مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۲، ص ۲۲۱–۲۳۱
DOI: 10.18869/acadpub.jss.10.2.221

طرح D- بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم با اثرات تصادفی

حبیب جعفری، شیما پیرمحمدی
گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۸/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۱/۲۲

چکیده : معیارهای بهینگی برای یافتن طرح بهینه مدل مورد بررسی، استفاده می‌شوند. این نوع مدل‌ها شامل مدل‌های مقایسه زوج شده هستند، که معیارهای بهینگی مقایسه‌های زوج شده بهینه را مشخص می‌کنند. در این مقاله علاوه بر معرفی مدل رگرسیونی درجه دوم با اثرات تصادفی، مدل‌های مقایسه زوج شده در این نوع مدل‌ها معرفی و طرح بهینه برای آن‌ها محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی : ا ثرات تصادفی، رگرسیون درجه دوم، طرح D- بهینه، مقایسه‌ی زوج شده.

۱ مقدمه

در بررسی بعضی مسائل استفاده از مقایسه زوج شده به جای بررسی مستقیم موضوع می تواند باعث دست یافتن به نتایج درست‌تری شود. به عنوان مثال برای بررسی این‌که از میان چند ماده شیرین کدام ماده شیرین‌تر است، در بررسی مستقیم، انتخاب شیرین‌ترین ماده علاوه بر این که دشوار است، ممکن است نتیجه درستی

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: حبیب جعفری، h.jafari@razi.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲K۰۵، ۶۲C۱۲

را در پی نداشته باشد، در حالی‌که اگر مواد شیرین دو به دو مقایسه شوند، به راحتی می توان از میان دو ماده شیرین، ماده شیرین‌تر را انتخاب کرد(گراسهوف و همکاران، ۲۰۰۳).

مدل مقایسه زوج شده و به‌دست آوردن طرح بهینه در این مدل‌ها، توسط گروسمن و همکاران (۲۰۰۱) برای مدل‌های چند جمله‌ای انجام شده و کارایی طرح‌های بهینه نیز محاسبه شده است. استریت و همکاران (۲۰۰۱) در مدل طرح عاملی ۲^k این موضوع را مورد بررسی قرار داده‌اند. از دیگر کارهای انجام گرفته در این زمینه می‌توان به گراسهوف و همکاران (۲۰۰۳) اشاره کرد که طرح بهینه برای مدل مقایسه زوج شده را در مدل طرح عاملی با اثر متقابل مرتبه اول به‌دست آورده و همین نویسندگان در سال ۲۰۰۴ این‌گونه طرح‌های بهینه را در مدل طرح عاملی با اثرات اصلی محاسبه کرده اند.

بحثی که در این مقاله مورد نظر است، به‌کار بردن مقایسه زوج شده در مدل‌های آمیخته خطی و محاسبه طرح D- بهینه[۱] در چنین مدل‌هایی است. مدل آمیخته خطی مورد نظر در این مقاله، مدل رگرسیونی درجه دوم با اثرات تصادفی است که در بخش ۲ این مقاله علاوه بر معرفی مدل‌های آمیخته خطی، توضیحاتی در مورد معیار D- بهینگی و طرح‌های D- بهینه در این نوع مدل‌ها ارائه شده است. در بخش ۳ مدل مقایسه زوج شده معرفی می‌شود و طرح‌های D- بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم با اثرات تصادفی در بخش ۴ محاسبه شده و در نهایت بحث و نتیجه‌گیری در این رابطه در بخش آخر ذکر گردیده است.

۲ مدل‌های آمیخته خطی

مدل‌های آمیخته خطی به مدل‌های خطی گفته می‌شود که علاوه بر داشتن اثرات ثابت، شامل اثرات تصادفی نیز باشند. بنابراین مدل‌های آمیخته خطی دربرگیرنده مدل‌های خطی نیز هستند. در این حالت ساختار یک مدل آمیخته خطی را می‌توان

[۱] D-Optimal Design

به‌صورت

$$y_{ij} = \boldsymbol{f}^T(x_{ij})\gamma_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m_i \tag{1}$$

نشان داد،که در آن y_{ij} متغیر پاسخ مربوط به مشاهده jام از iامین واحد [۲] جامعه و $\boldsymbol{f}(x_{ij})$ بردار تابع رگرسیونی است. اندیس i در این مدل نشان‌دهنده تعداد مشاهدات و اندیس j نشان‌دهنده تعداد تکرارهاست. در مدل (۱) داریم:

$$\gamma_i = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{b}_i; \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p)^T, \quad \boldsymbol{b}_i = (b_{i1}, ..., b_{ip})^T$$

که در آن β بردار پارامترهای مدل (اثرات تثبیت شده [۳]) و $\boldsymbol{b}_i$ بردار اثرات تصادفی در مدل مورد نظر است. هم‌چنین

$$\boldsymbol{b}_i \sim N_p(0, \sigma_e^2 \boldsymbol{D}); \quad \boldsymbol{D} = diag\{d_1, \ldots, d_p\}$$

که در آن $N_p(.,.)$ بیانگر توزیع نرمال p متغیره و $diag(d_1, ..., d_p)$ نشان‌دهنده یک ماتریس قطری است که درایه های روی قطر اصلی آن به ترتیب d_1 و ...و d_p هستند و ε_{ij} ها نیز خطاهای تصادفی و مستقل از اثرات تصادفی هستند، به‌طوری‌که

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2).$$

۱.۲ معیار D- بهینگی و طرح بهینه در مدل‌های آمیخته خطی

طرح بهینه که برای دست یافتن به مناسب‌ترین برآوردگر به‌کار می رود، با توجه به معیارهای بهینگی که توابعی از ماتریس اطلاع فیشر هستند، محاسبه می‌شوند.(سیلوی،۱۹۸۰). اگر $Y_i \sim f(y_i \mid \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\beta})$، آنگاه ماتریس اطلاع فیشر به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_i) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(y_i \mid \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta \partial \beta^T}\right). \tag{2}$$

---
۲ Individual
۳ Fixed Effects

تعریف می‌گردد. حال اگر طرح دلخواه به فرم

$$\xi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_r \\ w_1 & \dots & w_r \end{pmatrix} \in \Xi$$

در نظر گرفته شود، که در آن

$$\Xi = \{\xi \mid \sum_{i=1}^{r} w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1\}$$

آن‌گاه ماتریس اطلاع مربوط به ξ به‌صورت محاسبه خواهد شد.

$$\boldsymbol{M}(\xi) = \sum_{i=1}^{r} w_i \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_i).$$

معیارهای بهینگی توابعی از ماتریس اطلاع فیشر $\boldsymbol{M}(\xi)$ هستند. اما معیار بهینگی مورد استفاده در این مقاله معیار مشهورD- بهینگی است که به دلیل پایایی، بیشتر از سایر معیارهای بهینگی مورد استفاده قرار می‌گیرد (اتکینسون و همکاران، ۲۰۰۷). معیار D- بهینه براساس دترمینان ماتریس اطلاع به‌صورت

$$\psi(\boldsymbol{M}(\xi)) = -\ln det(\boldsymbol{M}(\xi)); \qquad \psi : M \to R$$

تعریف می‌شود که در آن $det(\cdot)$ نشان‌دهنده دترمینان یک ماتریس M به‌صورت $M = \{\boldsymbol{M}(\xi) \mid \xi \in \Xi\}$ تعریف می‌شود و R نیز مجموعه اعداد حقیقی است.

بر همین اساس ξ^* یک طرح D- بهینه است، اگر

$$\xi^* = arg \min_{\xi \in \Xi}(-\ln det(\boldsymbol{M}(\xi))).$$

اکنون با توجه به رابطه (۲) و مدل (۱) می توان ماتریس اطلاع فیشر را با فرض معلوم بودن $\boldsymbol{D}$ و σ_e^2 به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(x_{ij}) = \boldsymbol{f}(x_{ij}) V_{ij}^{-1} \boldsymbol{f}^T(x_{ij}) \qquad (۳)$$

محاسبه کرد، که در آن

$$V_{ij} = \sigma_e^2(\boldsymbol{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(x_{ij}) + 1).$$

در بررسی طرح بهینه در مدل‌های آمیخته خطی، باید توجه کرد که هر واحد جامعه به‌طور مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر n واحد در جامعه وجود داشته باشد و ξ_i^* طرح بهینه مربوط به واحد iام جامعه باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\xi_i^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{i1}^* & \cdots & \boldsymbol{x}_{ir_i}^* \\ w_{i1}^* & \cdots & w_{ir_i}^* \end{pmatrix}; \quad i = 1, ..., n. \tag{۴}$$

هریک از n طرح بهینه رابطه (۴) طرح بهینه مربوط به یکی از واحدهای جامعه است که در این حالت طرح بهینه مربوط به جامعه به‌صورت

$$\zeta^* = \begin{pmatrix} \xi_1^* & \cdots & \xi_n^* \\ w_1^* & \cdots & w_n^* \end{pmatrix}; \quad i = 1, ..., n$$

خواهد بود. حال اگر $\xi_1^* = ... = \xi_n^* = \xi^*$، یعنی طرح‌های بهینه برای هر واحد جامعه یکسان باشند، آن‌گاه طرح بهینه مربوط به جامعه عبارت خواهد بود از(اشمیلتر، ۲۰۰۷):

$$\zeta^* = \begin{pmatrix} \xi^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

۳ مدل مقایسه زوج شده

با توجه به این‌که در این مقاله مقایسه زوج شده برای مدل رگرسیونی درجه دوم با اثرات تصادفی مد نظر است، بنابراین در این بخش مقایسه زوج شده در مدل (۱) معرفی می‌شود. لازم به ذکر است که در مدل‌های آمیخته خطی، مقایسه‌های زوج شده در هر واحد صورت می‌گیرند. برای این منظور با در نظر گرفتن مدل (۱)، مدل مقایسه زوج شده به‌صورت

$$y_i(j,j') = \boldsymbol{f}_i^T(j,j')\gamma_i + \varepsilon_i(j,j'); i = 1, ..., n, j, j' = 1, ..., m_i; j \neq j' \tag{۵}$$

در نظر گرفته می‌شود. در این رابطه $y_i(j,j')$ متغیر پاسخ مربوط به مقایسه مشاهده‌های jام و j'ام، در واحد iام است و به‌صورت

$$y_i(j,j') = y_{ij} - y_{ij'}$$

نمایش داده می شود. هم‌چنین $\boldsymbol{f}_i(j,j')$ بردار تابع رگرسیونی است، که به‌صورت

$$\boldsymbol{f}_i(j,j') = \boldsymbol{f}(x_{ij}) - \boldsymbol{f}(x_{ij'})$$

محاسبه می‌شود و $\varepsilon_i(j,j')$ نیز خطای تصادفی مدل است که

$$\varepsilon_i(j,j') = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij'}$$

در مدل (۵) صرف نظر از توزیع ε_{ij} ها، فرض شده است که

$$\varepsilon_i(j,j') \sim N(0, \sigma^2)$$

و هم‌چنین $\varepsilon_i(j,j')$ ها علاوه بر این‌که از هم مستقل‌اند، از اثرات تصادفی موجود در مدل نیز مستقل می‌باشند. اکنون با توجه به مدل (۵) و رابطه (۳) ماتریس اطلاع فیشر به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(x_{ij}, x_{ij'}) = \boldsymbol{f}_i(j,j') V_i^{-1}(j,j') \boldsymbol{f}_i^T(j,j') \tag{۶}$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$V_i(j,j') = \sigma^2 (\boldsymbol{f}_i^T(j,j') \boldsymbol{D} \boldsymbol{f}_i(j,j') + 1).$$

در مدل مقایسه زوج شده ماتریس اطلاع مربوط به زوج (j,j') برابر ماتریس اطلاع مربوط به زوج (j',j) است (گراسهوف و همکاران، ۲۰۰۴)، یعنی

$$\boldsymbol{M}(j,j') = \boldsymbol{M}(j',j)$$

۴ طرح D- بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم با اثرات تصادفی

در این بخش طرح D- بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم با شیب تصادفی و طرح D- بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم

با انحنای تصادفی محاسبه شده است. برای دست یافتن به مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دوم با اثرات تصادفی، لازم است مدل رگرسیونی درجه دوم با اثرات تصادفی ارائه شود. مدل رگرسیونی درجه دومی که در این مقاله معرفی می‌شود، بدون عرض از مبدأ در نظر گرفته شده است. در مدل مقایسه زوج شده عرض از مبدأ از بین رفته و باعث صفر شدن دترمینان ماتریس اطلاع می شود. بر همین اساس مدل رگرسیونی درجه دوم بدون عرض از مبدأ در نظر گرفته شده است، به طوری‌که در مدل‌های (۱) و (۵) خواهیم داشت :

$$\boldsymbol{f}(x_{ij}) = (x_{ij}, x_{ij}^{۲})^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \beta_۲)^T, \quad \boldsymbol{b}_i = (b_{i۱}, b_{i۲})^T$$

که

$$x_{ij} \in [-۵, ۵]; \quad j = ۱, ..., m_i.$$

اکنون مدل مقایسه زوج شده در رابطه (۵) را با مفروضات بالا در نظر گرفته و برای حالت‌های شیب تصادفی و انحنای تصادفی، به محاسبه طرح D- بهینه می‌پردازیم.

۱.۴ رگرسیون درجه دو با شیب تصادفی

مدل رگرسیونی درجه دو با شیب تصادفی به صورت مدل (۱) و با ویژگی‌هایی به صورت

$$\boldsymbol{f}(x_{ij}) = (x_{ij}, x_{ij}^{۲})^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \beta_۲)^T, \quad \boldsymbol{b}_i = (b_{i۱}, ۰)^T$$

است و هم‌چنین

$$x_{ij} \in [-۵, ۵]; \quad j = ۱, ..., m_i$$

بنابراین با توجه به بخش ۳ مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دو با شیب تصادفی به صورت

$$y_i(j, j') = \boldsymbol{f}_i^T(j, j')\gamma_i + \varepsilon_i(j, j'); i = ۱, ..., n, \quad j, j' = ۱, ..., m_i; j \neq j'$$

خواهد بود، که در آن

$$\varepsilon_i(j,j')\sim N(\circ,\sigma^{۲}),\quad \boldsymbol{b}_i\sim N_{۲}(\circ,\sigma^{۲}\boldsymbol{D});\quad \boldsymbol{D}=diag\{d_{۱},\circ\}$$

حال با فرض این‌که $\sigma^{۲}=۱$ و $\boldsymbol{D}$ معلوم باشد، با توجه به رابطه (۶) ماتریس اطلاع فیشر به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(x_{ij},x_{ij'})=\frac{(x_{ij}-x_{ij'})^{۲}}{d_{۱}(x_{ij}-x_{ij'})^{۲}+۱}\begin{pmatrix} ۱ & x_{ij}+x_{ij'} \\ x_{ij}+x_{ij'} & (x_{ij}+x_{ij'})^{۲}\end{pmatrix}.$$

به دست می‌آید. اکنون اگر به‌طور خاص برای واحد iام جامعه طرح به صورت

$$\xi_i=\begin{pmatrix} \binom{۱}{x} & \binom{-۱}{-x} & \binom{۱}{-۱} \\ \frac{w}{۲} & \frac{w}{۲} & ۱-w\end{pmatrix}$$

در نظر گرفته شود، آن‌گاه دترمینان ماتریس اطلاع فیشر مربوط به آن به‌صورت

$$det(\boldsymbol{M}(\xi_i))=\frac{w^{۲}(۱-x^{۲})^{۲}(۱-x)^{۲}}{(d_{۱}(۱-x)^{۲}+۱)^{۲}}+\frac{۴w(۱-w)(۱-x^{۲})^{۲}}{(۴d_{۱}+۱)(d_{۱}(۱-x)^{۲}+۱)}$$

خواهد بود، که با ماکسیمم کردن آن نسبت به x و w و به ازای مقادیر مختلف $d_{۱}$، طرح‌های D- بهینه مورد نظر معین می‌شوند. مقادیر بهینه x و w که به ترتیب با x^* و w^* نشان داده می‌شوند، به ازای مقادیر مختلف $d_{۱}$ در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: مقادیر بهینه x و w به ازای مقادیر مختلف $d_{۱}$

$d_{۱}$	x^*	w^*
۰	۰/۲۳۶۰−	۰/۸۰۹۰
۰/۰۳	۰/۲۳۶۰−	۰/۸۴۶۰
۰/۰۶	۰/۲۳۶۰−	۰/۸۸۳۰
۰/۰۹	۰/۲۳۶۰−	۰/۹۲۰۲
۰/۱۲	۰/۲۳۶۰−	۰/۹۵۷۲
۰/۱۵	۰/۲۳۶۰−	۰/۹۹۴۴

همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش واریانس اثر تصادفی، تاثیر نقاط $\binom{۱}{-۰/۲۳۶۰}$ و $\binom{-۱}{۰/۲۳۶۰}$ نیز در حال افزایش است و نقاط طرح با تغییر $d_{۱}$، تغییر نمی کنند. به

ازای $d_1 = 0$ طرح D-بهینه برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دو با اثرات ثابت به‌دست آمده است (گروسمن و همکاران، ۲۰۰۱). حال چون واریانس اثر تصادفی برای هر واحد جامعه یکسان است، بنابراین $\xi_1^* = \cdots = \xi_n^*$ پس طرح D- بهینه مربوط به جامعه در این حالت به‌صورت $\zeta^* = \begin{pmatrix} \xi_i^* \\ 1 \end{pmatrix}$ خواهد بود.

۲.۴ رگرسیون درجه دو با انحنای تصادفی

برای مدل مقایسه زوج شده در رگرسیون درجه دو با انحنای تصادفی، $\boldsymbol{b}_i = (0, b_{i2})^T$ است. یعنی این مدل مانند مدل (۵) خواهد بود، با این تفاوت که در این حالت $\boldsymbol{D} = diag\{0, d_2\}$ معلوم و $\sigma^2 = 1$ است، در این صورت ماتریس اطلاع فیشر به صورت

$$\boldsymbol{M}(x_{ij}, x_{ij'}) = \frac{(x_{ij} - x_{ij'})^2}{d_2(x_{ij}^2 - x_{ij'}^2)^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & x_{ij} + x_{ij'} \\ x_{ij} + x_{ij'} & (x_{ij} + x_{ij'})^2 \end{pmatrix}.$$

محاسبه می‌شود، اکنون اگر به‌طور خاص برای واحد iام جامعه طرح

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \binom{1}{x} & \binom{-1}{-x} & \binom{1}{-1} \\ \frac{w}{2} & \frac{w}{2} & 1 - w \end{pmatrix}$$

در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$det(\boldsymbol{M}(\xi_i)) = \frac{w^2(1 - x^2)^2(1 - x)^2}{(d_2(1 - x^2)^2 + 1)^2} + \frac{4w(1 - w)(1 - x^2)^2}{d_2(1 - x^2)^2 + 1}$$

که با ماکسیمم کردن دترمینان نسبت به x و w و به ازای مقادیر مختلف d_2 طرح‌های D- بهینه معین می‌شوند. مقادیر بهینه x و w که به ترتیب با x^* و w^* نشان داده می‌شوند، در جدول ۲ ارائه شده اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود از مقدار $d_2 = 0/02$ به بعد اگرچه نقاط طرح ثابت هستند، اما با افزایش d_2، وزن نقاط $\binom{1}{0/2360}$ و $\binom{-1}{-0/2360}$ در حال کاهش و وزن نقطه‌ی $\binom{1}{-1}$ در حال افزایش است. طرح D- بهینه در جدول ۲ به ازای $d_2 = 0$ و در جدول ۱، به ازای $d_1 = 0$ به‌دست آمده است.

جدول ۲: مقادیر بهینه‌ی x و w به ازای مقادیر مختلف $d_۲$

$d_۲$	x^*	w^*
۰	۰/۲۳۶۰−	۰/۸۰۹۰
۰/۰۲	۴/۲۳۶۰	۰/۸۱۷۴
۰/۱	۴/۲۳۶۰	۰/۵۴۸۲
۱	۴/۲۳۶۰	۰/۵۰۴۴
۲	۴/۲۳۶۰	۰/۵۰۲۲
۱۰	۴/۲۳۶۰	۰/۵۰۰۴
۱۰۰	۴/۲۳۶۰	۰/۵۰۰۰

اکنون با توجه به ثابت بودن واریانس اثر تصادفی در هر واحد جامعه داریم $\xi_۱^* = \cdots = \xi_n^*$. بنابراین طرح D- بهینه مربوط به جامعه به‌صورت $\zeta^* = \begin{pmatrix} \xi_i^* \\ ۱ \end{pmatrix}$ خواهد بود.

بحث و نتیجه‌گیری

طرح D- بهینه که برای مدل مقایسه زوج شده در مدل رگرسیونی درجه دو به کار رفته، در دو حالت محاسبه شده است: شیب تصادفی و انحنای تصادفی. در هر دو حالت، مدل های رگرسیونی درجه دو بدون عرض از مبدأ در نظر گرفته شده است. در حالت اول با افزایش واریانس اثر تصادفی، نقاط طرح یکسانند، اما تأثیر نقاطی که دارای وزن یکسان هستند نیز افزایش یافته و به همین نسبت، تأثیر نقطه‌ای که دارای وزن متفاوت است، کاهش می‌یابد. در حالت دوم با افزایش واریانس اثر تصادفی تأثیر نقاطی که دارای وزن یکسانند، کاهش یافته و تأثیر نقطه‌ای که دارای وزن متفاوت بوده، در حال افزایش است. بنابراین وقتی شیب تصادفی باشد، تأثیر نقاط هم‌وزن با افزایش واریانس اثر تصادفی، افزایش خواهد یافت. این در حالی است که اگر انحنا، تصادفی باشد، تأثیر نقاط هم‌وزن با افزایش واریانس اثر تصادفی کاهش می‌یابد. به عنوان یک پیشنهاد می‌توان در تحقیقات آتی، شیب و انحنا را به‌طور هم‌زمان، تصادفی در نظر گرفت و نتایج مربوط به آن را بررسی و با حالت‌هایی که فقط شیب یا فقط انحنا، تصادفی باشد، مقایسه کرد.

مراجع

Atkinson, A. C., Donev, A. N. and Tobias, R. D. (2007), *Optimum Eperimental Designs,with SAS*, Oxford University Press, New York.

Grasshoff, U., Grossmann, H., Holling, H. and Schwabe, R. (2004), Optimal Designs for Main Effects in Linear Paired Comparison Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**, 361-376.

Grasshoff, U., Grossmann, H., Holling, H. and Schwabe, R. (2003), Optimal Paired Comparison Designs for First-Order Interactions, *Statistics*, **37**, 373-386.

Grossmann, H., Holling, H., Grasshoff, U. and Schwabe, R. (2001), *Efficient Designs for Paired Comparisons with a Polynomial Factor*, In Atkinson, A., Bogacka, B., Zhigljavsky. A. (Eds), Optimum Design 2000, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 45-56.

Schmelter, T. (2007), The Optimality of Single-Group Designs for Certain Mixed Models, *Metrika*, **65**, 183-193.

Silvey, S. D. (1980), *Optimal Design an Introduction to the Theory for Parameter Estimation*, Chapman and Hall, London.

Street, D. J., Bunch, D. S. and Moore, B. J. (2001), Optimal Designs for 2^k Paired Comparison Experiments, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **30**, 2149-2171.