مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸
جلد ۳، شماره ۱، ص ۱-۱۶

برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری تحت سانسور هیبرید واحد شده

معصومه ایزانلو، آرزو حبیبی راد
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۲/۱۰ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۸۸/۶/۱۶

چکیده : سانسور هیبرید واحد شده ترکیبی از دو سانسور هیبرید تعمیم‌یافته نوع I و II می‌باشد. در این مقاله، طرح سانسور هیبرید واحد شده وقتی متغیرهای طول عمر، دارای توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری هستند، بررسی می‌شود. از آنجا که برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر ها فرم بسته‌ای ندارند، لذا برای حل مشکل از روش تکرار عددی نیوتن-رافسون استفاده می‌کنیم و با کمک ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات، فاصله اطمینان مجانبی برای پارامترها بدست می‌آوریم. با فرض آن که پارامترها مستقل و دارای توزیع پیشین گاما هستند، برآورد بیزی پارامترها را با کمک نمونه‌گیری از نقاط مهم بدست آورده و در یک مطالعه شبیه‌سازی طرح‌های مختلف با هم مقایسه می‌شوند. در انتها با یک مثال واقعی هدف مقاله بیشتر توضیح داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی : توزیع مجانبی، سانسور هیبرید واحد شده، ماتریس اطلاع فیشر، نمونه‌گیری از نقاط مهم.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: آرزو حبیبی‌راد، ahabibi@um.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲N۰۱ و ۶۲N۰۲

۱ مقدمه

یک آزمون طول عمر را با n واحد در نظر بگیرید. فرض کنید واحدها دارای طول عمر مستقل و هم توزیع با تابع چگالی $f(y;\theta)$ و تابع توزیع $F(y;\theta)$ باشند و $Y_{1:n} \leq \ldots \leq Y_{n:n}$ طول عمر واحد ها تا شکست (خراب شدن یا رخداد مرگ) آنها باشند. اولین بار اپستین (۱۹۵۴) طرحی را در یک آزمایش بقا بررسی کرد که در آن آزمایش در زمان $T^* = \min(Y_{r:n}, T)$ خاتمه می‌یافت و مقادیر T و r از قبل تعیین شده‌اند. چیلدز و همکاران (۲۰۰۳) این طرح را سانسور هیبرید نوع I نامیدند. در این طرح ممکن است تا زمان T تعداد بسیار کمی شکست رخ دهد. برای حل این مشکل چیلدز و همکاران آزمایشی را طراحی کردند، که در آن آزمایش در زمان $T^* = \max(Y_{r:n}, T)$ خاتمه می‌یابد این طرح موسوم به طرح سانسور هیبرید نوع II شد. واضح است که این طرح مشکل طرح قبل را ندارد حتی ممکن است قبل از زمان T تمام واحدها با شکست روبرو شوند، امّا زمان لازم برای آزمایش قابل پیش‌بینی نیست.

چاندراسکار و همکاران (۲۰۰۴) دو طرح سانسور هیبرید تعمیم‌یافته نوع I و II را معرفی کردند به طوری که اشکال‌های دو طرح قبل (نداشتن حداقل شکست لازم در طرح سانسور هیبرید نوع I و طولانی شدن زمان آزمایش در طرح سانسور هیبرید نوع II) را تا حدودی بهبود بخشیدند. در طرح سانسور هیبرید تعمیم‌یافته نوع I، فرض کنید $T \in (0, \infty)$ و مقادیر k و r به طوری که $k < r$ از قبل تعیین شده باشند. اگر k امین شکست قبل از زمان T رخ دهد آزمایش در زمان $\min(Y_{r:n}, T)$ و اگر بعد از زمان T رخ دهد آزمایش در زمان $Y_{k:n}$ پایان می‌پذیرد. بنابراین این طرح داشتن حداقل k شکست را تضمین می‌کند. در طرح سانسور هیبرید تعمیم‌یافته نوع II، فرض کنید r و $T_1, T_2 \in (0, \infty)$ به طوری که $T_1 < T_2$ مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده باشند. اگر r امین شکست قبل از زمان T_1 رخ دهد آزمایش در زمان T_1، اگر بین زمان های T_1 و T_2 رخ دهد آزمایش در زمان $Y_{r:n}$ و اگر بعد از زمان T_2 رخ دهد آزمایش در زمان T_2 خاتمه می‌یابد. این طرح تضمین می‌کند که آزمایش حداکثر در زمان T_2 پایان می‌پذیرد.

ترکیب طرح های فوق، سانسور جدیدی را ایجاد می‌کند که سانسور هیبرید واحد شده نامیده می‌شود. این طرح اولین بار توسط بالا کریشنان و همکاران (۲۰۰۸) معرفی شد. در این طرح قبل از شروع آزمایش مقادیر T_1 و T_2، r و k به طوریکه $T_1 < T_2$ و $r < k$ می‌باشد از قبل تعیین می‌شوند، اگر k امین شکست قبل از زمان T_1 رخ دهد آزمایش در زمان $\min(\max(Y_{r:n}, T_1), T_2)$ و اگر بین T_1 و T_2 رخ دهد آزمایش در زمان $\min(Y_{r:n}, T_2)$ و اگر بعد از زمان T_2 رخ دهد آزمایش در زمان $Y_{k:n}$ پایان می‌پذیرد، در این نوع سانسور یکی از شش حالت زیر رخ می‌دهد. فرض کنید d_j تعداد شکست تا زمان T_j، $j = 1, 2$ باشد، در این صورت شش نوع مشاهده داریم:

۱) اگر $0 < Y_{k:n} < Y_{r:n} < T_1 < T_2$، آزمایش در زمان T_1 با D شکست پایان می‌پذیرد،

۲) اگر $0 < Y_{k:n} < T_1 < Y_{r:n} < T_2$، آزمایش با رخ دادن r امین شکست پایان می‌پذیرد،

۳) اگر $0 < Y_{k:n} < T_1 < T_2 < Y_{r:n}$، آزمایش در زمان T_2 و با d_2 شکست خاتمه می‌یابد،

۴) اگر $0 < T_1 < Y_{k:n} < Y_{r:n} < T_2$، آزمایش در زمان $Y_{r:n}$ خاتمه می‌یابد،

۵) اگر $0 < T_1 < Y_{k:n} < T_2 < Y_{r:n}$، آزمایش در زمان T_2 با d_2 شکست پایان می‌پذیرد،

۶) اگر $0 < T_1 < T_2 < Y_{k:n} < Y_{r:n}$، آزمایش با رخ دادن k امین شکست پایان می‌پذیرد.

دقت شود که در حالت اول $d_1 = d_2 = D$، $T_1 < y_{(D+1):n}$ و $r \leq D$ به طوری که $(D + 1)$ امین آزمایش قبل از زمان T_1 رخ نمی‌دهد و در حالت سوم و پنجم $T_2 < y_{(d_2+1):n}$ و $k \leq d_2$ به طوری که $(d_2 + 1)$ امین آزمایش قبل از زمان T_2 رخ نمی‌دهد.

اگر c نقطه توقف آزمایش و d تعداد شکست ها تا زمان c باشد، تابع درستنمایی

را می‌توان به صورت

$$L(\theta|\boldsymbol{y}) = \frac{n!}{(n-d)!}\prod_{i=1}^{d} f(y_{i:n})[1-F(c)]^{n-d}, \qquad (1)$$

نوشت، که در آن $d \,\epsilon\{D, d_1, d_2, k, r\}$ و $c \,\epsilon\{T_1, T_2, y_{r:n}, y_{k:n}\}$ می‌باشد.

بالا کریشنان و همکاران (۲۰۰۸) داده‌ها را با این فرض که طول عمر واحدها دارای توزیع نمایی با میانگین θ می‌باشد را مورد بررسی قرار دادند. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر را به دست آورده و با استفاده از تابع مولد گشتاور $\hat{\theta}$، تابع چگالی دقیق $\hat{\theta}$ و فاصله اطمینان دو طرفه را برای پارامتر توزیع، بیان کردند و نشان دادند که این طرح در مقایسه با سانسور هیبرید تعمیم‌یافته نوع I و II از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار است.

در این مقاله مشابه کار کوندو و پرادهان (۲۰۰۹) که برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری را تحت سانسور هیبرید به دست آوردند، سانسور هیبرید واحد شده، هنگامی که طول عمر واحدهای آزمایش دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری باشند، بررسی می‌شود. گوپتا و کوندو (۱۹۹۹) با مطالعه توزیع نمایی تعمیم‌یافته نشان دادند که این توزیع در برخی حالات بهتر از توزیع گاما و وایبل به داده‌ها برازش داده می‌شود. متغیر طول عمر Y دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری با تابع چگالی

$$f_{GE}(y;\alpha,\lambda) = \alpha\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})^{\alpha-1}, \qquad (2)$$

و تابع توزیع

$$F_{GE}(y;\alpha,\lambda) = (1-e^{-\lambda y})^{\alpha},$$

است، که در آن $\alpha > 0$ پارامتر شکل و $\lambda > 0$ پارامتر مقیاس می‌باشد.

هدف این مقاله، ابتدا به دست آوردن برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای نامعلوم توزیع مورد نظر می‌باشد. از آنجا که برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها فرم بسته‌ای ندارند، از روش تکرار عددی نیوتن-رافسن استفاده می‌شود. سپس با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات، فاصله اطمینان مجانبی برای پارامترها

بدست می‌آوریم. برای محاسبه برآورد بیزی پارامترها نیز از نمونه‌گیری از نقاط مهم[۱] استفاده خواهد شد. در این مقاله، ابتدا در بخش ۲، برای محاسبه برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای توزیع، از روش تکرار عددی نیوتن–رافسون، ماتریس اطلاع فیشر و رهیافت بیزی استفاده می‌کنیم. سپس مطالعه شبیه‌سازی با نرم افزار R، در بخش ۳ و در بخش ۴ یک دسته داده واقعی تحلیل و نتایج در جدول‌های ۱ تا ۴ آورده شده‌اند. بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲ برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای توزیع

۱.۲ برآور ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید n واحد نمونه دارای طول عمر مستقل و هم توزیع با تابع چگالی (۲) باشند. برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، مشتق لگاریتم تابع درستنمایی مربوط به سانسور هیبرید واحد شده (۱) نسبت به α و λ برابر صفر قرار داده می‌شود.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\alpha,\lambda|\boldsymbol{y})}{\partial\alpha} &= \frac{d}{\alpha}+\sum_{i=1}^{d}\ln(1-e^{-\lambda y_{i:n}}) \\
&- (n-d)\frac{\ln(1-e^{-\lambda c})(1-e^{-\lambda c})^{\alpha}}{1-(1-e^{-\lambda c})^{\alpha}} = 0, \\
\frac{\partial \ell(\alpha,\lambda,|\boldsymbol{y})}{\partial\lambda} &= \frac{d}{\lambda}-\sum_{i=1}^{d} y_{i:n}+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{d}\frac{y_{i:n}e^{-\lambda y_{i:n}}}{1-e^{-\lambda y_{i:n}}} \\
&- (n-d)\frac{\alpha c e^{-\lambda c}(1-e^{-\lambda c})^{\alpha-1}}{1-(1-e^{-\lambda c})^{\alpha}} = 0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

واضح است که معادلات (۳) به آسانی قابل حل نیستند، لذا برای حل مشکل از روش تکرار عددی نیوتن–رافسون استفاده می‌کنیم.

[۱] Importance sampling

۲.۲ برآور فاصله‌ای با کمک ماتریس اطلاع فیشر

می‌دانیم از ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات می‌توان برای ساختن فاصله اطمینان مجانبی استفاده کرد. برای محاسبه این ماتریس بر اساس اطلاع داده‌های سانسور شده از قانون

$$I_Y(\theta) = I_W(\theta) - I_{W|Y}(\theta), \tag{۴}$$

استفاده می‌شود، که در آن $\theta = (\alpha, \lambda)$، Y بردار مشاهدات، W داده های کامل، $I_W(\theta)$ اطلاع کامل، $I_{W|Y}$ اطلاع داده‌های سانسور شده هستند (لویس، ۱۹۸۲). برای محاسبه رابطهٔ (۴)، ابتدا باید تابع توزیع داده‌های سانسور شده را به شرط مشاهدات بدست آوریم. برای این منظور فرض کنید $Y = (Y_{1:n}, \ldots, Y_{d:n})$ و $Z = (Z_1, \ldots, Z_{n-d})$ به ترتیب بردار داده‌های مشاهده شده و داده‌های سانسور شده باشند، مجموعه داده‌های کامل در یک نمونه بدون سانسور، ترکیبی از Z و Y است که آن را با W نشان می‌دهیم. بر اساس نتایج بدست آمده توسط انجی و همکاران (۲۰۰۲) توزیع شرطی Z_j، $j = 1, \ldots, n-d$، با فرض $Y_{1:n} = y_{1:n}, \ldots, Y_{d:n} = y_{d:n}$ به صورت

$$f_{Z|Y}(z_j|Y_{1:n} = y_{1:n}, \ldots, Y_{d:n} = y_{d:n}) = \frac{f_{GE}(z_j; \alpha, \lambda)}{1 - F_{GE}(c; \alpha, \lambda)}, \quad z_j > c \tag{۵}$$

محاسبه می شود، که در آن Z_j و Z_k، $(k \neq j)$ مستقل شرطی هستند. اگر $\ell_c(\alpha, \lambda; W)$ لگاریتم تابع درستنمایی در یک نمونه کامل باشد ماتریس اطلاع کامل به صورت

$$I_W(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ell_c(\theta; W)}{\partial \theta^2}\right], \tag{۶}$$

محاسبه می‌شود و ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات سانسور شده نیز به صورت

$$I_{W|Y}(\theta) = -(n-d)E_{Z|Y}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z|Y, \theta)}{\partial \theta^2}\right], \tag{۷}$$

است (کوندو و گوپتا، ۲۰۰۸). بنابراین با محاسبه روابط (۶) و (۷) می‌توان رابطه (۴) را محاسبه نمود و از معکوس آن ماتریس کواریانس مجانبی $\hat{\theta}$ را به دست آورد.

۳.۲ برآورد بیزی

برای برآورد بیزی پارامترهای α و λ، از آن جایی که پیشنهادی در مورد پیشین توأم آن‌ها وجود ندارد، مشابه کوندو و گوپتا (۲۰۰۸) فرض می‌کنیم α و λ مستقل و هر یک دارای توزیع پیشین گاما با تابع چگالی به صورت

$$\pi_1(\alpha) \propto \alpha^{a_1-1}e^{-b_1\alpha}, \quad \alpha > 0,$$
$$\pi_2(\lambda) \propto \lambda^{a_2-1}e^{-b_2\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

هستند، که در آن‌ها a_1، b_1، a_2 و b_2 مقادیری مثبت و معلوم هستند. اگر $L(\boldsymbol{y}|\alpha,\lambda)$ تابع درستنمایی مشاهدات $y_{1:n},\dots,y_{d:n}$ بر اساس سانسور هیبرید واحد شده باشد، برآورد بیزی هر تابعی از α و λ به صورت $u(\alpha,\lambda)$، تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت

$$\hat{u} = E_{\alpha,\lambda|\boldsymbol{y}}(u(\alpha,\lambda)) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty u(\alpha,\lambda)L(\boldsymbol{y}|\alpha,\lambda)\pi_1(\alpha)\pi_2(\lambda)d\alpha\, d\lambda}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\boldsymbol{y}|\alpha,\lambda)\pi_1(\alpha)\pi_2(\lambda)d\alpha\, d\lambda}, \qquad (8)$$

است، که محاسبه تحلیلی آن در حالت کلی میسر نیست، بنابراین برای برآورد هر تابع از α و λ مشابه رکعب و مادی (۲۰۰۵) از نمونه‌گیری از نقاط مهم استفاده می‌کنیم. بدین منظور تابع چگالی پسین توأم α و λ را به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\alpha,\lambda|\boldsymbol{y}) &\propto L(\boldsymbol{y}|\alpha,\lambda)\pi_1(\alpha)\pi_2(\lambda) \\ &\propto g_\lambda(a_2^*,b_2^*) \times g_{\alpha|\lambda}(a_1^*,b_1^*) \times g_3(\alpha,\lambda)\ , \end{aligned} \qquad (9)$$

بازنویسی می‌کنیم، که در آن $g_{\alpha|\lambda}(a_1^*,b_1^*)$ تابع چگالی گاما با پارامتر شکل $a_1^* = a_1 + d$ و پارامتر مقیاس $b_1^* = b_1 - \sum_{i=1}^d \ln(1 - e^{-y_{i:n}\lambda})$ و $g_\lambda(a_2^*,b_2^*)$ تابع چگالی گاما با پارامتر شکل $a_2^* = a_2 + d$ و پارامتر مقیاس $b_2^* = b_2 + \sum_{i=1}^d y_{i:n}$ است و

$$g_3(\alpha,\lambda) = \frac{e^{(n-d)\ln(1-(1-e^{-c\lambda})^\alpha) - \sum_{i=1}^d \ln(1-e^{-\lambda y_{i:n}})}}{(b_1 - \sum_{i=1}^d \ln(1 - e^{-\lambda y_{i:n}}))^{a_1+d}},$$

تابعی از α و λ است. حال برآوردگر بیزی $\hat{u}_B$ طی مراحل زیر به دست می‌آید:

- مرحله ۱: λ_1 را از توزیع $g_\lambda(a_2^*,b_2^*)$ تولید می‌کنیم.

- مرحله ۲: α_1 را از توزیع $g_{\alpha|\lambda}(a_1^*, b_1^*)$ تولید می‌کنیم.
- مرحله ۳: مراحل ۱ و ۲ را N بار تکرار کرده و $(\alpha_1, \lambda_1), \ldots, (\alpha_N, \lambda_N)$ را به دست می‌آوریم.
- مرحله ۴: برآورد بیزی $u(\alpha, \lambda)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{u}_B \approx \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u(\alpha_i, \lambda_i) g_3(\alpha_i, \lambda_i)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_3(\alpha_i, \lambda_i)} \ .$$

برای به دست آوردن بازه باور پارامترها فرض کنید $\Pi(u|\boldsymbol{y})$ تابع توزیع پسین u و $u^{(\beta)}$ چندک مرتبه βام باشد، برای u^* داده شده برآوردگر تابع توزیع پسین پارامتر به صورت

$$\hat{\Pi}(u^*|\boldsymbol{y}) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{(u\leq u^*)} g_3(\alpha_i, \lambda_i)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_3(\alpha_i, \lambda_i)},$$

به دست می‌آید، که در آن $I_{(u\leq u^*)}$ تابع نشانگر می‌باشد. اگر $\{u_{(i)}\}$ مقادیر مرتب شده $\{u_i = u(\alpha_i, \lambda_i)\}$ باشند و تعریف کنیم $w_i = g_3(\alpha_{(i)}, \lambda_{(i)}) / \sum_{i=1}^{N} g_3(\alpha_{(i)}, \lambda_{(i)})$ آنگاه

$$\hat{\Pi}(u^*|\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0 & u^* < u_1 \\ \sum_{j=1}^{i} w_i & u_{(i)} \leq u^* < u_{(i+1)} \\ 1 & u^* \geq u_{(n)} \end{cases} \tag{10}$$

و با استفاده از رابطه (۱۰) داریم

$$\hat{u}^{(\beta)} = \begin{cases} u_{(1)} & \beta = 0 \\ u_{(i)} & \sum_{j=1}^{i-1} w_j < \beta \leq \sum_{j=1}^{i} w_j. \end{cases}$$

بنابراین اگر تعریف کنیم

$$R_j = \left(\hat{u}^{(\frac{j}{N})} \ , \ \hat{u}^{(\frac{j+(1-\beta)N}{N})}\right), \quad j = 1, \ldots, [\beta N]$$

آنگاه R_{j^*} که در میان تمام R_j ها دارای کوچکترین طول است، به عنوان بازه باور u انتخاب می‌شود.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

دراین بخش، نتایج مطالعه شبیه‌سازی را برای مقایسه طرح های مختلف سانسور هیبرید واحد شده و عملکرد برآورد ML پارامترها بر اساس معیارهای توان دوم خطا (MSE) و احتمال‌های پوشش ارائه می‌شوند. برای این منظور ابتدا یک نمونه تصادفی با حجم $n = ۵۰$ از توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری به ازای $\alpha = ۷$ و $\lambda = ۰/۰۵$ تولید کرده و در ادامه پارامترهای توزیع در طرح‌های مختلف سانسور با کمک روش ML برآورد شده‌اند. برای مقایسه طرح‌های مختلف، روند ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده است. سپس برآوردهای MSE و احتمال‌های پوشش محاسبه و در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش شده‌اند. همان طور که ملاحظه می‌شود، برای r، $T_۱$ و $T_۲$ معین، وقتی k افزایش می‌یابد در اکثر طرح‌ها برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شوند. در این حالت برآورد MSE کاهش یافته و برآورد احتمال‌های پوشش افزایش می‌یابند. با توجه به جدول ۱، برای $T_۱$، r و k معین، وقتی $T_۲$ افزایش می‌یابد برآورد MSE کاهش یافته و برآوردها به مقدار اصلی پارامتر نزدیک می‌شوند. با توجه به جدول ۲، برای r، k و $T_۲$ معین، وقتی $T_۱$ به صفر میل می‌کند برآورد MSE افزایش یافته و برآورد احتمال‌های پوشش به صفر نزدیک می‌شوند، در این حالت برآوردها از مقدار واقعی پارامترها فاصله می‌گیرند.

۴ مثال کاربردی

در این بخش نتایج به دست آمده با یک مجموعه داده واقعی از لاولس (۱۹۸۲، ص ۲۲۸) توضیح داده می‌شود. داده ها مربوط به اندازه‌گیری مقاومت عمق شکاف توپ های بلبرینگ می‌باشند، طول عمر ۲۳ قطعه بعد از یک میلیون بار چرخش به صورت

$$۱۷/۸۸,\ ۲۸/۹۲,\ ۳۳/۰۰,\ ۴۱/۵۲,\ ۴۲/۱۲,\ ۴۵/۶۰,\ ۴۸/۸۰,\ ۵۱/۸۴,$$
$$۵۱/۹۶,\ ۵۴/۱۲,\ ۵۵/۵۶,\ ۶۷/۸۰,\ ۶۸/۶۴,\ ۶۸/۶۴,\ ۶۸/۸۸,\ ۸۴/۱۲,$$
$$۹۳/۱۲,\ ۹۸/۶۴,\ ۱۰۵/۱۲,\ ۱۰۵/۸۴,\ ۱۲۷/۹۲,\ ۱۲۸/۰۴,\ ۱۷۳/۴۰$$

جدول ۱: برآورد، میانگین توان دوم خطا و احتمال پوشش برای (λ ، α) با $T_1 =$ ۳۰

r	k	T_2	$(\hat{\alpha},\hat{\lambda})$	MSE	احتمال پوشش
۱۵	۹	۵۰	(۱۰/۵۵۳,۰/۰۵۷۱)	(۹۸/۳۹۲,۳/۱۵۹ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۹۲,۰/۱۷۶۶)
		۶۵	(۱۰/۵۱۳,۰/۰۵۷۲)	(۹۰/۹۹۵,۳/۱۱۶ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۹۲,۰/۱۷۶۶)
		۹۵	(۱۰/۵۱۳,۰/۰۵۷۴)	(۹۳/۹۰۴,۳/۱۵۵ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۹۸,۰/۱۷۸۰)
		۱۳۰	(۱۰/۵۵۱,۰/۰۵۷۲)	(۹۰/۹۹۱,۳/۱۱۶ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۹۳,۰/۱۷۶۶)
۲۳	۱۷	۵۰	(۹/۰۰۵,۰/۰۵۴۱)	(۲۸/۵۵۵,۱/۵۴۸ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۷۷,۰/۱۷۵۹)
		۶۵	(۸/۹۶۵,۰/۰۵۴۱)	(۲۹/۰۲۹,۱/۴۸۵ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۶,۰/۱۷۸۵)
		۹۵	(۸/۹۶۶,۰/۰۵۳۹)	(۲۸/۷۰۲,۱/۴۹۰ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۵,۰/۱۷۸۴)
		۱۳۰	(۸/۹۹۶,۰/۰۵۴۲)	(۲۸/۰۹۱,۱/۵۰۷ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۸,۰/۱۷۸۴)
۳۳	۱۳	۵۰	(۸/۲۰۸,۰/۰۵۱۹)	(۱۴/۱۶۵,۹/۷۸۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۴,۰/۱۷۸۶)
		۶۵	(۸/۳۰۴,۰/۰۵۲۷)	(۱۳/۵۰۳,۸/۶۳۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۸۳,۰/۱۷۹۲)
		۹۵	(۸/۲۶۶,۰/۰۵۲۵)	(۱۲/۸۳۹,۸/۳۸۳ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۹,۰/۱۷۹۵)
		۱۳۰	(۸/۲۷۹,۰/۰۵۲۵)	(۱۳/۱۶۳,۸/۶۲۵ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۸,۰/۱۷۷۹)
	۱۹	۵۰	(۸/۲۸۵,۰/۰۵۲۳)	(۱۵/۱۷۱,۱/۰۱۱ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۵۷,۰/۱۷۸۰)
		۶۵	(۸/۲۴۵,۰/۰۵۲۴)	(۱۳/۴۹۹,۸/۷۰۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۱,۰/۱۷۸۳)
		۹۵	(۸/۳۱۶,۰/۰۵۲۷)	(۱۳/۳۵۴,۸/۶۷۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۶,۰/۱۷۸۷)
		۱۳۰	(۸/۳۶۲,۰/۰۵۲۶)	(۱۴/۶۶۱,۸/۶۸۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۹,۰/۱۷۷۵)
	۲۷	۵۰	(۸/۳۴۰,۰/۰۵۲۵)	(۱۴/۸۵۶,۹/۲۳۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۶,۰/۱۷۹۵)
		۶۵	(۸/۲۷۹,۰/۰۵۲۶)	(۱۳/۲۸۷,۸/۳۶۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۹,۰/۱۷۹۵)
		۹۵	(۸/۳۰۴,۰/۰۵۲۵)	(۱۴/۲۸۶,۸/۵۹۰ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۰,۰/۱۷۸۷)
		۱۳۰	(۸/۳۴۵,۰/۰۵۲۷)	(۱۳/۸۳۱,۸/۸۷۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۹,۰/۱۷۷۷)
۴۱	۱۹	۵۰	(۸/۱۶۶,۰/۰۵۱۸)	(۱۴/۳۱,۹/۴۰۵ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۱,۰/۱۷۹۳)
		۶۵	(۷/۹۹۹,۰/۰۵۱۷)	(۹/۸۵۱,۶/۸۳۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۳,۰/۱۷۸۴)
		۹۵	(۸/۰۱۸,۰/۰۵۱۹)	(۹/۵۲۲,۶/۲۷۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۰,۰/۱۷۹۳)
		۱۳۰	(۸/۰۲۸,۰/۰۵۲۰)	(۹/۳۹۶,۶/۳۷۵ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۷,۰/۱۷۸۸)
	۲۵	۵۰	(۸/۲۴۱,۰/۰۵۲۲)	(۱۵/۰۹۷,۸/۹۲۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۸,۰/۱۸۰۴)
		۶۵	(۷/۹۶۶,۰/۰۵۱۶)	(۹/۷۴۲,۶/۸۸۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۳,۰/۱۷۷۳)
		۹۵	(۸/۰۴۴,۰/۰۵۲۱)	(۹/۴۷۷,۶/۴۴۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۹,۰/۱۷۸۶)
		۱۳۰	(۸/۰۷۶,۰/۰۵۲۱)	(۹/۸۵۸,۶/۲۳۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۴,۰/۱۷۹۹)
	۳۷	۵۰	(۸/۱۶۴,۰/۰۵۲۳)	(۱۱/۰۰۵,۷/۱۷۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۹,۰/۱۷۸۹)
		۶۵	(۷/۹۹۵,۰/۰۵۱۸)	(۹/۴۴۲,۶/۳۶۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۵,۰/۱۸۰۳)
		۹۵	(۸/۰۰۶,۰/۰۵۱۹)	(۹/۵۳۴,۶/۲۴۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۰,۰/۱۷۹۱)
		۱۳۰	(۸/۰۴۱,۰/۰۵۱۹)	(۹/۷۶۳,۶/۵۵۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۴,۰/۱۷۷۲)

جدول ۲: برآورد، میانگین توان دوم خطا، احتمال پوشش برای (α ، λ) با $T_۲ =$ **۹۵**

r	k	$T_۱$	$(\hat{\alpha},\hat{\lambda})$	MSE	احتمال پوشش
۱۹	۱۱	۴	(۹/۵۹۹,۰/۰۵۵۴)	(۴۸/۵۷۷,۲/۱۳۶ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۹,۰/۱۷۶۷)
		۳۰	(۹/۶۰۹,۰/۰۵۵۳)	(۴۵/۶۵۸,۲/۰۸۷ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۸,۰/۱۷۶۹)
		۷۵	(۷/۹۲۴,۰/۰۵۱۶)	(۸/۳۸۸,۵/۷۵۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۱,۰/۱۷۸۹)
		۹۰	(۷/۸۱۵,۰/۰۵۱۴)	(۷/۵۴۴,۵/۲۶۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۳,۰/۱۷۹۱)
	۱۷	۴	(۹/۶۳۲,۰/۰۵۵۴)	(۵۰/۷۰۴,۲/۱۴۲ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۶,۰/۱۷۶۵)
		۳۰	(۹/۵۴۹,۰/۰۵۵۳)	(۴۴/۳۰۱,۲/۰۶۷ $\times$ ۱۰$^{-۴}$)	(۰/۱۸۸۶,۰/۱۷۷۱)
		۷۵	(۷/۸۶۴,۰/۰۵۱۴)	(۸/۲۱۳,۵/۷۶۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۶,۰/۱۷۹۱)
		۹۰	(۷/۸۸۵,۰/۰۵۱۵)	(۷/۸۲۸,۵/۳۷۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۳,۰/۱۷۹۱)
۳۳	۱۱	۴	(۸/۳۱۵,۰/۰۵۲۷)	(۱۳/۳۵۴,۸/۶۷۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۵,۰/۱۷۸۷)
		۳۰	(۸/۳۶۱,۰/۰۵۲۶)	(۱۴/۶۶۱,۸/۶۸۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۸,۰/۱۷۷۵)
		۷۵	(۷/۹۱۵,۰/۰۵۱۶)	(۸/۳۲۱,۵/۷۸۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۴,۰/۱۷۹۲)
		۹۰	(۷/۸۴۱,۰/۰۵۱۵)	(۷/۵۵۵,۵/۲۴۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۶,۰/۱۷۸۹)
	۱۹	۴	(۸/۳۰۴,۰/۰۵۲۶)	(۱۴/۲۸۶,۸/۵۹۰ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۰,۰/۱۷۸۷)
		۳۰	(۸/۳۴۰,۰/۰۵۲۶)	(۱۳/۷۰۵,۸/۸۵۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۰,۰/۱۷۷۶)
		۷۵	(۷/۸۶۴,۰/۰۵۱۴)	(۸/۱۹۹,۵/۶۵۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۵,۰/۱۷۹۴)
		۹۰	(۷/۸۴۸,۰/۰۵۱۵)	(۷/۶۶۵,۵/۲۸۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۶,۰/۱۷۹۹)
	۲۷	۴	(۸/۲۵۹,۰/۰۵۲۵)	(۱۲/۷۰۰,۸/۳۸۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۴,۰/۱۷۸۸)
		۳۰	(۸/۳۰۰,۰/۰۵۲۶)	(۱۳/۳۸۱,۸/۶۵۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۷۸,۰/۱۷۸۸)
		۷۵	(۷/۸۶۳,۰/۰۵۱۵)	(۷/۸۱۱,۵/۵۹۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۵,۰/۱۷۹۷)
		۹۰	(۷/۸۴۸,۰/۰۵۱۵)	(۷/۶۵۶,۵/۳۹۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۳۸,۰/۱۷۸۱)
۴۷	۱۱	۴	(۷/۹۴۴,۰/۰۵۱۸)	(۸/۱۱۹,۵/۵۹۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۷,۰/۱۷۸۸)
		۳۰	(۷/۸۱۳,۰/۰۵۱۴)	(۷/۶۳۶,۵/۳۵۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۱,۰/۱۷۹۲)
		۷۵	(۷/۸۸۷,۰/۰۵۱۷)	(۷/۵۲۱,۵/۳۸۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۳,۰/۱۷۹۳)
		۹۰	(۷/۸۵۶,۰/۰۵۱۵)	(۷/۸۱۷,۵/۱۹۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۴,۰/۱۸۰۳)
	۱۷	۴	(۷/۹۱۳,۰/۰۵۱۷)	(۷/۷۵۰,۵/۴۰۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۱,۰/۱۷۹۸)
		۳۰	(۷/۸۹۷,۰/۰۵۱۷)	(۷/۹۴۵,۵/۵۹۱ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۹,۰/۱۷۷۹)
		۷۵	(۷/۸۸۳,۰/۰۵۱۶)	(۷/۷۵۸,۵/۳۰۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۷,۰/۱۷۹۸)
		۹۰	(۷/۸۴۰,۰/۰۵۱۵)	(۷/۵۵۰,۵/۲۴۰ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۵,۰/۱۷۹۴)
	۲۹	۴	(۷/۸۹۴,۰/۰۵۱۶)	(۸/۲۱۰,۵/۴۸۵ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۸,۰/۱۷۹۱)
		۳۰	(۷/۹۰۲,۰/۰۵۱۷)	(۷/۸۰۶,۵/۴۹۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۶۱,۰/۱۷۸۷)
		۷۵	(۷/۹۱۰,۰/۰۵۱۶)	(۷/۹۷۵,۵/۳۲۴ $\times$ ۱۰$^{-۵}$	(۰/۱۸۵۱,۰/۱۷۸۹)
		۹۰	(۷/۸۵۴,۰/۰۵۱۵)	(۷/۲۵۹,۵/۲۳۰ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۱,۰/۱۷۹۱)
	۴۳	۴	(۷/۹۳۷,۰/۰۵۱۷)	(۸/۴۴۳,۵/۵۸۳ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۴,۰/۱۷۷۸)
		۳۰	(۷/۸۷۱,۰/۰۵۱۵)	(۷/۸۴۰,۵/۳۰۲ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۴۸,۰/۱۷۹۵)
		۷۵	(۷/۸۹۲,۰/۰۵۱۶)	(۷/۸۹۲,۵/۴۲۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۲,۰/۱۷۹۲)
		۹۰	(۷/۸۷۲,۰/۰۵۱۶)	(۷/۴۳۴,۵/۲۱۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$)	(۰/۱۸۵۰,۰/۱۷۹۴)

گزارش شده است. گوپتا و کوندو (۲۰۰۱) نشان دادند این داده‌ها از توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری پیروی می‌کنند. برای این داده‌ها شش طرح مربوط به سانسور هیبرید واحد شده تحت شرایط زیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

- طرح ۱: $k=۱۴$، $r=۱۶$، $T_۱=۹۰$، $T_۲=۱۰۵$
- طرح ۲: $k=۱۴$، $r=۱۷$، $T_۱=۹۰$، $T_۲=۱۰۵$
- طرح ۳: $k=۱۴$، $r=۱۸$، $T_۱=۷۰$، $T_۲=۹۵$
- طرح ۴: $k=۱۲$، $r=۱۵$، $T_۱=۶۰$، $T_۲=۹۵$
- طرح ۵: $k=۱۴$، $r=۱۹$، $T_۱=۶۰$، $T_۲=۱۰۰$
- طرح ۶: $k=۱۷$، $r=۲۱$، $T_۱=۷۰$، $T_۲=۸۵$

در هر شش طرح، با استفاده از روش تکرار عددی نیوتن-رافسون و ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات، برآورد ML و بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای پارامترها محاسبه شده و همچنین برآورد بیزی را تحت تابع زیان توان دوم خطا به روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و با تکرار $N=۱۰,۰۰۰$ و بازه باور(HPD) را در دو حالت: الف) $a_۱=b_۱=a_۲=b_۲=۰$ (پیشین ناآگاهی‌بخش) و ب) $a_۱=۴/۵$، $b_۱=۱$، $a_۲=۰.۰۳$، $b_۲=۱$ (پیشین آگاهی‌بخش)، به دست آورده شده است. سپس برآورد MSE برآوردگرها و طول فواصل اطمینان با هم مقایسه شده‌اند. برای این داده‌ها برآورد ML، α و λ در یک نمونه کامل بدون سانسور به ترتیب برابر ۵/۲۷۸ و ۰/۰۳۲۳ حاصل شده‌اند. همان طور که در جدول‌های ۳ و ۴ ملاحظه می‌شود، قابل ذکر است که برآورد بیز در حالت ب (پیشین آگاهی‌بخش) در اکثر طرح‌ها به مقدار برآورد شده در نمونه کامل نزدیکتر می‌باشد. همچنین برآورد بیزی در مقایسه با برآورد ML طول بازه اطمینان کوتاهتری داشته و اریبی در بیشتر حالات کمتر می‌باشد، لذا نسبت به برآورد ML برآوردگر بهتری می‌باشد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، استنباط بسامدی و بیزی برای پارامترهای توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری تحت سانسور هیبرید واحد شده مورد بررسی قرار گرفت که به دلیل

جدول ۳: برآوردهای نقطه‌ای (فاصله‌ای) پارامتر α

طرح	برآورد ML	برآورد بیزی	
		پیشین ناآگاهی‌بخش	پیشین آگاهی بخش
۱	۴/۸۴۵ (۱/۳۷۶,۸/۳۱۳)	۴/۰۸۳ (۲/۳۲۴,۶/۱۹۳)	۴/۵۶۶ (۱/۹۹۲,۶/۸۲۰)
۲	۵/۰۴۱ (۱/۴۸۷,۸/۵۹۷)	۴/۵۳۸ (۲/۲۶۳,۷/۵۱۰)	۴/۵۸۴ (۲/۷۶۲,۶/۹۵۶)
۳	۴/۸۹۴ (۱/۴۶۶,۸/۳۲۱)	۴/۵۸۵ (۲/۲۷۶,۷/۶۱۲)	۵/۰۳۱ (۲/۷۸۱,۸/۲۳۸)
۴	۷/۱۳۴ (۱/۴۰۶,۱۲/۸۶۱)	۵/۴۶۱ (۲/۸۵۷,۸/۱۱۴)	۵/۰۸۶ (۳/۰۹۵,۷/۶۸۱)
۵	۴/۹۸۵ (۱/۵۵۷,۸/۴۱۳)	۴/۴۴۷ (۲/۷۶۸,۶/۰۸۹)	۴/۵۴۳ (۲/۸۳۵,۷/۵۶۶)
۶	۵/۰۴۲ (۱/۴۸۷,۸/۵۹۷)	۴/۱۲۶ (۲/۵۹۱,۷/۱۹۳۷)	۵/۰۰۳ (۲/۸۲۲,۸/۲۲۱)

جدول ۴: برآوردهای نقطه‌ای (فاصله‌ای) پارامتر λ

طرح	برآورد ML	برآورد بیزی	
		پیشین ناآگاهی‌بخش	پیشین آگاهی‌بخش
۱	۰/۰۳۰۵ (۰/۰۱۸۲,۰/۰۴۲۹)	۰/۰۲۸۱ (۰/۰۲۰۴,۰/۰۳۸۳)	۰/۰۲۹۳ (۰/۰۲۱۶,۰/۰۴۱۸)
۲	۰/۰۳۱۴ (۰/۰۱۹۲,۰/۰۴۳۵)	۰/۰۲۹۵ (۰/۰۲۱۶,۰/۰۴۰۷)	۰/۰۲۹۲ (۰/۰۲۲۱,۰/۰۴۰۶)
۳	۰/۰۳۰۷ (۰/۰۱۸۸,۰/۰۴۲۷)	۰/۰۲۹۵ (۰/۰۲۰۹,۰/۰۴۲۱)	۰/۰۳۰۲ (۰/۰۲۲۴,۰/۰۴۲۷)
۴	۰/۰۳۹۳ (۰/۰۲۳۶,۰/۰۵۴۸)	۰/۰۳۳۳ (۰/۰۲۵۷,۰/۰۴۳۱)	۰/۰۳۳۰ (۰/۰۲۵۶,۰/۰۴۷۳)
۵	۰/۰۳۱۱ (۰/۰۱۹۴,۰/۰۴۲۸)	۰/۰۲۸۵ (۰/۰۲۱۲,۰/۰۳۳۰)	۰/۰۲۸۳ (۰/۰۲۱۸,۰/۰۳۷۰)
۶	۰/۰۳۱۳ (۰/۰۱۹۲,۰/۰۴۳۵)	۰/۰۲۷۴ (۰/۰۲۱۰,۰/۰۳۵۹)	۰/۰۳۰۸ (۰/۰۲۲۵,۰/۰۴۴۶)

امکان وجود شش حالت برای توقف آزمایش، این طرح نسبت به طرح های هیبرید تعمیم‌یافته از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار می‌باشد. همچنین بر اساس مطالعه شبیه‌سازی مشاهده می‌شود، هر چه سانسور کمتری رخ دهد برآوردها به برآورد ماکسیمم درستنمایی در نمونه کامل نزدیکتر شده و برآورد بیزی آگاهی‌بخش در مقایسه با برآوردگر ماکسیمم درستنمایی از نظر طول بازه اطمینان برآوردگر بهتری می‌باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده‌ی داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده در محتوای مقاله شده‌است، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند. همچنین این پژوهش تحت حمایت مالی دانشگاه فردوسی مشهد قرار گرفته است، $(No.\ MS۸۹۱۵۲HAB)$.

مراجع

Balakrishnan, N., Rasouli, A. and Sanjari Farsipour, N., (2008), Exact Likelihood Inference Based on an Unified Hybrid Censored Sample from the Exponential Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 475-788.

Chandrasekar, B., Childs, A. and Balakrishnan, N., (2004), Exact Likelihood Inference for the Exponential Distribution under Generalized Type-I and Type-II Hybrid Censoring, *Naval Research Logistics*, **51**, 994-1004.

Childs, A., Chandrasekhar, B., Balakrishnan, N., Kundu, D., (2003), Exact Likelihood Inference Based on Type-I and Type-II Hybrid Censored Samples from the Esponential Distribution, *Annals of the Insti-*

tute of Statistical Mathematics, **55**, 319-330.

Epstein, B., (1954), Truncated Life-Tests in the Exponential Case, *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 555-564.

Gupta, R.D. and Kundu, D., (1999), Generalized Exponential Distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.

Gupta, R. D. and Kundu, D., (2001), Exponentiated Exponential Family; An Alternative to Gamma and Weibull, *Biometrical Journal*, **33**, 117-130.

Kundu, D. and Gupta, R. D., (2008), Generalized Exponential Distribution; Bayesian Inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 1873-1883.

Kundu, D., Pradhan, B., (2009), Estimating the Parameters of the Generalized Exponential Distribution in Presence of Hybrid Censoring, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **38**, 2030-2041.

Lawless, J. F., (1982), Statistical Models and Methods for Lifetime Bata, John Wiley and Sons, New York.

Louis, T. A., (1982), Finding the Observed Information Matrix Using the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser B, **44**, 226-233.

Ng, T., Chan, C. S. and Balakrishnan, N., (2002), Estimation of Parameters from Progressively Censored Data using EM Algorithm, *Computational Statistics and Data Analysis*, **39**, 371-386.

Raqab, M. Z. and Madi, M. T. (2005), Bayesian Inference for the Generalized Exponential Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulaion*, **75**, 841-852.