**مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵**
**جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۲۱-۴۴**
DOI: 10.7508/jss.2016.01.002

# منظرهایی از آزمون فرضیه میانگین‌های مرتب شده در توزیع‌های نرمال یک و چند متغیره

**ابوذر بازیاری**
**گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر**

**تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۹/۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۷/۴**

**چکیده** : آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال یک متغیره در مقابل فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده با واریانس‌های مجهول و برابر در نظر گرفته شده است. یک روش کاملاً جدید برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت در سطح معنی‌داری $\alpha$ بر حسب توزیع $t$ چند متغیره برای این مساله آزمون ارائه شده است. با توجه به اینکه تعیین توزیع آماره آزمون تحت فرضیه صفر برای بیش از دو جامعه ساده نیست، تابع توان آزمون محاسبه و سپس مقادیر بحرانی آن برای سطوح معنی‌داری مختلف به‌دست آمده‌اند. این روش آزمون برای مثال‌های با داده‌های واقعی به‌کار برده شده است. همچنین آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال چند متغیره در مقابل فرضیه مرتب شده دو طرفه بردارهای میانگین در نظر گرفته شده است. با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو مقادیر توان آزمون کلاسیک برای دو جامعه نرمال دو متغیره و سه متغیره در سطوح معنی‌داری مختلف محاسبه و با آزمون دیگری مقایسه شده است.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab_bazyari@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲B۳۰، ۶۲E۰۳

**واژه‌های کلیدی** : آزمون فرضیه میانگین‌های مرتب شده، پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت، رگرسیون همنوای چندمتغیره، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

## ۱ مقدمه

آزمون‌های آماری در توزیع‌های نرمال یک متغیره و چند متغیره معمولاً با روش نسبت درستنمایی انجام می‌گیرد. در حالتی که پارامترهای تحت آزمون دارای محدودیت نباشند، روش‌های کلاسیک به‌سادگی آزمون‌های مناسب را ارائه می‌دهند. بسیاری از این آزمون‌ها خاصیت بهینگی مانند پرتوان بودن و نااریبی را نیز دارند (آندرسون، ۱۹۸۴ و جانسون و ویچرن، ۲۰۰۷). اما در عمل ممکن است با آزمون‌هایی مواجه شویم که پارامترهای تحت آزمون دارای نوعی محدودیت باشند. این محدودیت می‌تواند در فرضیه صفر یا در فرضیه مقابل باشد.

فرض کنید $X_1, \dots, X_k$ متغیرهای تصادفی و مستقل دارای توزیع نرمال یک متغیره به‌ترتیب با میانگین‌های مجهول $\mu_1, \dots, \mu_k$ و واریانس مشترک و مجهول $\sigma^2$ باشند. در این‌صورت

$$X = (X_1, \dots, X_k)' \sim N_k(\mu, \sigma^2 I_k),$$

که در آن $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ و $I_k$ یک ماتریس همانی متقارن و قطری $k \times k$ بعدی است. فرض کنید $x'_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n_1})'$، $x'_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n_2})'$، ... و $x'_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn_k})'$ به‌ترتیب نمونه‌هایی به اندازه‌های $n_1$ تا $n_k$ باشند. در حالت کلی فرض کنید $x'_i = (x_{k1}, \dots, x_{in_i})'$ نمونه‌ای به اندازه $n_i$ از $i$ امین جمعیت بوده و هر متغیر تصادفی $X_i$ دارای توزیع نرمال $N(\mu_i, \sigma^2)$ باشد.

آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال یک متغیره در مقابل آزمون فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده به‌صورت

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k, \qquad (1)$$

(با حداقل یک نامساوی اکید در فرضیه $H_1$) در نظر گرفته شده است. برای آزمون فرضیه (۱) پرتوان‌ترین آزمون در سطح معنی‌داری $\alpha$ به‌دست آمده، توان

آزمون محاسبه و سپس مقادیر بحرانی آماره آزمون در سطوح معنی‌داری مختلف محاسبه شده است. همچنین در ادامه مقاله، فرض شده که $\mathbf{X}_{i1},\dots,\mathbf{X}_{in_i}$ بردارهای تصادفی از جامعه نرمال $p$–متغیره $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_i,\Sigma_i)$، $i=1,\dots,k$، باشند. آزمون فرضیه $\boldsymbol{H}''_0:\boldsymbol{\mu}_1=\dots=\boldsymbol{\mu}_k$ در مقابل فرضیه مرتب شده دو طرفه

$$H''_1:\mu_1\geq\dots\geq\mu_k \text{ یا } \mu_1\leq\dots\leq\mu_k$$

(با حداقل یک نامساوی اکید در فرضیه $H''_1$) در نظر گرفته شده است. نامساوی $\boldsymbol{\mu}_i\leq\boldsymbol{\mu}_j$ به این معنی است که تمام مقادیر بردار $\boldsymbol{\mu}_j-\boldsymbol{\mu}_i$ غیر منفی‌اند. همچنین محدودیت تحمیل شده در فرضیه $H''_1$ بیانگر این است که تمام $p$ بعد بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_i$ با افزایش مقدار $i$ به‌طور همزمان افزایش یا کاهش می‌یابند. چنین آزمون‌هایی در حوزه‌های مختلف علمی به‌کار می‌روند. مقادیر توان آزمون با روش کلاسیک برای دو و سه جامعه نرمال دو متغیره و سه متغیره محاسبه و با آزمون بازیاری و پسرین (۲۰۱۳)، مقایسه شده است. همچنین مقادیر توان آزمون تحت فرضیه $H''_1$ بر حسب توزیع کی‌دو غیر مرکزی با روش شبیه‌سازی مونت کارلو در دو سطح معنی‌داری به‌دست آمده‌اند.

بارتولومو ($۱۹۵۹a$) اولین کسی بود که به بحث و بررسی در مورد استنباط آماری پارامترهای جامعه تحت محدودیت‌های مرتب شده پرداخت. بارتولومو ($۱۹۵۹a$) آزمون تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال یک متغیره را در مقابل فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده[۱] در نظر گرفت. وی برای این فرضیه‌ها آماره آزمون نسبت درستنمایی، $\bar{\chi}^2_k$، را با فرض معلوم بودن واریانس‌ها به‌دست آورد. همچنین آماره آزمون نسبت درستنمایی، $\bar{F}$، را فرض مجهول و نابرابر بودن واریانس‌ها محاسبه کرد. در حقیقت روش مورد استفاده برای برآورد پارامترهای مرتب شده، الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس[۲] بود بارتولومو ($۱۹۵۹b$) این مساله آزمون را برای حالت دو طرفه مورد بررسی قرار داد، آماره آزمونی را پیشنهاد و تقریبی برای توزیع آماره در حالت $k=2$ به‌دست آورد. بارلو و همکاران (۱۹۷۲)

---
۱ Ordered means

۲ Pool adjacent violators algorithm

به بحث و بررسی بیشتر در مورد آزمون فرضیه با قیدهای مرتب شده پرداختند و آماره آزمون و توزیع تحت فرضیه صفر آن را برای چندین حالت مختلف از آزمون فرضیه‌های مرتب شده محاسبه کردند.

رابرتسون و ویگمن (۱۹۷۸) آزمون فرضیه پارامترهای مرتب شده یک‌طرفه میانگین $k$ جامعه نرمال یک متغیره در مقابل این فرضیه که هیچ محدودیتی روی پارامترها نباشد، را مورد بررسی قرار داده، آماره آزمون را با روش نسبت درستنمایی محاسبه و سپس توان آن را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به‌دست آوردند. همچنین آنها این فرضیه را برای خانواده توزیع‌های نمایی یک متغیره مورد مطالعه قرار دادند. نتایج بیشتر در مورد آزمون فرضیه‌های مرتب توسط رابرتسون و همکاران (۱۹۸۸) ارائه شده است. شی و جیانگ (۱۹۹۸) با در نظر گرفتن آزمون فرضیه مرتب شده روی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال یک متغیره با شرط مجهول بودن واریانس‌ها، به مطالعه و بررسی ویژگی‌های برآوردهای ماکسیمم پارامتر میانگین پرداختند. سامپسون و همکاران (۲۰۰۳) به مقدار اریبی برآوردگرها تحت فرضیه‌های مرتب شده توجه کردند و فرمول‌هایی را برای مقدار اریبی این برآوردها در دو جامعه نرمال با واریانس‌های برابر به‌دست آوردند. سیل‌واپول و سن (۲۰۰۵) به تحقیقات گسترده در زمینه آزمون فرضیه‌های مرتب پرداختند و با مثال‌های عملی توانستند کاربرد این نوع آزمون‌ها را به‌خوبی معرفی کنند.

در گسترش کار در چند متغیره، کودو (۱۹۶۳) یک جامعه نرمال $p$–متغیره را با بردار میانگین مجهول $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_p)'$ و ماتریس واریانس کواریانس معلوم $\Sigma$ در نظر گرفت و آماره آزمون بر اساس روش نسبت درستنمایی برای آزمون فرضیه

$$H_a : \theta_i = 0 \quad i = 1,\dots,p$$

در مقابل فرضیه

$$H_b : \theta_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,p, \max_{1\leq i\leq p} \theta_i > 0$$

به‌دست آورد. پرلمن (۱۹۶۹) این مساله آزمون را با ماتریس واریانس کواریانس کاملاً مجهول بر اساس روش نسبت درستنمایی مورد بررسی قرار داد و توزیع دقیق

آماره را تحت فرضیه صفر محاسبه کرد. تانگ و همکاران (۱۹۸۹) آماره آزمون جدیدی را برای مساله کودو (۱۹۶۳) با ماتریس واریانس کواریانس معلوم پیشنهاد و توزیع آن را تحت فرضیه صفر محاسبه کردند.

توسعه کار بارتولومو (۱۹۵۹a) در چند متغیره توسط نویسندگان دیگر انجام شده است. اولین بار ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) با فرض معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس، ضمن به‌دست آوردن آماره آزمون فرضیه تساوی بردارهای میانگین در مقابل بردار میانگین‌های مرتب شده در توزیع نرمال چند متغیره با روش نسبت درستنمایی، الگوریتمی را برای محاسبه برآوردهای رگرسیون همنوای دو متغیره پیشنهاد کردند. کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) برای این آزمون توزیع آماره آزمون را تحت فرضیه صفر برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس معلوم و قطری باشند، محاسبه کردند. نوماکوچی و شی (۱۹۸۸) برای چنین فرضیه‌هایی آزمون جدیدی را ارائه داد تا محاسبه توزیع تحت فرضیه صفر آن آسان‌تر باشد. ساسابوچی و همکاران (۱۹۹۸) با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو نشان دادند که در حالت دو متغیره توان آزمون به‌دست آمده توسط ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) از توان آزمون کلاسیک $\chi^2$ بهتر است. کولاتونگا و همکاران (۱۹۹۰) برای حالت غیر قطری بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس، آزمون‌هایی را پیشنهاد و با روش شبیه‌سازی آنها را مورد مطالعه قرار دادند. آندرسون (۱۹۸۴) آزمون تساوی $k$ میانگین جامعه نرمال چندمتغیره را در مقابل این فرضیه که هیچ محدودیتی روی میانگین‌ها نباشد، مورد بررسی قرار داد. ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳) با فرض مجهول اما برابر بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس، آماره آزمونی را ارائه و توزیع تحت فرضیه صفر آماره را همراه با مقادیر بحرانی آن محاسبه کردند. ساسابوچی (۲۰۰۷) برای این فرضیه‌ها دنباله‌ای از آزمون‌ها را ارائه داد که از آزمون ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳) پرتوان‌تر هستند. لازم به ذکر است که با وجود یافتن آزمون‌های پرتوان توسط ساسابوچی (۲۰۰۷) هنوز پرسش در مورد پرتوان‌ترین آنها باقی است.

بازیاری و همکاران (۱۳۹۰) آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال چندمتغیره در مقابل فرضیه میانگین‌های مرتب شده برای حالاتی که ماتریس‌های

واریانس کوواریانس معلوم و مجهول باشند را در نظر گرفتند. برای حالت معلوم و قطری بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس آماره آزمون را محاسبه و توزیع تحت فرضیه صفر آن را به‌دست آوردند. برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس مجهول و برابر باشند، در ادامه کار ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳) با استفاده از تصاویر متعامد بردارها روی مخروط‌های محدب دنباله‌ای از آزمون‌ها را جهت یافتن مقادیر احتمال ارائه دادند.

بازیاری (۲۰۱۲) ضمن در نظر گرفتن آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال چندمتغیره در مقابل فرضیه میانگین‌های مرتب شده برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس مجهول و نابرابر باشند، در ادامه کار ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) و کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) آماره آزمون یکتایی را ارائه و نشان داد که تحت شرایطی معین برآوردگر عامل مقیاسی وجود ندارد. بازیاری و چینی‌پرداز (۲۰۱۲) آزمون فرضیه مرتب شده بردارهای میانگین جامعه‌های نرمال چند متغیره در مقابل این فرضیه که محدودیتی روی بردارهای میانگین نباشد، برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول اما برابر باشند مورد مطالعه قرار دادند. کار آنها در حقیقت بسط کار رابرتسون و ویگمن (۱۹۷۸) می‌باشد. با روش نسبت درستنمایی آماره آزمون را بر اساس تصاویر متعامد روی مخروط‌های محدب محاسبه، توزیع تحت فرضیه صفر آماره را تعیین و نیز با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو مقادیر بحرانی آن را برآورد کردند. بازیاری و چینی‌پرداز (۲۰۱۳) ضمن در نظر گرفتن این آزمون فرضیه با توجه به مشکل بودن محاسبه دقیق مقادیر احتمال برای آماره آزمون، توانستند کران بالا برای مقادیر احتمال به‌دست آورند.

بازیاری و پسرین (۲۰۱۳) آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال چندمتغیره در مقابل فرضیه دو طرفه میانگین‌های مرتب شده برای دو حالت معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کوواریانس و نیز حالتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس کاملاً مجهول اما برابر باشند را در نظر گرفتند. کار آنها بسط کار بارتولومو (۱۹۵۹$b$) و ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) است. برای وقتی که ماتریس‌های واریانس کوواریانس معلوم باشند، آماره آزمون را محاسبه و توزیع تحت فرضیه صفر آن را همراه با مقادیر بحرانی برای حالت قطری بودن ماتریس‌های

واریانس کواریانس به‌دست آوردند. توان آزمون را با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو تعیین کردند. همچنین آماره آزمون را برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس کاملاً مجهول اما برابر باشند، ارائه دادند. در ادامه کارشان آزمون فرضیه مرتب شده دو طرفه بردارهای میانگین را در حالت ناپارامتری با روش آزمون‌های جایگشتی[۳] مورد بررسی قرار دادند و با یک مثال واقعی کاربرد این آزمون را در حالت ناپارامتری نشان دادند (برای جزئیات بیشتر در مورد آزمون‌های جایگشتی به پسرین و سالماسو، ۲۰۱۰ رجوع شود).

در بخش ۲ آزمون فرضیه داده شده در رابطه (۱) در نظر گرفته شده است. با به‌کار بردن یک روش کاملاً جدید، آزمون بهینه (پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت) در سطح معنی‌داری $\alpha$ ارائه شده است. همچنین تابع توان آزمون محاسبه و سپس مقادیر بحرانی آماره در سطوح معنی‌داری مختلف به‌دست آمده‌اند. در بخش ۳ با مثال‌های واقعی کاربرد این آزمون به‌خوبی نشان داده شده و روش جدید روی این مثال‌ها به‌کار برده می‌شود. در بخش ۴ آزمون فرضیه تساوی بردارهای میانگین در مقابل آزمون فرضیه مرتب شده دو طرفه بردارهای میانگین برای دو توزیع نرمال چند متغیره در نظر گرفته و با روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقادیر توان آزمون بازیاری و پسرین (۲۰۱۳)، با آزمون کلاسیک مقایسه شده است. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

## ۲ آزمون فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده

فرض کنید

$$m_i = \left(\frac{n_i n_{i+۱}}{n_i + n_{i+۱}}\right)^{\frac{۱}{۲}}, \quad \eta_i = m_i(\mu_{i+۱} - \mu_i), \ ۱ \leq i \leq k - ۱$$

در این‌صورت تساوی $\mu_۱ = \ldots = \mu_k$ برقرار است اگر و فقط اگر برای هر $i$، $۱ \leq i \leq k - ۱$، $\eta_i = ۰$ باشد. همچنین نامساوی $\mu_۱ \leq \ldots \leq \mu_k$ با حداقل یک نامساوی اکید برقرار است اگر و فقط اگر $\eta_i \geq ۰$ با حداقل یک نامساوی اکید برقرار باشد.

---
۳ Permutation tests

بنابراین مساله آزمون (۱) به آزمون فرضیه $H'_0 : \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ در مقابل فرضیه یک‌طرفه $H'_1 : \boldsymbol{\eta} \geq \mathbf{0}$، به‌طوری‌که حداقل یکی از عناصر بردار $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{k-1})'$ در فرضیه $H'_1$ صفر نباشد، تبدیل خواهد شد. همچنین به‌راحتی دیده می‌شود که بردار تصادفی

$$Y = (m_1(\bar{X}_2 - \bar{X}_1), \cdots, m_{k-1}(\bar{X}_k - \bar{X}_{k-1}))',$$

دارای توزیع نرمال $N_{k-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma}^2\Sigma)$ و نیز $\Sigma$ ماتریسی با عناصر

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\sqrt{\frac{n_i n_{i+1} n_{i+2}}{(n_i + n_{i+1})(n_{i+1} n_{i+2})}} & |j - i| = 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

است. اگر $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$، آنگاه انحراف استاندارد نمونه‌ای آمیخته برای $k$ جامعه عبارت است از:

$$s = (\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

لازم به ذکر است که انحراف استاندارد نمونه‌ای $s = (\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2)^{\frac{1}{2}}$ است، که در آن $s_i$ انحراف استاندارد نمونه‌ای برای $i$ امین جامعه می‌باشد. اگر فرض شود $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_{k-1})' = \frac{\mathbf{Y}}{S}$ آنگاه می‌توان آماره $\mathbf{T}$ را به‌صورت

$$T = [\frac{m_1(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)}{S}, \frac{m_2(\bar{X}_3 - \bar{X}_2)}{S}, \ldots, \frac{m_{k-1}(\bar{X}_k - \bar{X}_{k-1})}{S}]', \qquad (2)$$

نوشت که دارای توزیع $t$ چند متغیره نامرکزی با پارامترهای $\sigma^2\Sigma$، $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{k-1})$ و $N - k$ با تابع چگالی

$$f_T(t_1, \ldots, t_{k-1}) = c|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}[1 + \frac{1}{N-k}(t - \eta)'\Sigma^{-1}(t - \eta)]^{-\frac{N-1}{2}}$$

خواهد بود که در آن $c$ مقداری ثابت است. این تابع چگالی تحت فرضیه $H'_0$ دارای توزیع $t$ چند متغیره مرکزی با تابع چگالی زیر است.

$$f_T(t_1, \ldots, t_{k-1}) = c|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}[1 + \frac{1}{N-k} t'\Sigma^{-1} t]^{-\frac{N-1}{2}}$$

**تعریف ۱** : تابع $f: R^m \rightarrow R^n$ را به‌طور یکنوا کاهشی[۴] در $\mathbf{X} \in R^m$ گویند اگر برای هر $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R^m$ که $\mathbf{X} > \mathbf{Y}$، نامساوی $f(\mathbf{X}) > f(\mathbf{Y})$ برقرار باشد.

تابع $G = g(T) = \min(T_1, \ldots, T_{k-1}) = T_{(1)}$ طبق تعریف ۱، تابعی غیر کاهشی از آماره $\mathbf{T}$ بوده و توزیع آن مستقل از $S^2$ است. برای آزمون فرضیه $H_0$ در مقابل فرضیه $H_1$، برای هر مقدار ثابت $t_0$ تابع آزمون

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & \min_{1 \leq i \leq k-1} T_i > t_0 \\ & \\ 0 & \min_{1 \leq i \leq k-1} T_i < t_0 \end{cases}, \tag{۳}$$

پیشنهاد می‌شود، که در آن مقدار $t_0$ طوری انتخاب می‌شود که برای $\alpha \in (0, 1)$ همواره $E_{H_0}[\phi(\mathbf{T})] = \alpha$ باشد. در ادامه نشان داده می‌شود که آزمون رابطه (۳) پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت[۵] در سطح $\alpha$ برای آزمون فرضیه $H'_0$ در مقابل فرضیه $H'_1$ است.

### ۱.۲ پرتوان‌ترین آزمون برای فرضیه یک‌طرفه میانگین‌های مرتب شده

**قضیه ۱** : در بین تمام آزمون‌های ساخته شده بر اساس آماره $\mathbf{T}$ در رابطه (۲)، برای آزمون کردن فرضیه $H'_0$ در مقابل فرضیه $H'_1$، تابع آزمون (۳)، پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت در سطح $\alpha$ است.

**برهان** : برای اثبات طبق قضیه کارلین-روبین[۶] از خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا[۷] استفاده می‌شود. برای آزمون فرضیه $H'_0: \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ در مقابل فرضیه $H'_1: \boldsymbol{\eta} \geq \boldsymbol{\eta}_0$، که در آن $\boldsymbol{\eta}_0 > 0$، فرضیه صفر رد خواهد شد هرگاه نامساوی

$$\lambda(t) = \frac{f_{H'_0}(t)}{f_{H'_1}(t)} < c_\alpha$$

[۴] Monotonically decreasing

[۵] Uniformly most powerful test

[۶] Karlin-Rubin theorem

[۷] Monotone likelihood ratio

برقرار باشد. مقدار $c_\alpha$ طوری تعیین می‌شود که اندازه آزمون برابر با $\alpha$ باشد. از این رابطه خواهیم داشت:

$$[\lambda(t)]^{\frac{2}{N-1}} = 1 + \frac{\eta_0' \Sigma^{-1} \eta_0 - 2\eta_0 \Sigma^{-1} t}{t' \Sigma^{-1} t} \qquad (4)$$

کاملاً بدیهی است که تمام عناصر ماتریس $\Sigma^{-1}$ مثبت‌اند و از طرفی چون $\Sigma^{-1}$ ماتریس معین مثبت [8] بوده، بنابراین $\mathbf{t}'\Sigma^{-1}\mathbf{t} > \mathbf{0}$ پس طرف راست تساوی (۴) تابعی نزولی از $\mathbf{t}$ و در نتیجه تابعی نزولی از آماره $t_{(1)} = \min(t_1, \ldots, t_{k-1})$ است. بنابراین برای آزمون فرضیه $H_0'$ در مقابل فرضیه $H_1'$، آزمون $\phi$ پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت در سطح $\alpha$ در بین تمام آزمون‌های ساخته شده بر اساس آماره $\mathbf{T}$ است. بنابراین تابع چگالی $f_T(\mathbf{t})$ دارای خاصیت نسبت درستنمایی در آماره $T_{(1)}$ است. به عبارت دیگر برای آزمون کردن فرضیه $H_0'$ در مقابل فرضیه $H_1'$ در سطح معنی‌داری $\alpha$، فرضیه صفر رد می‌شود هرگاه برای هر مقدار ثابت $t_0$ نامساوی

$$\min_{1 \le i \le k-1} m_i \frac{(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i)}{s} > t_0 \qquad (5)$$

برقرار باشد. به‌ازای $k = 2$ برای دو جامعه با نمونه‌های تصادفی و مستقل آزمون فرضیه تساوی $H_a' : \mu_1 = \mu_2$ در مقابل فرضیه یک طرفه $H_b' : \mu_1 < \mu_2$ برقرار است. آماره (۵) دارای توزیع $t$ مرکزی دو نمونه‌ای است که پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت می‌باشد (لهمن و رومانو، ۲۰۰۵). اما اگر $k > 2$ باشد، تعیین توزیع آماره (۵) کار ساده‌ای نخواهد بود. بنابراین برای یافتن مقادیر بحرانی آماره آزمون، تابع توان این آزمون در قضیه زیر محاسبه شده است.

**قضیه ۲** : فرض کنید $\pi_\phi$ تابع توان رابطه (۵) باشد. اگر برای هر $i$، $i = 1, \ldots, k-1$ ، $L_i = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\sigma^2}$ باشد، آنگاه تابع توان عبارت است از:

$$\pi_\phi = \prod_{i=1}^{k-1} [1 - \Phi(\frac{t_0 \sqrt{\frac{Q}{N-k}} - m_i L_i}{\sqrt{\frac{m_i}{\sigma^2}}})],$$

که در آن $Q = \frac{(N-k)S^2}{\sigma^2}$ و دارای توزیع کای‌دو $\chi^2_{(N-k)}$ است.

[8] Positive definite matrix

**برهان** : فرض کنید برای هر $i$، $U_i = \frac{m_i(\bar{X}_{i+1}-\bar{X}_i)}{\sigma^2}$ و $L = (L_1, \ldots, L_{k-1})$ باشد. آنگاه طبق تعریف تابع توان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\pi_\phi &= P_L(\min_{1\leq i\leq k-1} m_i \frac{(\bar{X}_{i+1}-\bar{X}_i)}{s} > t_0) \\
&= P_L(m_1 \frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)}{s} > t_0, \ldots, m_{k-1}\frac{(\bar{X}_k-\bar{X}_{k-1})}{s} > t_0) \\
&= P_L(U_1 > t_0 \frac{s}{\sigma}, \ldots, U_{k-1} > t_0 \frac{s}{\sigma})
\end{aligned}$$

$$= P_L(U_1 - m_1 L_1 > t_0 \frac{s}{\sigma} - m_1 L_1, \ldots, U_{k-1} - m_{k-1}L_{k-1} > t_0 \frac{s}{\sigma} - m_{k-1}L_{k-1})$$

$$= P_L(Z_1 > \frac{t_0\sqrt{\frac{Q}{N-k}} - m_1 L_1}{\sqrt{\frac{m_1}{\sigma^2}}}) \ldots P_L(Z_{k-1} > \frac{t_0\sqrt{\frac{Q}{N-k}} - m_{k-1}L_{k-1}}{\sqrt{\frac{m_{k-1}}{\sigma^2}}})$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}[1 - \Phi(\frac{t_0\sqrt{\frac{Q}{N-k}} - m_i L_i}{\sqrt{\frac{m_i}{\sigma^2}}})]$$

کاملاً بدیهی است که برای اندازه نمونه‌های برابر یعنی $n_1 = \ldots = n_k = n$، آزمون فرضیه $H_0$ در مقابل فرضیه $H_1$ در سطح معنی‌داری $\alpha$، رد می‌شود هرگاه برای هر مقدار ثابت $t_0$، نامساوی

$$\min_{1\leq i\leq k-1} \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{(\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i)}{s} > t_0,$$

برقرار باشد. بنابراین برای مقدار ثابت $\alpha$ و اندازه‌های نمونه برابر تحت درستی فرضیه صفر تساوی

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k-1}[1 - \Phi(\frac{t_0\sqrt{\frac{Q}{N-k}}}{\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}}})],$$

برقرار می‌باشد. مقادیر بحرانی آماره آزمون، $t_\alpha$، برای سه و چهار جامعه نرمال یک متغیره یعنی $k = 3, 4$ با اندازه نمونه‌های $n = 2, 3, 4, \ldots, 20, 100$ در سطوح معنی‌داری $\alpha = 0/01, 0/025, 0/05, 0/1$ نرم افزار $SPLUS$ محاسبه و در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: مقادیر بحرانی آماره آزمون، $t_\alpha$، در سطوح مختلف معنی‌داری $\alpha$

| | $k$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ۳ | | | | ۴ | | | |
| $n$ | ۰/۰۱ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۰۱ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۵ | ۰/۱ |
| ۲ | ۲/۱۵۵۷ | ۱/۴۴۰۴ | ۰/۹۸۶۹ | ۰/۵۷۲۲ | ۰/۸۲۳۱ | ۰/۵۲۲۷ | ۰/۳۰۵۲ | ۰/۰۷۸۹ |
| ۳ | ۱/۶۳۱۹ | ۱/۱۹۵۵ | ۰/۸۶۸۸ | ۰/۵۲۸۲ | ۰/۷۱۳۵ | ۰/۴۷۷۳ | ۰/۲۸۷۶ | ۰/۰۷۶۱ |
| ۴ | ۱/۵۰۴۸ | ۱/۱۳۰۴ | ۰/۸۳۵۲ | ۰/۵۱۴۸ | ۰/۶۸۲۷ | ۰/۴۶۳۷ | ۰/۲۸۲۰ | ۰/۰۷۵۲ |
| ۵ | ۱/۴۴۷۵ | ۱/۱۰۰۲ | ۰/۸۱۹۲ | ۰/۵۰۸۳ | ۰/۶۶۸۴ | ۰/۴۵۷۲ | ۰/۲۷۹۴ | ۰/۰۷۴۸ |
| ۶ | ۱/۴۱۵۲ | ۱/۰۸۲۹ | ۰/۸۰۹۹ | ۰/۵۰۴۵ | ۰/۶۶۰۱ | ۰/۴۵۳۴ | ۰/۲۷۷۷ | ۰/۰۷۴۵ |
| ۷ | ۱/۳۹۴۵ | ۱/۰۷۱۶ | ۰/۸۰۳۸ | ۰/۵۰۲۰ | ۰/۶۵۴۷ | ۰/۴۵۰۹ | ۰/۲۷۶۸ | ۰/۰۷۴۲ |
| ۸ | ۱/۳۷۹۹ | ۱/۰۶۳۷ | ۰/۷۹۹۶ | ۰/۵۰۰۲ | ۰/۵۶۰۹ | ۰/۴۴۹۱ | ۰/۲۷۵۹ | ۰/۰۷۴۱ |
| ۹ | ۱/۳۸۹۲ | ۱/۰۵۷۹ | ۰/۷۹۶۴ | ۰/۴۹۸۸ | ۰/۶۴۸۰ | ۰/۴۴۷۷ | ۰/۲۷۵۴ | ۰/۰۷۴۱ |
| ۱۰ | ۱/۳۶۱۱ | ۱/۰۵۳۴ | ۰/۷۹۴۰ | ۰/۴۹۷۰ | ۰/۶۴۵۸ | ۰/۴۴۶۸ | ۰/۲۷۵۰ | ۰/۰۷۳۹ |
| ۱۱ | ۱/۳۵۴۷ | ۱/۰۴۹۸ | ۰/۷۹۲۰ | ۰/۴۹۷۰ | ۰/۶۴۴۰ | ۰/۴۴۶۰ | ۰/۲۷۴۶ | ۰/۰۷۳۹ |
| ۱۲ | ۱/۳۴۹۳ | ۱/۰۴۶۹ | ۰/۷۹۰۴ | ۰/۴۹۶۴ | ۰/۶۴۲۶ | ۰/۴۴۶۰ | ۰/۲۷۴۳ | ۰/۰۷۳۸ |
| ۱۳ | ۱/۳۴۵۱ | ۱/۰۴۴۴ | ۰/۷۸۹۱ | ۰/۴۹۵۸ | ۰/۶۴۱۴ | ۰/۴۴۴۷ | ۰/۲۷۴۲ | ۰/۰۷۳۸ |
| ۱۴ | ۱/۳۴۱۳ | ۱/۰۴۲۴ | ۰/۷۸۸۰ | ۰/۴۹۵۴ | ۰/۶۴۰۴ | ۰/۴۴۴۲ | ۰/۲۷۳۹ | ۰/۰۷۳۸ |
| ۱۵ | ۱/۳۳۸۲ | ۱/۰۴۰۷ | ۰/۷۸۷۱ | ۰/۴۹۵۰ | ۰/۶۳۹۶ | ۰/۴۴۳۸ | ۰/۲۷۳۸ | ۰/۰۷۳۸ |
| ۱۶ | ۱/۳۳۵۶ | ۱/۰۳۹۲ | ۰/۷۸۶۳ | ۰/۴۹۴۶ | ۰/۶۳۸۹ | ۰/۴۴۳۵ | ۰/۲۷۳۶ | ۰/۰۷۳۷ |
| ۲۰ | ۱/۳۲۶۲ | ۱/۰۳۴۰ | ۰/۷۸۳۴ | ۴۹۳۴ | ۰/۶۳۶۳ | ۰/۴۴۲۳ | ۰/۲۷۳۱ | ۰/۰۷۳۶ |
| ۱۰۰ | ۱/۲۹۹۰ | ۱/۰۱۸۷ | ۰/۷۷۴۹ | ۰/۴۸۹۴ | ۰/۶۲۸۸ | ۰/۴۳۸۷ | ۰/۲۷۱۵ | ۰/۰۷۳۴ |

## ۳ مثال‌های عددی

داده‌های مورد مطالعه در این بخش مربوط به کاشت گندم دیم و گوجه فرنگی در شهرستان کازرون در طی ۱۰ سال متوالی از سال ۱۳۸۳ تا سال ۱۳۹۲ است.

**مثال ۱** : داده‌های گندم دیم مربوط به چهار روستای شهرستان کازرون است که در هر روستا چهار قطعه زمین با مساحت‌های برابر در نظر گرفته شده و برای هر منطقه در طی ۱۰ سال متوالی مقدار محصول بر حسب تن در واحد هکتار در جدول ۲ گزارش داده شده است. بنا به آنچه اداره جهاد کشاورزی شهرستان کازرون بیان می‌کند، در گذشته کشاورزان بر این باور بودند که میزان برداشت گندم در این چهار روستا با هم برابر است اما اخیراً به‌خاطر خشکسالی و کم بارانی و تغییر شرایط آب و هوایی، کشاورزان دیگر این باور را قبول ندارند. در حقیقت شرایط آب و هوایی شهرستان کازرون به‌گونه‌ای است که میزان بارندگی در روستاهای اطراف با هم یکسان نیستند. زمین‌های کشاورزی مورد مطالعه از لحاظ نوع خاک به چهار ناحیه $A$، $B$، $C$ و $D$ تقسیم‌بندی شده است. کشاورزان عقیده دارند که حاصل‌خیزترین زمین از لحاظ برداشت محصول بیشتر، ابتدا زمین $D$، سپس زمین $A$، سپس زمین $C$

و در نهایت زمین $B$ است. آزمایش‌گر نیز انتظار دارد که از زمین $D$ بیشترین محصول و از زمین $B$ کمترین محصول را برداشت کند. اگر $\mu_i$ نشان‌دهنده میانگین برداشت محصول گندم دیم در $i$امین ناحیه باشد، در این‌صورت انتظار آزمایش‌گر این است که نامساوی $\mu_D > \mu_A > \mu_C > \mu_B$ برقرار باشد.

جدول ۲: داده‌های برداشت گندم دیم بر حسب تن در هکتار در نواحی مختلف

| مشاهدات | سال | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱۳۸۳ | ۲/۸ | ۲/۵ | ۲/۲ | ۲/۸ |
| ۲ | ۱۳۸۴ | ۲/۷ | ۲/۳ | ۲ | ۲/۸ |
| ۳ | ۱۳۸۵ | ۲/۴ | ۲ | ۱/۸ | ۲/۸ |
| ۴ | ۱۳۸۶ | ۲/۶ | ۱/۹ | ۱/۷ | ۲/۵ |
| ۵ | ۱۳۸۷ | ۱/۹ | ۱/۷ | ۱/۵ | ۲/۳ |
| ۶ | ۱۳۸۸ | ۲/۱ | ۱/۶ | ۱/۴ | ۲/۲ |
| ۷ | ۱۳۸۹ | ۲/۱ | ۱/۷ | ۱/۳ | ۲/۱ |
| ۸ | ۱۳۹۰ | ۲/۷ | ۲/۱ | ۲/۶ | ۲ |
| ۹ | ۱۳۹۱ | ۱/۹ | ۱/۲ | ۲/۳ | ۲/۳ |
| ۱۰ | ۱۳۹۲ | ۲/۴ | ۱/۹ | ۱/۷ | ۲/۵ |

فرض کنید $X_{ij}$ مقدار محصول گندم دیم بر حسب تن در هکتار برای $i$امین ناحیه در $j$امین سال، $i = A, B, C, D$ و $j = ۱۳۸۳, ۱۳۸۴, \ldots, ۱۳۹۲$ باشد. نمودارهای هیستوگرام، $Q - Q$ و آزمون شاپیرو-ویلک بیانگر آن هستند که داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. در این آزمون برای ناحیه $A$ مقدار احتمال عدد ۰/۲۲۱، برای ناحیه $B$ عدد ۰/۹۷۶، برای ناحیه $C$، عدد ۰/۷۷۳ و برای ناحیه $D$ عدد ۰/۲۳۶ به‌دست آمده، که البته نشان‌دهنده نرمال بودن داده‌ها در هر چهار ناحیه است. پس $X_{ij}$ متغیرهای تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_i$ و واریانس مجهول $\sigma^۲$ هستند. با فرض استقلال متغیرهای تصادفی $X_{ij}$، برای آزمون فرضیه‌های

$$H_۰ : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D \quad \text{در مقابل} \quad H_۱ : \mu_B < \mu_C < \mu_A < \mu_D$$

آزمون برابری واریانس‌های چهار جامعه توسط آزمون لون[9] در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ معنی‌دار نمی‌باشد. مقادیر میانگین‌های نمونه‌ای، واریانس‌های نمونه‌ای و اندازه هر نمونه در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳: آماره‌های توصیفی داده‌های گندم دیم در طی ۱۰ سال متوالی

| ناحیه | میانگین | واریانس | اندازه نمونه |
|---|---|---|---|
| $A$ | ۲/۳۶ | ۰/۱۶۶ | ۱۰ |
| $B$ | ۱/۸۹ | ۰/۱۳۷ | ۱۰ |
| $C$ | ۱/۸۵ | ۰/۱۷۶ | ۱۰ |
| $D$ | ۲/۴۳ | ۰/۰۸۹ | ۱۰ |

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار واریانس نمونه‌ای کل تقریباً عدد $s^2 = ۰/۱۳۱۷$ و مقدار آماره آزمون $\hat{t} = ۱/۱۴۴$ است. از آنجا که مقدار بحرانی $t_{۴,۱۰,۰/۰۵} = ۰/۲۷۵$ است. فرضیه صفر رد می‌شود و میزان برداشت محصول گندم دیم در هر چهار ناحیه با هم برابر نیستند.

**مثال ۲** : داده‌های مربوط به برداشت گوجه فرنگی بر حسب تن در هکتار در حومه شهرستان کازرون برای سه روستای با مساحت زمین‌های برابر در طی ۱۰ سال متوالی از سال ۱۳۸۳ تا ۱۳۹۲ در جدول ۴ گزارش داده شده است.

زمین‌های کشاورزی مورد مطالعه از لحاظ نوع خاک، به سه دسته تقسیم‌بندی شده‌اند. حاصل‌خیزترین زمین از لحاظ برداشت محصول بیشتر، ابتدا زمین ۳، سپس زمین ۲ و در نهایت زمین ۱ است. آزمایش‌گر نیز انتظار دارد که از زمین ۳ بیشترین محصول و از زمین ۱ کمترین محصول را برداشت کند. فرض کنید $X_{ij}$ نشان‌دهنده مقدار محصول گوجه فرنگی بر حسب تن در هکتار برای $i$امین ناحیه در $j$امین سال، $i = A, B, C, D$ و $j = ۱۳۸۳, ۱۳۸۴, \ldots, ۱۳۹۲$ باشد. نمودارهای هیستوگرام، $Q - Q$ و آزمون شاپیرو-ویلک بیانگر آن است که داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. پس $X_{ij}$ متغیرهای تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_i$ و واریانس مجهول $\sigma^2$ هستند. با فرض استقلال متغیرهای تصادفی $X_{ij}$ اگر $\mu_i$،

[9] Levene's test

جدول ۴: داده‌های برداشت گوجه فرنگی بر حسب تن در هکتار

| | | زمین | | |
|---|---|---|---|---|
| مشاهدات | سال | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۱ | ۱۳۸۳ | ۴۴ | ۵۱ | ۴۷ |
| ۲ | ۱۳۸۴ | ۴۳ | ۴۷ | ۴۳ |
| ۳ | ۱۳۸۵ | ۴۰ | ۵۳ | ۵۲ |
| ۴ | ۱۳۸۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۷ |
| ۵ | ۱۳۸۷ | ۳۸ | ۳۶ | ۳۵ |
| ۶ | ۱۳۸۸ | ۳۷ | ۳۴ | ۳۳ |
| ۷ | ۱۳۸۹ | ۳۵ | ۳۳ | ۳۱ |
| ۸ | ۱۳۹۰ | ۳۳ | ۴۹ | ۵۰ |
| ۹ | ۱۳۹۱ | ۴۸ | ۴۲ | ۵۱ |
| ۱۰ | ۱۳۹۲ | ۶۲ | ۶۷ | ۶۲ |

$i = 1,2,3$، نشان‌دهنده میانگین برداشت محصول گوجه فرنگی در $i$امین زمین باشد، انتظار آزمایش‌گر این است که نامساوی $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ برقرار باشد. برای آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \mu_1 = \mu_1 = \mu_3 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$$

آزمون برابری واریانس‌های سه جامعه انجام شده و مقدار احتمال در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/05$ نشان‌دهنده برابری واریانس‌ها است. مقادیر میانگین‌های نمونه‌ای، واریانس‌های نمونه‌ای و اندازه هر نمونه در جدول ۵ آورده شده است. همچنین مقدار واریانس نمونه‌ای کل عدد $s^2 = 95/184$ و مقدار آماره آزمون $\hat{t} = 0/1375$ می‌باشد. از آنجا که $t_{3,10,0/05} = 0/794$ است، فرضیه صفر رد نمی‌شود و میزان برداشت محصول گوجه فرنگی در هر سه ناحیه با هم برابر هستند.

## ۴ آزمون فرضیه مرتب شده دو طرفه بردارهای میانگین

**تعریف ۲** : (ساسابوچی و همکاران، ۱۹۸۳) بردارهای تصادفی $p$ بعدی $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ و ماتریس‌های معین مثبت $p \times p$، $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ را در نظر بگیرید.

جدول ۵: آماره‌های توصیفی داده‌های گوجه فرنگی در طی ۱۰ سال متوالی

| زمین | میانگین | واریانس | اندازه نمونه |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۴۱/۶ | ۷۱/۱۲۲ | ۱۰ |
| ۲ | ۴۵/۰ | ۱۱۲/۰۰ | ۱۰ |
| ۳ | ۴۴/۱ | ۱۰۰/۳۲۲ | ۱۰ |

ماتریس $p \times k$، $[\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ را رگرسیون همنوای $p$ متغیره[۱۰] $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ با وزن‌های $\Sigma_1^{-1}, \ldots, \Sigma_k^{-1}$ گویند اگر $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \leq \cdots \leq \hat{\boldsymbol{\mu}}_k$ و بردارهای $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k$ نیز در تساوی

$$\min_{\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k} \sum_{i=1}^{k} (X_i - \mu_i)' \Sigma_i^{-1} (X_i - \mu_i) = \sum_{i=1}^{k} (X_i - \hat{\mu}_i)' \Sigma_i^{-1} (X_i - \hat{\mu}_i)$$

صدق کند. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای میانگین تحت فرضیه مرتب شده که در واقع همان برآوردهای رگرسیون همنوا هستند، با استفاده از الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس به‌دست می‌آیند (رابرتسون و همکاران، ۱۹۸۸ و سیل واپول و سن، ۲۰۰۵). همچنین ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳)، الگوریتمی برای محاسبه برآوردهای رگرسیون همنوای چند متغیره ارائه و همگرایی آن الگوریتم را برای جامعه نرمال دو متغیره مورد بررسی قرار دادند.

**قضیه ۳** : (بازیاری و پسرین، ۲۰۱۳) برای آزمون فرضیه $H_0''$ در مقابل فرضیه مرتب شده دو طرفه $H_1''$ با ماتریس‌های واریانس کواریانس معلوم و برابر $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_k = \Sigma$، برای هر مقدار ثابت $t$ ناحیه بحرانی آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از:

$$\max(\bar{\chi}_{k,p}^{2'}, \bar{\chi}_{k,p}^{2''}),$$

که در آن $\bar{\chi}_{k,p}^{2'} = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \bar{\mathbf{X}})' \Sigma_i^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \bar{\mathbf{X}})$ آماره آزمون فرضیه $H_0''$ در مقابل فرضیه مرتب شده $H_1^*: \boldsymbol{\mu}_1 \geq \cdots \geq \boldsymbol{\mu}_k$ و $\bar{\chi}_{k,p}^{2''} = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i^* - \bar{\mathbf{X}})' \Sigma_i^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i^* - \bar{\mathbf{X}})$ آماره آزمون فرضیه $H_0''$ در مقابل فرضیه مرتب شده $H_1^{**}: \boldsymbol{\mu}_1 \leq \cdots \leq \boldsymbol{\mu}_k$

[۱۰] P-variate isotonic regression

است، که در آن $\bar{\mathbf{X}} = (\sum_{i=1}^{k} n_i)^{-1} \sum_{i=1}^{k} n_i\bar{\mathbf{X}}_i$ میانگین کل جامعه و $\bar{\mathbf{X}}_i$ برابر با $\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$، $i = 1, \ldots, k$. همچنین برای هر مقدار $\alpha$ داده شده، مقدار $t$ طوری تعیین می‌شود که $P_{H_0''}(\bar{\chi}^{2'}_{k,p} \geq t) = \frac{\alpha}{2}$ باشد.

## ۱.۴ توان آزمون فرضیه مرتب شده دو طرفه کلاسیک

به‌ازای $k = 2$، آزمون فرضیه $H_c: \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ در مقابل فرضیه دوطرفه $H_d: \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ که برآورد پارامترهای $\boldsymbol{\mu}_1$ و $\boldsymbol{\mu}_2$ تحت فرضیه صفر با روش کلاسیک به‌ترتیب $\bar{\mathbf{X}}_1$ و $\bar{\mathbf{X}}_2$ هستند، مقادیر بزرگ آماره آزمون نسبت درستنمایی

$$\begin{aligned} -2\ln\lambda &= n_1(\bar{X}_1 - \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2})'\Sigma^{-1}(\bar{X}_1 - \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}) \\ &+ n_2(\bar{X}_2 - \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2})'\Sigma^{-1}(\bar{X}_2 - \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}) \\ &= (\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2})(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)'\Sigma^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2), \end{aligned} \tag{۶}$$

موجب رد شدن فرضیه $H_c$ می‌شود. با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی $\bar{\mathbf{X}}_1$ و $\bar{\mathbf{X}}_2$ به‌ترتیب دارای توزیع‌های نرمال $p$– متغیره $N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \frac{\Sigma}{n_1})$ و $N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \frac{\Sigma}{n_2})$ هستند.،متغیر تصادفی $\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2$ تحت فرضیه صفر دارای توزیع نرمال $p$– متغیره $N_p(\mathbf{0}, (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\Sigma)$ است. بنابراین که آماره $(\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2})(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)$ دارای توزیع $\chi^2_p$ است. در جدول ۶ مقادیر بحرانی آزمون برای $p = 2, 3$ ارائه شده است.

جدول ۶: مقادیر بحرانی آماره برای توزیع $\chi^2_p$ در سطوح مختلف معنی‌داری

| $p$ | $\alpha$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ۰/۱ | ۰/۰۵ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۱ | ۰/۰۰۵ |
| ۲ | ۴/۶۱ | ۵/۹۹ | ۷/۳۸ | ۹/۲۱ | ۱۰/۶ |
| ۳ | ۶/۲۵ | ۷/۸۱ | ۹/۳۵ | ۱۱/۳ | ۱۲/۸ |

توان آزمون برای یک نمونه دوتایی و سه‌تایی از توزیع‌های نرمال دو متغیره و سه متغیره بر اساس ۱۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو

محاسبه شده است. سطوح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵, ۰/۰۲۵$ در نظر گرفته شده است. فرض کنید ماتریس‌های واریانس کوواریانس برابر با $۳۰I_p$ که در آن $I_p$ یک ماتریس همانی $p \times p$ بعدی است. همچنین فرض کنید برای مقادیر $\beta = ۳, ۲, \frac{۳}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۲۰}, \ldots, \frac{۱}{۷۰}, ۰$، $\boldsymbol{\mu}_i = (\beta i, \beta i + ۱)$ و $\boldsymbol{\mu}_i = (\beta i, \beta i + ۱, \beta i + ۲)$، $i = ۱, ۲$ به‌ترتیب مربوط به $p = ۲, ۳$ باشند.

همان‌طور که در جدول ۷ ملاحظه می‌شود اولاً برای جامعه‌های نرمال دو متغیره یا سه متغیره با افزایش سطح معنی‌داری توان آزمون افزایش می‌یابد. ثانیاً در هر سطح معنی‌داری با کاهش مقدار $\beta$، نزدیکی فرضیه مقابل به فرضیه صفر، توان آزمون کاهش می‌یابد. همچنین در توزیع‌های نرمال دو متغیره و سه متغیره در هر دو سطح معنی‌داری ۰/۰۲۵ و ۰/۰۵ توان آزمون از نتایج توان آزمون فرضیه دو طرفه به‌دست آمده توسط بازیاری و پسرین (۲۰۱۳) کمتر است.

با توجه به اینکه آماره داده شده در رابطه (۶) تحت فرضیه $H_d$ دارای توزیع کی‌دو غیر مرکزی است، توان این آماره با اندازه نمونه‌های $n_۱ = ۱۵$ و $n_۲ = ۲۰$ برای جوامع نرمال دو متغیره و سه متغیره در سطوح معنی‌داری ۰/۰۵ و ۰/۱ محاسبه شده است. روش محاسبه توان شبیه محاسبه توان بر حسب توزیع $\chi^۲$ بر اساس ۱۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو صورت گرفته است. در این شبیه‌سازی برای جامعه‌های نرمال دو و سه متغیره ماتریس‌های واریانس کوواریانس به‌ترتیب $\begin{pmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱۰ & -۳ \\ ۲ & -۳ & ۵ \end{pmatrix}$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای مقادیر $\beta = ۳, ۲, \frac{۳}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۲۰}, \ldots, \frac{۱}{۷۰}, ۰$، $\boldsymbol{\mu}_i = (\beta i, \beta i + ۱)$ و $\boldsymbol{\mu}_i = (\beta i, \beta i + ۱, \beta i + ۲)$، $i = ۱, ۲$ به‌ترتیب مربوط به $p = ۲$ و $p = ۳$ هستند. با توجه به نتایج مندرج در جدول ۸، کاملاً واضح است که با افزایش سطح معنی‌داری برای توزیع نرمال دو متغیره یا سه متغیره، توان آزمون در حال افزایش است.

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا با روشی جدید پرتوان‌ترین آزمون در سطح $\alpha$ بر حسب توزیع $t$ چندمتغیره برای آزمون فرضیه تساوی میانگین‌های $k$ جامعه نرمال یک متغیره در

جدول ۷: توان آماره آزمون برای توزیع‌های نرمال دو متغیره و سه متغیره در سطوح معنی‌داری $\alpha =$ ۰/۰۵, ۰/۰۲۵

| $\beta$ | دومتغیره ۰/۰۲۵ | دومتغیره ۰/۰۵ | سه متغیره ۰/۰۲۵ | سه متغیره ۰/۰۵ |
|---|---|---|---|---|
| ۳ | ۰/۵۲۵ | ۰/۶۱۴ | ۰/۶۴۱ | ۰/۶۷۳ |
| ۲ | ۰/۵۰۶ | ۰/۵۳۴ | ۰/۶۱۲ | ۰/۶۴۰ |
| ۳/۲ | ۰/۴۴۳ | ۰/۵۱۷ | ۰/۵۳۳ | ۰/۵۹۶ |
| ۱ | ۰/۴۱۸ | ۰/۴۴۱ | ۰/۴۹۲ | ۰/۵۲۸ |
| ۱/۲ | ۰/۳۸۷ | ۰/۴۱۲ | ۰/۴۲۵ | ۰/۴۷۰ |
| ۱/۳ | ۰/۳۲۵ | ۰/۳۹۵ | ۰/۴۱۳ | ۰/۴۳۶ |
| ۱/۴ | ۰/۳۱۷ | ۰/۳۸۱ | ۰/۳۹۲ | ۰/۴۱۸ |
| ۱/۵ | ۰/۲۵۸ | ۰/۳۲۵ | ۰/۳۴۶ | ۰/۳۷۰ |
| ۱/۸ | ۰/۲۱۹ | ۰/۳۰۶ | ۰/۳۱۱ | ۰/۳۳۴ |
| ۱/۱۰ | ۰/۲۱۱ | ۰/۲۷۲ | ۰/۲۸۳ | ۰/۳۰۷ |
| ۱/۲۰ | ۰/۲۰۳ | ۰/۲۲۸ | ۰/۲۲۶ | ۰/۲۸۰ |
| ۱/۳۰ | ۰/۱۶۰ | ۰/۲۰۴ | ۰/۲۰۱ | ۰/۲۴۹ |
| ۱/۴۰ | ۰/۱۴۲ | ۰/۱۸۵ | ۰/۱۶۶ | ۰/۲۲۷ |
| ۱/۵۰ | ۰/۱۲۲ | ۰/۱۳۹ | ۰/۱۳۸ | ۰/۱۴۸ |
| ۱/۶۰ | ۰/۰۸۳ | ۰/۱۱۰ | ۰/۱۰۵ | ۰/۰۹۴ |
| ۱/۷۰ | ۰/۰۵۷ | ۰/۰۸۴ | ۰/۰۷۲ | ۰/۰۷۲ |
| ۰ | ۰/۰۲۷ | ۰/۰۳۵ | ۰/۰۳۴ | ۰/۰۴۸ |

مقابل فرضیه میانگین‌های مرتب شده یک طرفه وقتی‌که واریانس‌ها مجهول و برابر باشند، به‌دست آمد. با توجه به اینکه تعیین توزیع آماره آزمون تحت فرضیه صفر برای بیش از دو جامعه ساده نبود، تابع توان آزمون محاسبه و سپس مقادیر بحرانی آماره آزمون برای سه و چهار جامعه نرمال با اندازه نمونه‌های برابر در سطوح معنی‌داری مختلف محاسبه شد. آزمون پیشنهاد شده در این مقاله نه تنها از آزمون مطرح شده توسط بارتولومو (۱۹۵۹a) پرتوان‌تر است، بلکه یک جواب قاطع به پرسش ساسابوچی (۲۰۰۷) برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون در سطح $\alpha$ در حالت یک ارائه متغیره می‌دهد. به عبارتی دیگر آزمون پیدا شده در مقاله حاضر از آزمون‌های ارائه شده توسط ساسابوچی (۲۰۰۷) در حالت یک متغیره نیز پرتوان‌تر است. همچنین آزمون فرضیه مرتب شده دو طرفه بازیاری و پسرین (۲۰۱۳) برای دو

جدول ۸: توان آماره آزمون بر حسب توزیع کی‌دو غیر مرکزی در سطوح معنی‌داری $\alpha = ۰/۱, ۰/۰۵$

| $\beta$ | دومتغیره | | سه متغیره | |
|---|---|---|---|---|
| | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۰۵ | ۰/۱ |
| ۳ | ۰/۶۹۳ | ۰/۷۰۱ | ۰/۷۱۶ | ۰/۷۲۳ |
| ۲ | ۰/۶۷۷ | ۰/۶۸۴ | ۰/۶۸۲ | ۰/۷۱۱ |
| $\frac{۳}{۲}$ | ۰/۶۱۹ | ۰/۶۲۷ | ۰/۶۷۰ | ۰/۶۹۲ |
| ۱ | ۰/۵۲۴ | ۰/۵۷۳ | ۰/۶۵۳ | ۰/۶۷۱ |
| $\frac{۱}{۲}$ | ۰/۴۸۰ | ۰/۵۴۶ | ۰/۵۹۶ | ۰/۶۴۴ |
| $\frac{۱}{۳}$ | ۰/۴۴۱ | ۰/۵۳۳ | ۰/۵۶۳ | ۰/۶۲۱ |
| $\frac{۱}{۴}$ | ۰/۴۴۷ | ۰/۴۸۶ | ۰/۴۸۲ | ۰/۵۰۹ |
| $\frac{۱}{۵}$ | ۰/۴۰۰ | ۰/۴۷۵ | ۰/۴۲۲ | ۰/۴۷۷ |
| $\frac{۱}{۸}$ | ۰/۳۶۲ | ۰/۴۶۸ | ۰/۳۸۳ | ۰/۴۳۹ |
| $\frac{۱}{۱۰}$ | ۰/۳۲۵ | ۰/۴۴۳ | ۰/۳۵۱ | ۰/۴۱۶ |
| $\frac{۱}{۲۰}$ | ۰/۲۹۱ | ۰/۳۸۶ | ۰/۳۱۶ | ۰/۳۸۱ |
| $\frac{۱}{۳۰}$ | ۰/۲۶۰ | ۰/۳۶۰ | ۰/۲۷۴ | ۰/۳۶۲ |
| $\frac{۱}{۴۰}$ | ۰/۲۲۷ | ۰/۳۲۶ | ۰/۲۴۹ | ۰/۳۵۷ |
| $\frac{۱}{۵۰}$ | ۰/۱۷۴ | ۰/۲۷۰ | ۰/۲۳۸ | ۰/۳۲۵ |
| $\frac{۱}{۶۰}$ | ۰/۱۲۹ | ۰/۲۳۵ | ۰/۱۷۱ | ۰/۲۶۹ |
| $\frac{۱}{۷۰}$ | ۰/۰۸۱ | ۰/۱۸۷ | ۰/۱۲۵ | ۰/۲۲۰ |
| ۰ | ۰/۰۴۶ | ۰/۱۴۱ | ۰/۰۷۳ | ۰/۱۶۴ |

جامعه نرمال $p$–متغیره در نظر گرفته شد. توان آزمون برای جامعه‌های نرمال دو و سه متغیره با روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای حالت کلاسیک محاسبه و نشان داده شد که توان آزمون محاسبه شده توسط بازیاری و پسرین (۲۰۱۳) با استفاده از روش الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس، بیشتر از توان آزمون در حالت کلاسیک است. این نتیجه در واقع مشابه همان نتیجه‌ای است که ساسابوچی و همکاران (۱۹۹۸) برای آزمون فرضیه تساوی بردارهای میانگین در مقابل فرضیه یک‌طرفه بردارهای میانگین با روش شبیه‌سازی مونت کارلو در حالت دومتغیره در مقایسه آزمون ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) با آزمون کلاسیک $\chi^۲$ به‌دست آوردند.

## تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سر دبیر محترم مجله علوم آماری و داوران محترم به‌خاطر پیشنهادات ارزشمند آنها که موجب تغییرات اساسی در راستای هر چه بهتر شدن مقاله شد، نهایت تشکر را دارد. همچنین از اداره جهاد کشاورزی شهرستان کازرون به‌دلیل در اختیار گذاشتن داده‌های استفاده شده در مقاله تشکر و قدردانی می‌شود.

## مراجع

بازیاری، ا.، چینی‌پرداز، ر. و راسخی، ع. ا. (۱۳۹۰)، آزمون فرض تساوی میانگین‌ها در مقابل فرض مرتب شده در توزیع نرمال چند متغیره، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، **۱**، ۱۱۹–۹۹.

Anderson, T. W. (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2nd Ed., New York, John Wiley.

Bartholomew, D. J. (1959a), A Test of Homogeneity for Ordered Alternatives, *Biometrika*, **46**, 36-48.

Bartholomew, D. J. (1959b), A Test of Homogeneity for Ordered Alternatives II, *Biometrika*, **6**, 328-335.

Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972), *Statistical Inference under Order Restrictions: The Theory and Applications of Isotonic Regression*, John Wiley, New York.

Bazyari, A. (2012), On the Computation of Some Properties of Testing Homogeneity of Multivariate Normal Mean Vectors against an Order Restriction, *METRON*, **1**, 71-88.

Bazyari, A. and Chinipardaz, R. (2012), A Test for Order Restriction of Several Multiavarite Normal Mean Vectors against all Alternaties when the Covariance Matrices are Unknown but Common, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **11**, 23-45.

Bazyari, A. and Chinipardaz, R. (2013), Upper Bound for p-Value of the Test of Multivariate Normal Ordered Mean Vectors against all Alternatives, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **42**, 1748-1758.

Bazyari, A. and Pesarin, F. (2013), Parametric and Permutation Testing for Multivariate Monotonic Alternatives, *Statistics and Computing*, **23**, 639-652.

Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6th Ed., Pearson, New Jersey.

Kudo, A. (1963), A Multivariate Analogue of the One-Sided Test, *Biometrika*, **50**, 403-418.

Kulatunga, D. D. S., and Sasabuchi, S. (1984), A Test of Homogeneity of Mean Vectors against Multivariate Isotonic Alternatives. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A. Mathematics*, **38**, 151-161.

Kulatunga, D. D. S., Inutsika, M. and Sasabuchi, S. (1990), *A Simulation Study of Some Test Procedures, for Testing Homogeneity of Mean Vectors against Multivariate Isotonic Alternatives.* Technical Report, No. **273**, *Kyushu University.*

Lehmann, E. L. and Romano, J. P. (2005), *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd Ed., Springer, New York.

Nomakuchi, K. and Shi, N. Z. (1988), A Test of a Multiple Isotonic Regression Problem, *Biometrika*, **75**, 181-184.

Perlman, M. D. (1969), One-Sided Testing Problems in Multivariate Analysis, *The Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 549-567.

Pesarin, F. and Salmaso, L. (2010), *Permutation Tests for Camplex Data: Theory, Applications and Software*, John Wiley, Chichester.

Robertson, T. and Wegman, E. T. (1978), Likelihood Ratio Tests for Order Restrictions in Exponential Families, *The Annals of Statistics.* **6**, 485-505.

Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. (1988), *Order Restricted Statistical Inference*, John Wiley, New York.

Sampson, A. R., Singh, H. and Whitaker, L. R. (2003), Order Restricted Estimators: Some Bias Results. *Statistics and Probability Letters*, **61**, 299-308.

Sasabuchi, S. (2007), More Powerfull Tests for Homogeneity of Multivariate Normal Mean Vectors under an Order Restriction, *Sankhya*, **69**, 700-716.

Sasabuchi, S., Inutsuka, M. and Kulatunga, D. D. S. (1983), A Multivariate Version of Isotonic Regression, *Biometrika*, **70**, 465-472.

Sasabuchi, S., Kulatunga, D. D. S. and Saito, H. (1998), Comparison of Powers of Some Tests for Testing Homogeneity under Order Restrictions in Multivariate Normal Means, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **18**, 131-158.

Sasabuchi, S., Tanaka, K. and Takeshi, T. (2003), Testing Homogeneity of Multivariate Normal Mean Vectors under an Order Restriction when the Covariance Matrices are Common but Unknown, *The Annals of Statistics*, **31**, 1517-1536.

Shi, N. Z. and Jiang, H. (1998), Maximum Likelihood Estimation of Isotonic Normal Means with Unknown Variances, *Journal of Multivariate Analysis*, **64**, 183-195.

Silvapulle, M. J. and Sen, P. K. (2005), *Constrained Statistical Inference: Inequality, Order, and Shape Restrictions*, John Wiley, New York.

Tang, D. I., Gnecco, C. and Geller, N. (1989), An Approximation Likelihood Ratio Test for a Normal Mean Vector with Nonnegative Components with Application to Clinical Trials. *Biometrika*, **76**, 577-583.