۷, ۱, ۲)$ ایجاد می‌کنند.

۲) بردار $[۳, ۱۳, ۱, ۱۲, ۵, ٦, ۱۳] + [۸, ۱۰, ۹, ۱, ۱۱, ۱۱]t$ برای $k = ۸$ و $v = ۱٦$ را درنظر بگیرید. با ترکیب طرح $D_۱$ حاصل از بردار $[۳, ۱۳, ۱, ۱۲, ۵, ٦, ۱۳]$ و طرح $D_۲$ حاصل از بردار $[۸, ۱۰, ۹, ۱, ۱۱, ۱۱]t$ که به‌ترتیب در زیر آورده شده‌اند، یک طرح $CNB_۱(v = ۱٦, b = ۳۰, k = ۸, \gamma = ۱, \lambda = ۲)$ به‌دست می‌آید.

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱
۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲
۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۰	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵

به‌سادگی مشاهده می‌شود که شرایط قضیهٔ ۲ در این حالت نیز برقرار است.

در ادامه، نتیجهٔ زیر برای ساختن طرح‌های $CNB_2(v, b, k, \gamma = 1, \lambda')$ با روش تغییرات دوره‌ای بیان می‌شود. در جدول ۳ فهرستی از بردارهایی که براساس فرع ۱ طرح $CNB_2(v, b, k, \gamma = 1, \lambda')$ ایجاد می‌کنند، با نرم افزار $MATLAB$ بدست آورده می‌شوند.

فرع ۱ : یک طرح $CNB_2(v, b = mv, k, \gamma = 1, \lambda')$ در $b = mv$ بلوک هر یک با اندازهٔ k را می‌توان با استفاده از $Q_1, \dots, Q_m$ به‌دست آورد اگر و تنها اگر مجموعهٔ $\{Q_1, \dots, Q_m, v - \sum Q_1, \dots, v - \sum Q_m\}$ همهٔ مقادیر ۱ تا $v - 1$ را به تعداد یکسان داشته باشد.

برهان : هر تیمار در یک طرح $CNB_2(v, b, k, \gamma = 1, \lambda')$، هر یک از تیمارهای دیگر را به تعداد λ' مرتبه در سمت راست خود دارد. به‌دلیل دوره‌ای بودن این طرح‌ها، اگر تیمار صفر به تعداد λ' مرتبه در سمت چپ سایر تیمارها قرار گیرد، آنگاه هر تیمار دیگری مانند t'' نیز به تعداد λ' مرتبه در سمت چپ تیمارهای دیگر اتفاق می‌افتد. از طرفی همسایه‌های سمت راست تیمار صفر در طرح ساخته شده با مجموعه تغییرات $Q = [q_1, \dots, q_{k-1}]$ با استفاده از موارد (الف) و (ب) به‌صورت

زیر هستند.

$$\{q_۱, \dots, q_{k-۱}, v - (q_۱ + \dots + q_{k-۱})\} = \{Q, v - \sum Q\}$$

بنابراین اگر $\{Q, v - \sum Q\}$ همهٔ مقادیر ۱ تا $v - ۱$ را به تعداد یکسان داشته باشد آنگاه طرح حاصل از Q یک طرح $CNB_۲(v, b = mv, k, \gamma = ۱, \lambda')$ است ($\sum Q$ در پیمانهٔ v درنظر گرفته می‌شود). به‌طور مشابه قضیه برای زمانی که طرح با استفاده از $Q_۱ + \dots + Q_m$ ساخته شود، اثبات می‌شود.

مثال ۲ : فرض کنید $v = ۵$، $k = ۴$ و $Q = [۱, ۲, ۴]$ باشد. دراین‌صورت نتیجه می‌شود:

$$\{Q, v - \sum Q\} = \{۱, ۲, ۴, ۵ - (۱ + ۲ + ۴)\} \equiv \{۱, ۲, ۴, ۳\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود همهٔ مقادیر ۱ تا ۴$(= v - ۱)$ را یک مرتبه شامل می‌شود و بنابراین هر تیمار یک مرتبه در سمت چپ هر یک از تیمارهای دیگر قرار می‌گیرد و طرح حاصل که یک طرح $CNB_۲(۵, ۵, ۴, \gamma = ۱, \lambda' = ۱)$ است، در زیر آورده شده است.

۰	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۰
۳	۴	۰	۱	۲
۲	۳	۴	۰	۱

۳ مدل‌های آماری

فرض کنید v تیمار در b بلوک مدور قرار گرفته‌اند. سه حالت زیر را در رابطه با اثرات همسایه‌ها می‌توان درنظر گرفت،

الف) تنها اثر همسایهٔ سمت راست (یا همسایهٔ سمت چپ) وجود داشته باشد.

ب) اثر همسایهٔ چپ و راست وجود داشته باشد ولی این دو اثر با هم تفاوتی نداشته باشند.

ج) اثر همسایهٔ چپ و راست وجود داشته باشد و این دو اثر با هم متفاوت باشند.
برای حالت‌های، اول، دوم و سوم به‌ترتیب از مدل‌های

$$M_۱ :\ y_{u,j} = \theta + \tau_{d(u,j)} + \eta_{d(u+۱,j)} + \beta_j + \epsilon_{u,j}$$

$$M_۲ :\ y_{u,j} = \theta + \tau_{d(u,j)} + \eta_{d(u-۱,j)} + \eta_{d(u+۱,j)} + \beta_j + \epsilon_{u,j}$$

$$M_۳ :\ y_{u,j} = \theta + \tau_{d(u,j)} + \eta_{d(u-۱,j)} + \rho_{d(u+۱,j)} + \beta_j + \epsilon_{u,j}$$

استفاده می‌شود که در آن‌ها $y_{u,j}$ پاسخ مشاهده شده در u– امین واحد آزمایش در بلوک j، $d_{(u,j)}$ تیمار در واحد آزمایش u در بلوک j از طرح d، θ میانگین کل، $\tau_{d(u,j)}$ اثر مستقیم از تیمار $d(u,j)$، $\eta_{d(u-۱,j)}$ اثر همسایهٔ سمت چپ از تیمار $d(u-۱,j)$، $\eta_{d(u+۱,j)}$ و $\rho_{d(u+۱,j)}$ اثر همسایهٔ سمت راست از تیمار $d(u+۱,j)$ و $\epsilon_{u,j}$ خطای تصادفی مربوط به $y_{u,j}$ است. مشاهدات مستقل با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ درنظر گرفته می‌شوند.

فرم ماتریسی برای این سه مدل عبارتند از:

$$M_۱ :\ Y = \theta + T_d\tau + R_d\eta + B\beta$$

$$M_۲ :\ Y = \theta + T_d\tau + (L_d + R_d)\eta + B\beta$$

$$M_۳ :\ Y = \theta + T_d\tau + L_d\eta + R_d\rho + B\beta$$

بردار η در مدل‌های $M_۱$ و $M_۳$ بردار اثرات همسایهٔ سمت چپ و در مدل $M_۲$ بردار اثرات همسایه (چپ و راست) است. در مدل $M_۳$، ρ بردار اثرات همسایهٔ سمت راست و همچنین τ و β به‌ترتیب بردار اثرات تیماری و اثرات بلوک در سه مدل هستند. ماتریس‌های T_d، L_d و R_d که همگی ماتریس‌هایی از مرتبهٔ $bk \times v$ هستند، به‌ترتیب ماتریس وقوع اثرات تیمار، همسایهٔ سمت چپ و همسایهٔ سمت راست نامیده می‌شوند. دو قضیهٔ زیر در مورد بهینگی عمومی طرح‌های $CNB_۲(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda')$ و $CNB_۲(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda')$ توسط اثبات شده‌اند.

قضیه ۴ (درایلت، ۱۹۹۱): اگر d^* طرحی BIB و $CNB_۲(v, b, k, ۱, \lambda')$ باشد، آنگاه برای برآورد اثرات تیماری تحت مدل $M_۱$، در کلاس همهٔ طرح‌های مدور، طرح d^* بهینهٔ عمومی است.

قضیه ۵ (درایلت، ۱۹۹۱): اگر d^* طرحی BIB و $CNB_۲(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda')$ باشد، آنگاه برای برآورد اثرات تیماری تحت مدل $M_۳$، در کلاس تمام طرح‌های مدور با $۳ \leq k \leq v$ که در آن هیچ تیماری همسایهٔ خودش نباشد، طرح d^* بهینهٔ عمومی است.
فیلیپیاک (۲۰۱۲) شرط کافی برای یافتن طرح بهینهٔ عمومی تحت مدل $M_۲$ را در قالب قضیهٔ زیر بیان نمود.

قضیه ۶ (فیلیپیاک، ۲۰۱۲): اگر طرح دودویی d^* تیمار- متعادل بوده و ماتریس‌های

$$L'_{d^*} R_{d^*} + R'_{d^*} L_{d^*}, T'_{d^*} L_{d^*} + T'_{d^*} R_{d^*}$$

کاملاً متقارن باشند، آنگاه تحت مدل $M_۲$ و در کلاس تمام طرح‌های بلوکی مدور که در آن هیچ تیماری همسایهٔ خود نباشد، d^* بهینهٔ عمومی است.

فرع ۲ : اگر طرح d^*، BIB و $CNB_۱(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda)$ باشد، تحت مدل $M_۲$ و در کلاس همهٔ طرح‌های بلوکی مدور که در آن هیچ تیماری همسایهٔ خود نباشد، d^* بهینهٔ عمومی است.
برهان : اگر d^* یک طرح BIB و $CNB_۱(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda)$ باشد و زوج تیماری مانند $(i, i'), i \neq i'$ را درنظر بگیرید، آنگاه تعداد واحدهای آزمایش که تیمار i در آن قرار می‌گیرد و تیمار i' همسایهٔ سمت چپ آن است به‌علاوهٔ تعداد واحدهای آزمایش که تیمار i' در آن قرار می‌گیرد و تیمار i همسایهٔ سمت چپ آن است برابر با λ است. پس در این حالت، $T'_{di} L_{di'} + T'_{di} R_{di'} = \lambda$ است. از طرفی، مقدار $T'_{di} L_{di} + T'_{di} R_{di}$ برابر است با تعداد دفعاتی که تیمار i همسایهٔ خودش باشد که در یک طرح BIB برابر صفر است. در نتیجه $T'_d(L_d + R_d)$ ماتریسی است که تمام

عضوهای غیر قطر اصلی آن λ و عضوهای روی قطر اصلی برابر صفر است، یعنی $T'_d(L_d + R_d) = \lambda(J_v - I_v)$ یک ماتریس کاملاً متقارن است. بطور مشابه اگر d^* یک BIB و $CNB_۱(v, b, k, \gamma = ۲, \lambda)$ باشد آنگاه رابطهٔ $R'_{id}L_{i'd} + L'_{id}R_{i'd} = \lambda$ برقرار است. از طرفی، در یک طرح BIB رابطهٔ $R'_{id}L_{id} + L'_{id}R_{id} = ۰$ برقرار بوده و بنابراین در چنین طرح‌هایی ماتریس $L'_dR_d + R'_dL_d$ یک ماتریس کاملاً متقارن است و نتیجه حاصل می‌شود.

۴ طرح‌های بهینهٔ ساخته شده

اقبال و همکاران (۲۰۰۶) فهرستی از طرح‌های $CNB_۱(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda)$ و در سال (۲۰۰۹) نیز برخی دیگر از طرح‌های $CNB_۱(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda)$ را به‌دست آوردند و اشاره نمودند که بسیاری از این طرح‌ها تحت مدل $M_۲$ بهینهٔ عمومی هستند. در این بخش بر اساس فرع ۲ نشان داده شده است که کدام طرح، تحت مدل $M_۲$ بهینهٔ عمومی است. این طرح‌ها با مشخص نمودن بردار Q در جداول ۱ و ۲ آورده شده‌اند. بردارهای گروه دوم، طرح دودویی و $CNB_۱(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda)$ به‌وجود می‌آورند. اما بردارها در گروه اول، طرح تیمار- متعادل و $CNB_۱(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda)$ ایجاد می‌کنند و بنابراین طرح حاصل از آن‌ها تحت مدل $M_۲$ بهینهٔ عمومی هستند.

که نماد $[q_۱, \dots, q_{k-۱}]a$ به این معناست که a تکرار از بردار $[q_۱, \dots, q_{k-۱}]$ درنظر گرفته شود. در جدول ۳ فهرستی از بردارهایی که طرح $CNB_۲(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda')$ ایجاد می‌کنند، به‌دست آورده شد. این بردارها نیز به دو گروه تقسیم می‌شوند. طرح حاصل از بردارها در گروه دوم، دودویی و $CNB_۲(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda')$ است. اما طرح‌ها در گروه اول تیمار- متعادل نیز هستند و بنابراین طبق قضیهٔ ۴ تحت مدل $M_۱$ بهینهٔ عمومی هستند. لازم به ذکر است که تمام طرح‌های حاصل از بردارها در جدول ۳ یک طرح $CNB_۱(v, b, k, \gamma = ۱, \lambda = ۲\lambda')$ نیز هستند.

جدول ۱: طرح $CNB_{1}(v, b, k, \gamma, \lambda)$

k	v	λ	Q	گروه
۳	۷	۱	[۱, ۲]	۲
۴	۹	۱	[۲, ۳, ۵]	۱
۵	۱۱	۱	[۲, ۷, ۸, ٦]	۲
۶	۱۳	۱	[٦, ۳, ۵, ۹, ۲]	۲
۷	۱۵	۱	[۱, ۳, ۴, ٦, ۸, ۱۳]	۱
۸	۱۷	۱	[۲, ۴, ۵, ۳, ٦, ۷, ۱٦]	۱
۹	۱۹	۱	[۱۰, ۱۲, ۱۸, ۱۴, ۸, ۱۵, ۳, ۲]	۱
۳	۴	۲	[۱, ۲]	۲
۴	۵	۲	[۱, ۳, ۴]	۲
۶	۷	۲	[۱, ۱, ۲, ۲, ۴]	۲
۷	۸	۲	[۱, ۲, ۳, ۴, ۳, ۲]	۱
۸	۹	۲	[۲, ۲, ۴, ۴, ۳, ۱, ۳]	۱
۱۰	۱۱	۲	[۱, ۱, ۳, ۲, ۲, ۵, ۳, ۴, ۵]	۱
۱۱	۱۲	۲	[۱, ۲, ۳, ۴, ٦, ۵, ۵, ۳, ۲, ۴]	۱
۱۲	۱۳	۲	[۵, ۹, ۱, ۲, ۳, ۲, ۳, ۴, ۷, ۱, ۸]	۱
۱۴	۱۵	۲	[۳, ۱, ۴, ٦, ۷, ۵, ۵, ۹, ۲, ۱, ۴, ۳, ۲]	۱
۱۵	۱۶	۲	[۵, ۲, ۴, ۱, ۲, ۳, ۳, ۴, ۵, ٦, ۷, ۸, ۷, ٦]	۱
۳	۱۳	۱	[۱, ۳] + [۲, ۵]	۲
۴	۱۷	۱	[۲, ۳, ۴] + [۵, ٦, ۷]	۱
۵	۲۱	۱	[۱, ۳, ۸, ۱۹] + [۴, ٦, ۷, ۹]	۱
۶	۲۵	۱	[۲, ۱, ۱۱, ۸, ۷] + [٦, ۳, ۹, ۱۵, ۵]	۱
۳	۵	۳	[۱, ۱] + [۲, ۲]	۲
۶	۹	۳	[۳, ۳, ۵, ۵, ٦] + [۱, ۱, ۱, ۲, ۲]	۱
۵	۶	۴	[۱, ۲, ۲, ۳] + [۱, ۲, ۵, ۳]	۲

جدول ۲: طرح $CNB_{1}(v, b, k, \gamma, \lambda)$

k	v	λ	Q	گروه
۳	۱۹	۱	[۱, ۴] + [۲, ٦] + [۳, ۷]	۲
۴	۲۵	۱	[۱۸, ۱۹, ۸] + [۱, ۴, ۲۲] + [۱۴, ۹, ۱۲]	۱
۵	۳۱	۱	[۲, ۲۰, ۱۸, ۱۰] + [۴, ۱٦, ۲, ۸] + [۱۲, ۱۷, ٦, ۲۴]	۱
۴	۱۳	۲	[۱, ۲, ٦] + [۳, ۴, ۸] + [۸, ۱, ۱۰]	۲
۵	۱۶	۲	[۱, ۸, ۳, ۷] + [۵, ۵, ٦, ۷] + [۱, ۲, ۱۳, ۱۲]	۱
۴	۷	۴	[۱, ۱, ۱] + [۲, ۲, ۲] + [۳, ۳, ۳]	۲
۵	۷	۵	[٦, ۲, ۴, ٦] + [۳, ۳, ۲, ۴], [۱, ۱, ۲, ۱]	۲
۳	۲۵	۱	[۱, ۱۱] + [۲, ۷] + [۳, ۵] + [۴, ٦]	۲
۴	۳۳	۱	[۱, ۹, ۵] + [۲, ۴, ۱۱] + [۳, ۱۰, ٦] + [۸, ۲٦, ۱۲]	۱
۵	۹	۵	[۱, ۱, ۳, ۲] + [۱, ۲, ۳, ۵] + [۳, ۳, ۴, ۴] + [۳, ۴, ۱, ۲]	۲
۳	۳۱	۱	[۱, ۱۴] + [۲, ۱۰] + [۳, ۵] + [۷, ۱۱] + [۹, ۱۰]	۲
۴	۴۱	۱	[۳, ۱, ۱۵] + [۴, ۷, ۱۴] + [۵, ۱۷, ۲۱] + [٦, ۸, ۱۸] + [۱۰, ۳۰, ۲۹]	۱
۳	۶	۲	[۴, ۵] + [۳, ٦] + [۳, ۵] + [۲, ۴] + [۱, ۱]	۲
۴	۲۱	۲	[۱, ۴, ٦] + [۱, ۴, ۷] + [۲, ۳, ۵] + [۲, ۵, ٦] + [۷, ۸, ۹]	۱
۳	۱۱	۳	[۱, ۱] + [۲, ۲] + [۳, ۳] + [۴, ۴] + [۵, ۵]	۲
۴	۱۱	۴	[۱, ۱, ۱] + [۲, ۲, ۲] + [۳, ۳, ۳] + [۴, ۴, ۴] + [۵, ۵, ۵]	۲
۳	۳۷	۱	[۱, ۱۳] + [۲, ۳] + [۴, ۱۱] + [٦, ۱۰] + [۷, ۱۲] + [۸, ۹]	۲
۴	۱۵	۴	[۱, ۲, ۳] + [۱, ۲, ۵]۲ + [۲, ۳, ٦] + [۳, ۳, ۵] + [۴, ۴, ۸] + [٦, ٦, ۱]	۱
۳	۸	۶	[۱, ۱] + [۱, ۲] + [۱, ۴] + [۲, ۲] + [۲, ۵] + [۳, ۳] + [۴, ۴]	۲
۵	۸	۱۰	[۱, ۱, ۱, ۱] + [۲, ۲, ۲, ۳]۳ + [۳, ۳, ۳, ۳] + [۳, ۱, ۱, ۴] + [۴, ۲, ۳, ۴]	۱

جدول ۳: طرح $CNB_۲(v, b, k, \gamma, \lambda')$

گروه	Q	λ'	v	k
۲	[۱, ۲, ۴]	۱	۵	۴
۲	[۴, ۱, ۵, ۳, ۲]	۱	۷	۶
۲	[۱, ۲, ۳, ۵, ٦, ۸, ۷]	۱	۸	۹
۲	[۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۹, ۷, ۱۰, ۸]	۱	۱۱	۱۰
۲	[۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۰, ۱۱, ۴, ٦, ۷]	۱	۱۲	۱۱
۲	[۳, ۵] + [۱, ۲]	۱	۷	۳
۱	[۳, ۴, ٦] + [۱, ۲, ۸]	۱	۹	۴
۲	[۴, ۸, ۷, ۵] + [۱, ۲, ۳, ۱۰]	۱	۱۱	۵
۲	[۵, ۳, ۱, ۱۱, ۴] + [۹, ۱۰, ۸, ۷, ۱۲	۱	۱۳	۶
۱	[۸, ۵, ۱, ۷, ۱۲, ۱۰, ۹] + [۳, ۱۳, ۱۵, ۱۱, ۱۴, ٦, ۴	۱	۱۷	۸
۱	[۲, ۸, ۵, ۱۳, ۱۱, ۱٦, ۹, ۱۷] + [٦, ۳, ۱۵, ۱۸, ۱۰, ۱۲, ۴, ۱	۱	۱۹	۹
۱	[۱, ۹, ٦] + [۷, ۳, ۱۲] + [۱۱, ۵, ۲]	۱	۱۳	۴
۱	[۳, ۵, ٦, ۱, ۱] + [۷, ۸, ۳, ۵, ۸]	۲	۱۰	۶
۲	[۳, ۱, ۴] + [۲, ۱, ۵] + [۴, ۲, ۳]	۲	۷	۴
۱	[۴, ۱۱, ۷, ۷, ۳, ۴, ۱] + [۱۰, ۸, ۱۲, ۱۲, ۵, ۱۱, ۱] + [٦, ۳, ۸, ۱۰, ۹, ۲, ۹]	۲	۱۳	۸
۲	[۴, ۴] + [۲, ۲] + [۳, ۳] + [۱, ۳]	۳	۵	۳
۱	[۲, ۱, ۴, ٦, ٦] + [۸, ٦, ۵, ۵, ۱] + [۷, ۷, ۳, ۳, ۲] + [۳, ۱, ۴, ۸, ۴]	۳	۹	۶

بحث و نتیجه‌گیری

فیلیپاک (۲۰۱۲) شرط کافی برای یافتن طرح بهینهٔ عمومی تحت مدل با اثرات همسایهٔ دو طرفهٔ نامتفاوت ($M_۲$) را بیان نمود. در این مقاله ثابت شده است که طرح‌های $CNB_۱(v, b, k, \gamma = \{۱, ۲\}, \lambda)$ درصورتی‌که دودویی و تیمار- متعادل باشند در این شرط صدق می‌کنند و بنابراین تحت مدل $M_۲$ بهینهٔ عمومی هستند.

یکی دیگر از اهداف این مقاله چگونگی ساختن طرح‌های $CNB_۲(v, b, k, \gamma, \lambda')$ است. اگرچه هر طرح $CNB_۲(v, b, k, \gamma, \lambda')$ یک طرح $CNB_۱(v, b, k, \gamma, ۲\lambda')$ است اما عکس این مطلب ضرورتاً برقرار نیست. به‌طور مثال اقبال و همکاران (۲۰۰۹) بردار $[۲, ۳, ۵]$ را برای ساختن طرح $CNB_۱(v = ۹, b = ۹, k = ۴, \gamma = ۱, \lambda = ۱)$ به روش تغییرات دوره‌ای به‌دست آوردند اما طرح حاصل از این بردار نمی‌تواند یک طرح $CNB_۲(v = ۹, b = ۹, k, = ۴, \gamma = ۱, \lambda' = \frac{۱}{۲})$ باشد. در این مقاله روش تغییرات دوره‌ای برای ساختن طرح‌های $CNB_۲(v, b, k, \gamma, \lambda')$ پیشنهاد گردید. اگرچه آزایس و همکاران (۱۹۹۳) برخی از این طرح‌ها را با استفاده از میدان گالوا و روش تفاضلی ریس بدست آوردند اما طرح‌های حاصل‌شده توسط آن‌ها تنها برای $v = k$

و $v = k - 1$ هستند. درحالی‌که در جدول ۳ برای مقادیر مختلفی از v و k این طرح‌ها به‌دست آورده شد و برخی از آن‌ها که تحت مدل با اثرات همسایهٔ یک‌طرفه بهینهٔ عمومی هستند، مشخص شده‌اند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران و هیئت تحریریه محترم مجله علوم آماری به خاطر پیشنهادات ارزنده‌ای که موجب بهبود مقاله گردید، قدردانی و تشکر می‌کنند.

مراجع

Ahmed, R. and Akhtar, M. (2008a), Construction of Neighbour Balanced Block Designs, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **2**, 551-558.

Ahmed, R. and Akhtar, M. (2008b), An Algorithm to Generate Neighbour Balanced Binary Block Designs, *Journal of Statistics*, **15**, 1-6.

Ahmed, R. and Akhtar, M. (2009), On Construction of One Dimensional All Order Neighbour Balanced Designs by Cyclic Shifts, *Pakistan Journal of Statistics*, **25**, 121-126.

Ai, M. Y., Ge, G. and Chan, L. Y. (2007), Circular Neighbor-Balanced designs Universally Optimal for Total Effects, *Science in China Series A: Mathematics*, **50**, 821-828.

Azais, J. M., Bailey, R. A. and Monod, H. (1993), A Catalogue of Efficient Neighbour-Designs with Border Plots, *Biometrics*, **49**, 1252-1261.

Bailey, R. A. and Druilhet, P. (2004), Optimality of Neighbour-Balanced Designs for Total Effects, *The Annals of Statistics*, **32**, 1650-1661.

Bermond, J. C. and Faber, V. (1976), Decomposition of the Complete Directed Graph into K-Circuits, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **21**, 146-155.

Chandak, M. L. (1981), On the Construction of Some Families of Neighbour Designs, *Journal of Indian Statistical Association*, **19**, 1-7.

Dey, A. and Chakravarty, R. (1977), On the Construction of Some classes of Neighbour Designs, *Journal of Indian Society of Agricultural Statistics*, **29**, 97-104.

Druilhet, P. (1999), Optimality of Neighbour-Balanced Designs, *Journal of Statistical planning and Inference*, **81**, 141-152.

Filipiak, K. (2012), Universally Optimal Designs under an Interference Model with Equal Left- and Right-Neighbour Effects, *Journal of Statistics and Probability*, **82**, 592-598.

Filipiak, K. and Markiewicz, A. (2005), Optimality and Efficiency of Circular Neighbor-Balanced Designs for Correlated Observations , *Metrika*, **61**, 17-27.

Filipiak, K., Markiewicz, A.(2003), Optimality of Circular Neighbour-Balanced Designs Under Mixed Effects Model, *Statistics and Probability*, **61**, 225-234.

Filipiak, K. and Markiewicz, A. (2007) , Optimal Designs for a Mixed Interference Model, *Metrika*, **65**, 369-386.

Hwang, F. K. (1977), Construction of Some Classes of Neighbour Designs, *Annals of Statistics*, **23**, 302-313.

Hwang, F. K. and Lin, S. (1973), Neighbour Designs, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, **1**, 786-790.

Iqbal, I., Amanullah, M. and Nasir, J. A. (2006), The Construction of Second Order Neighbour Designs, *Journal of Research Science*, BZU, Multan, Pakistan, **17**, 191-199.

Iqbal, I., Tahir, M. H. and Ghazali, S. S. A. (2009), Circular Neighbour-Balanced Designs Using Cyclic Shifts, *Science in China, Series A: Mathematics*, **52**, 2243-2256.

Jaggi, S., Varghese, C. and Gupta, V. K. (2007), Optimal Circular Block Designs for Neighbouring Competition Effects, *Journal of Applied Statistics*, **34**, 557-584.

Rees, D. H. (1967), Some Designs of Use in Serology, *Biometrics*, **23**, 779-791.