مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۲، ص ۱۸۹-۲۰۶

مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس

قباد برمال‌زن[1]، عابدین حیدری[2]، خالد معصومی‌فرد[2]
[1] گروه آمار، دانشگاه زابل
[2] گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۷/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۳۱

چکیده : در این مقاله، سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های مستقل و غیر هم‌توزیع که از مدل مقیاس پیروی می‌کنند، مورد مطالعه قرار گرفته و ترتیب‌های تصادفی متفاوتی میان آن‌ها بررسی گردیده است. همچنین، نتایج به‌دست آمده در مورد سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌هایی که از توزیع وایبول نمایی شده یا گامای تعمیم یافته پیروی می‌کنند، استفاده شده است. نتایج ارائه شده در این مقاله، تعمیم‌دهنده و کامل‌کننده نتایج موجود در مقالات مرتبط در این زمینه هستند.

واژه‌های کلیدی : مدل مقیاس، توزیع وایبول نمایی‌شده، توزیع گامای تعمیم‌یافته، ترتیب نرخ خطر معکوس، ترتیب تصادفی معمولی، بیشاندن ضعیف.

۱ مقدمه

هدف غایی در مباحث قابلیت اعتماد، تعیین ساختار سیستم‌های پیچیده و ارتقای طول عمر آن‌ها با استفاده از روش‌های مناسب است. برای این منظور، سیستم‌های متفاوتی در نظریه قابلیت اعتماد معرفی شده‌اند که یکی از پرکاربردترین آن‌ها

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: قباد برمال زن، Ghbarmalzan@uoz.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۰۵

سیستم $(n-k+1)$ از n است. این سیستم متشکل از n مؤلفه است که برای فعالیت، فعال بودن حداقل $(n-k+1)$ مولفه، از آن ضروری است. سیستم موازی، یک سیستم ۱ از n و سیستم سری یک سیستم n از n است. فرض کنید متغیرهای تصادفی نامنفی $X_1,\dots,X_n$ نشان‌دهنده طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم و $X_{1:n}\leq\cdots\leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر با این متغیرها باشند. به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $X_{k:n}$ طول عمر یک سیستم $(n-k+1)$ از n متشکل از این مؤلفه‌هاست. این ارتباط مفید باعث شده است که نظریه آماره‌های مرتب در تعیین خواص سیستم‌های $(n-k+1)$ از n به‌طور وسیع مورد استفاده قرار گیرد. آماره‌های مرتب در سایر شاخه‌های آمار مانند استنباط آماری، تحلیل بقا، کنترل کیفیت و آزمون‌های طول عمر نیز نقشی بنیادی را ایفا می‌کنند. برای آگاهی بیشتر در مورد نظریه آماره‌های مرتب و کاربردهای آن، می‌توان به بارلو و پروشان (۱۹۸۱)، آرنولد و همکاران (۱۹۹۲)، بالاکریشنان و رائو (۱۹۹۸a، ۱۹۹۸b) و دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) مراجعه نمود.

متغیرهای مستقل $X_1,\dots,X_n$ به ترتیب با توابع توزیع $F_1,\dots,F_n$ را در نظر بگیرید. این متغیرها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند هر گاه یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته مانند F با تابع چگالی f، و اعداد ثابت و مثبت $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ موجود باشند به‌طوری که برای $i=1,\dots,n$، $F_i(t)=F(\lambda_i t)$ باشد. در این حالت توزیع F را توزیع پایه[1] و $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ را پارامترهای مقیاس[2] می‌نامند. اگر $f_1,\dots,f_n$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع چگالی احتمال متغیرهای $X_1,\dots,X_n$ باشند، آن‌گاه به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $i=1,\dots,n$، $f_i(t)=\lambda_i f(\lambda_i t)$. توزیع‌های شناخته شده‌ای مانند نرمال، نمایی، وایبول و گاما، حالات خاصی از مدل مقیاس هستند. مارشال و الکین (۲۰۰۷، فصل‌های ۷ و ١٦) خواص مدل مقیاس و کاربردهای آن را مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند.

مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n در مدل مقیاس، توسط پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) آغاز شد و پس از آن، این موضوع مورد توجه بسیاری از محققان

[1] Baseline distribution

[2] Scale parameters

قرار گرفته است که از آن‌جمله می‌توان به باربور و همکاران (۱۹۹۱)، هو (۱۹۹۵)، بن و پالتانه (۲۰۰۶) و خالدی و همکاران (۲۰۱۱) اشاره نمود. در این مقاله، تعدادی از نتایج به‌دست آمده توسط خالدی و همکاران (۲۰۱۱) مربوط به مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌هایی که طول عمر آن‌ها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند، تعمیم داده شده است. همچنین، توزیع‌های شناخته شده‌ای مانند وایبول نمایی شده[۳] و گامای تعمیم یافته[۴] به عنوان مصداق‌هایی از نتایج به‌دست آمده مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند.

در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز آورده شده است. در بخش ۳، مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌هایی که طول عمر آنها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند، مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام در بخش ۴، مصداق‌هایی برای نتایج به‌دست آمده در بخش ۳ بیان شده است.

۲ تعاریف و نمادها

تعریف ۱ : فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی X و Y به ترتیب دارای توابع توزیع تجمعی F و G، توابع بقا $\overline{F}$ و $\overline{G}$، توابع معکوس (توابع چندک) از راست پیوسته F^{-1} و G^{-1}، توابع چگالی f و g، توابع نرخ خطر $r_X = f/\bar{F}$ و $r_Y = g/\bar{G}$ و توابع نرخ خطر معکوس $\tilde{r}_X = f/F$ و $\tilde{r}_Y = g/G$ باشند.

الف) X در ترتیب تصادفی معمولی بزرگ‌تر ا ز Y است ($X \geq_{st} Y$) هرگاه برای هر $t > 0$، $\overline{F}(t) \geq \overline{G}(t)$.

ب) X در ترتیب نرخ خطر بزرگ‌تر از Y است ($X \geq_{hr} Y$) هرگاه، $\overline{F}(t)/\overline{G}(t)$ نسبت به t غیرنزولی باشد. به عبارت دیگر، $X \geq_{hr} Y$ است اگر و تنها اگر برای $t > 0$، $r_Y(t) \geq r_X(t)$ باشد.

پ) X در ترتیب نرخ خطرمعکوس بزرگ‌تر ا ز Y است ($X \geq_{rh} Y$) هرگاه، $F(t)/G(t)$ تابعی غیرنزولی از t باشد. به عبارت دیگر، $X \geq_{rh} Y$ است اگر و تنها اگر برای $t > 0$، $\tilde{r}_X(t) \geq \tilde{r}_Y(t)$ باشد.

---
۳ Exponentiated Weibull

۴ Generalized gamma

ت) X در ترتیب پراکندگی بزرگ‌تر از Y است ($X \geq_{disp} Y$) هرگاه $F^{-1}(u) - G^{-1}(u)$ تابعی غیرنزولی در $u \in (0, 1)$ باشد.

ترتیب‌های نرخ خطر و نرخ خطر معکوس، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهند. همچنین برای متغیرهای تصادفی نامنفی، ترتیب پراکندگی، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد (شیکد و شانتیکومار، **۲۰۰۷**؛ برمال‌زن و همکاران، **۱۳۹۱**؛ برمال‌زن و حیدری، **۱۳۹۲**).

تعریف ۲ : فرض کنید $a_{1:n} \leq \cdots \leq a_{n:n}$ و $b_{1:n} \leq \cdots \leq b_{n:n}$ به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ باشند.

الف) $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن[5] از $\mathbf{b}$ بزرگ‌تر است ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه برای هر $j = 1, \ldots, n-1$، $\sum_{i=1}^{j} a_{i:n} \leq \sum_{i=1}^{j} b_{i:n}$ و $\sum_{i=1}^{n} a_{i:n} = \sum_{i=1}^{n} b_{i:n}$ باشد.

ب) $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از بالا، از $\mathbf{b}$ بزرگ‌تر است ($\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه برای هر $j = 1, \ldots, n$، $\sum_{i=1}^{j} a_{i:n} \leq \sum_{i=1}^{j} b_{i:n}$ باشد.

پ) $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از پایین، از $\mathbf{b}$ بزرگ‌تر است ($\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b}$) هرگاه برای هر $j = 1, \ldots, n$، $\sum_{i=j}^{n} a_{i:n} \geq \sum_{i=j}^{n} b_{i:n}$ باشد.

ت) بردار $\mathbf{a}$ در ${\Re^+}^n$، p-بزرگ‌تر از بردار $\mathbf{b}$ در ${\Re^+}^n$ است ($\mathbf{a} \overset{p}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه برای هر $j = 1, \ldots, n$، $\prod_{i=1}^{j} a_{i:n} \leq \prod_{i=1}^{j} b_{i:n}$ باشد.

به‌سادگی می‌توان دید که ترتیب بیشاندن، هر دو ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد. همچنین، برای بردارهای مثبت، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، ترتیب p-بزرگ‌تر را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳ : فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و تعریف شده بر روی مجموعه $A \subseteq R^n$ باشد. آن‌گاه ϕ بر روی مجموعه A شُور-کوژ[6] (شُور-کاو[7]) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$

$$\boldsymbol{a} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{b} \Longrightarrow \phi(\boldsymbol{a}) \geq (\leq) \phi(\boldsymbol{b}).$$

[5] Majorization

[6] Schur-convex

[7] Schur-concave

قضیه ۱ (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱): فرض کنید $I \subset \Re$ بازه‌ای باز و $\phi : I^n \rightarrow \Re$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ بر روی I^n شُور-کوژ (شُور-کاو) است اگر و تنها اگر ϕ روی I^n متقارن باشد و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم:

$$(z_i - z_j)\{\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(z) - \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(z)\} \geq \circ (\leq \circ) \quad z \in I^n,$$

که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(\mathbf{z})$، مشتق جزیی تابع ϕ نسبت به مولفه iام آن است.

قضیه ۲ (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱): فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و تعریف شده بر روی مجموعه $A \subseteq R^n$، و $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ باشد. آن‌گاه

الف) ϕ بر روی A شُور-کوژ و غیرصعودی است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b})$$

ب) ϕ بر روی A شُور-کوژ و غیرنزولی است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b})$$

جزئیات بیشتر در مورد بیشاندن و ترتیب‌های مربوطه را می‌توان در مارشال و همکاران (۲۰۱۱) مشاهده نمود.

۳ مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی

در این بخش، سیستم‌های موازی (سری) متشکل از مؤلفه‌هایی که طول عمر آن‌ها از مدل مقیاس پیروی می‌کند، مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در مباحث پیش‌رو، تمامی متغیرهای تصادفی نامنفی در نظر گرفته شده‌اند و برای سادگی در بیان نتایج، هنگامی‌که گفته می‌شود متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; F)$ پیروی می‌کنند منظور آن است که $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ پارامترهای مقیاس و F توزیع پایه در مدل مقیاس است. همچنین، $\tilde{r}$ و r نرخ خطر معکوس و نرخ خطر متناظر با توزیع پایه F هستند.

قضیه ۳ (خالدی و همکاران، ۲۰۱۱): فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*;F)$ پیروی می‌کنند.

الف) اگر $t\,\tilde{r}(t)$ در t غیرصعودی باشد، آن‌گاه

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\overset{p}{\succeq}(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*)\Longrightarrow X_{n:n}\geq_{st}X_{n:n}^*$$

ب) اگر $t\,\tilde{r}(t)$ در t کوژ باشد، آن‌گاه

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\overset{m}{\succeq}(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*)\Longrightarrow X_{n:n}\geq_{rh}X_{n:n}^*$$

خالدی و همکاران (۲۰۱۱) همچنین نشان داده‌اند که قضیه ۳ در مورد توزیع گامای تعمیم یافته برقرار است. در بخش بعدی نشان داده می‌شود که توزیع وایبول نمایی شده نیز در شرایط معرفی شده در بند (الف) قضیه ۳ صدق می‌کند. در قضیه زیر، بند (ب) قضیه ۳ به حالتی تعمیم داده شده است که بیشاندن ضعیف از بالا، میان بردارهای پارامترهای مقیاس برقرار است.

قضیه ۴ : فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*;F)$ پیروی می‌کنند. اگر $t\,\tilde{r}(t)$ در t غیرصعودی و کوژ باشد، آن‌گاه

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\overset{w}{\succeq}(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*)\Longrightarrow X_{n:n}\geq_{rh}X_{n:n}^*$$

برهان : تابع نرخ خطر معکوس متغیر $X_{n:n}$ عبارت است از:

$$\tilde{r}(t;\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\tilde{r}(\lambda_i t),\quad t>0$$

طبق بند (الف) قضیه ۲، نتیجه مورد نظر برقرار است اگر و تنها اگر تابع $\tilde{r}(t;\boldsymbol{\lambda})$ برای $t>0$ ثابت، در $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ شُور-کوژ و غیرصعودی باشد. با استفاده از قضیه ۳ (ب) و این فرض که $t\tilde{r}(t)$ کوژ است، شُور-کوژ بودن $\tilde{r}(t;\boldsymbol{\lambda})$ نتیجه می‌شود. همچنین، به سادگی می‌توان مشاهده نمود که فرض غیرصعودی بودن $t\tilde{r}(t)$، بلافاصله بر غیرصعودی بودن $\tilde{r}(t;\boldsymbol{\lambda})$ دلالت می‌کند.

قضیه ۵ خالدی و همکاران (۲۰۱۱): فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*;F)$ پیروی می‌کنند. همچنین، فرض کنید $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*) \overset{m}{\succeq} (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ و $t\,r(t)$ در t کاو (کوژ) باشد. آن‌گاه

الف) $X_{1:n} \geq_{hr} (\leq_{hr}) X_{1:n}^*$؛

ب) $X_{1:n} \geq_{disp} (\leq_{disp}) X_{1:n}^*$، اگر $r(t)$ در t غیرصعودی باشد.

قضیه ۶ : فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*;F)$ پیروی می‌کنند. همچنین، فرض کنید $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*) \overset{w}{\succeq} (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ و $t\,r(t)$ در t غیرنزولی و کاو باشد. آن‌گاه

الف) $X_{1:n} \geq_{hr} X_{1:n}^*$؛

ب) $X_{1:n} \geq_{disp} X_{1:n}^*$، اگر $r(t)$ در t غیرصعودی باشد.

برهان : الف) تابع نرخ خطر متغیر $X_{1:n}$ عبارت است از:

$$r(t;\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, r(\lambda_i t), \quad t > 0$$

طبق بند (الف) قضیه ۲، نتیجه مورد نظر برقرار است اگر و تنها اگر تابع $r(t;\boldsymbol{\lambda})$ برای $t > 0$ ثابت، در $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ شُور-کاو و غیرنزولی باشد. با استفاده از بند (الف) قضیه ۵ و این فرض که $tr(t)$ کاو است، شُور-کاو بودن $r(x;\boldsymbol{\lambda})$ نتیجه می‌شود. همچنین، به سادگی می‌توان مشاهده نمود که فرض غیرنزولی بودن $tr(t)$، غیرنزولی بودن $r(t;\boldsymbol{\lambda})$ را نتیجه می‌دهد.

ب) به سادگی می‌توان مشاهده نمود که غیرصعودی بودن $r(t)$ در t، غیرصعودی بودن $r(t;\boldsymbol{\lambda})$ در t را نتیجه می‌دهد. اکنون، نتیجه مورد نظر از بند (الف) و قضیه $3.B.20$ شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) به‌دست می‌آید.

قضیه ۷ : فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس

$(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*; F)$ پیروی می‌کنند. اگر $tr(t)$ در t غیرنزولی و کوژ باشد، آن‌گاه

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \succeq_w (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{1:n}^* \geq_{hr} X_{1:n}$$

برهان : از بند (الف) قضیه ۶ و شرط کوژ بودن $tr(t)$، نتیجه می‌شود که تابع نرخ خطر متغیر $X_{1:n}$ در $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ شُور-کوژ می‌باشد. از طرفی، فرض غیرنزولی بودن $tr(t)$، بر غیرنزولی بودن تابع نرخ خطر متغیر $X_{1:n}$ در $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ دلالت می‌کند. اکنون نتیجه مورد نظر از بند (ب) قضیه ۲ به‌دست می‌آید.

بنابر تعریف ۲، ترتیب بیشاندن هر دو ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. برای مثال واضح است که $(1,3) \succeq_w (2,4)$ و $(6,7) \overset{w}{\succeq} (3,5)$، در حالی‌که ترتیب بیشاندن میان این بردارها برقرار نیست. بنابراین، ترتیب‌های بیشاندن از بالا و پایین دارای محدودیت‌های کمتری برای مقایسه بوده و در نتیجه، در مقایسه با ترتیب بیشاندن، بردارهای بیشتری را نسبت به این معیارها می‌توان مورد مقایسه قرار داد. پس، با استفاده از قضایای ۴، ۶ و۷ و ترتیب‌های بیشاندن ضعیف از بالا و پایین میان بردارهای پارامترهای مقیاس، سیستم‌های سری و موازی بیشتری را در مقایسه با قضایای ۳ و ۵ می‌توان مورد مقایسه قرار داد. این مساله در بخش بعدی با ارائه مثال‌هایی مورد بحث و بررسی بیشتر قرار می‌گیرد.

قضیه ۸ : فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*, \ldots, X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*; F)$ پیروی می‌کنند. اگر $tr(t)$ در t غیرنزولی باشد، آن‌گاه

$$(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n) \succeq_w (\log \lambda_1^*, \ldots, \log \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{1:n}^* \geq_{st} X_{1:n}$$

برهان : فرض کنید برای $i = 1, \ldots, n$، $a_i = \log \lambda_i$ باشد. در این صورت تابع نرخ خطر متغیر $X_{1:n}$، به عنوان تابعی از $(a_1, \ldots, a_n)$ عبارت است از:

$$\bar{F}(t; \boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{n} \bar{F}(e^{a_i} t), \quad t > 0$$

طبق بند (ب) قضیه ۲، برای به‌دست آوردن نتیجه مطلوب، کافیست نشان داده شود که تابع $\bar{F}(t;\boldsymbol{a})$، برای $t > 0$ ثابت، در $(a_1,\ldots,a_n)$ غیرصعودی و شُور-کاو است. برای $t > 0$ ثابت، مشتق جزئی $\bar{F}(t;\boldsymbol{a})$ نسبت به a_i عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}(t;\boldsymbol{a})}{\partial a_i} &= -t\,e^{a_i}\,r(e^{a_i}t)\,\bar{F}(t;\boldsymbol{a})\\ &< 0\end{aligned}$$

در نتیجه $\bar{F}(x;\boldsymbol{a})$، برای $t > 0$ ثابت، در $(a_1,\ldots,a_n)$ غیرصعودی است. از طرف دیگر، برای $i \neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}(a_i - a_j)\Big(\frac{\partial \bar{F}(t;\boldsymbol{a})}{\partial a_i} - \frac{\partial \bar{F}(t;\boldsymbol{a})}{\partial a_j}\Big) &= t\bar{F}(t;\boldsymbol{a})\\ &\times\ (a_i - a_j)\,(e^{a_j}\,r(e^{a_j}t) - e^{a_i}\,r(e^{a_i}t))\end{aligned} \quad (1)$$

چون $t\,r(t)$ غیرنزولی است لذا طرف راست رابطه (۱) نامثبت است و طبق قضیه ۱، شُور-کاو بودن $\bar{F}(t;\boldsymbol{a})$ در $(a_1,\ldots,a_n)$ به‌دست می‌آید.

فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,\ldots,X_n$ از مدل مقیاس $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;F)$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1^*,\ldots,X_n^*$ از مدل مقیاس $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*;F)$ پیروی می‌کنند. طبق گزاره $A.2.b$ در مارشال و همکاران (۲۰۱۱) داریم:

$$(\log\lambda_1,\ldots,\log\lambda_n) \succeq_w (\log\lambda_1^*,\ldots,\log\lambda_n^*),$$

در نتیجه

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \succeq_w (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*). \quad (2)$$

فرض کنید $tr(t)$ غیرنزولی و کوژ باشد. چون ترتیب نرخ خطر ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد، با استفاده از رابطه (۲) و قضیه ۷ داریم:

$$(\log\lambda_1,\ldots,\log\lambda_n) \succeq_w (\log\lambda_1^*,\ldots,\log\lambda_n^*) \Longrightarrow X_{1:n}^* \geq_{st} X_{1:n} \quad (3)$$

قضیه ۸ تضمین می‌کند که رابطه (۳) تنها تحت شرط غیرنزولی بودن $t\,r(t)$ برقرار است و نیازی به کوژ بودن $t\,r(t)$ نیست. بنابراین، هر چند براساس رابطه (۲)، قضیه

۷ سیستم‌های سری و موازی بیشتری را در مقایسه با قضیه ۸، در ترتیب تصادفی معمولی مورد مقایسه قرار می‌دهد، اما دارای محدودیت‌های بیشتری بر روی توزیع پایه است و این محدودیت‌ها معمولاً در پارامتر و یا پارامترهای شکل[۸] موجود در توزیع پایه خود را نشان می‌دهند. این در حالی است که قضیه ۸ دارای محدودیت کمتری بر روی توزیع پایه می‌باشد. برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۲) ترتیب‌های تصادفی در مورد سیستم‌های $(n-۱)$ از n را مورد بررسی قرار دادند. طول عمر یک سیستم $(n-۱)$ از n، معادل با دومین آماره مرتب حاصل از طول عمر اجزای آن است در حالی‌که در این مقاله، مقایسه‌های تصادفی برای کوچکترین و بزرگترین آماره مرتب که به‌ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی هستند انجام شده است.

برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۱) مقایسه‌های تصادفی میان تفاضل آماره‌های مرتب متوالی، متناظر با نمونه‌های تصادفی نمایی را مورد بررسی قرار دادند. در حالی‌که در این مقاله، مقایسه‌های تصادفی برای کوچکترین و بزرگترین آماره مرتب انجام شده است.

نکته دیگری که لازم است به آن اشاره شود این است که در برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۲) و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۱)، توزیع متغیرهای تصادفی، نمایی در نظر گرفته شده است در حالی‌که در این مقاله، فرض بر آن است که توزیع متغیرهای تصادفی مفروض از مدل مقیاس پیروی می‌کنند که شامل توزیع‌های نمایی، گاما، وایبول و غیره است.

۴ کاربردها

توزیع وایبول نمایی شده: متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول نمایی شده با پارامترهای شکل α و β، و پارامتر مقیاس λ است ($X \sim EW(\alpha,\beta,\lambda)$) هرگاه تابع توزیع آن به‌صورت

$$F(t;\alpha,\beta,\lambda) = \left(۱ - e^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)^{\alpha},\quad t>۰, \alpha>۰, \beta>۰, \lambda>۰$$

[۸] Shape

باشد (مودهولکار و سریواستاوا، ۱۹۹۳). این توزیع شامل توزیع‌های نمایی ($\alpha = \beta = ۱$)، وایبول ($\alpha = ۱$)، نمایی تعمیم یافته ($\beta = ۱$)، رایلی[۹] ($\beta = ۲$، $\alpha = ۱$) و بور نوع ۱۰[۱۰] است. یکی دیگر از خواص این توزیع، انعطاف پذیری تابع نرخ خطر آن است به‌طوری که به ازای $\alpha\beta \geq ۱$ و $\beta \geq ۱$، نرخ خطر آن غیرصعودی، برای $\alpha\beta \leq ۱$ و $\beta \leq ۱$ غیرنزولی، به ازای $\alpha\beta > ۱$ و $\beta < ۱$، $\sqcup$-شکل[۱۱] و برای $\alpha\beta < ۱$ و $\beta > ۱$، نرخ خطر آن $\sqcap$-شکل[۱۲] است.

لم ۱ : فرض کنید $X \sim EW(\alpha, \beta, ۱)$ با نرخ خطر معکوس $\tilde{r}$ باشد. برای $\alpha > ۰$، $t\,\tilde{r}(t)$ در t غیرصعودی و برای $\alpha > ۰$ و $۰ < \beta \leq ۱$ کوژ است.

برهان : می‌توان نشان داد که برای $t > ۰$، $t\,\tilde{r}(t) = \alpha\beta\, u(t^{\beta})$ است، که در آن $u(x) = x\,e^{-x}/(۱ - e^{-x})$، $x > ۰$. واضح است که $u'(x) \overset{sgn}{=} e^{x} - ۱ - xe^{x}$، به‌طوری‌که $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای یکسان بودن علامت‌های a و b است. اما، تابع $s(x) = e^{x} - ۱ - xe^{x}$ تابعی غیرصعودی است. بنابراین، $s(x) < s(۰) = ۰$ که نشان می‌دهد $u'(x) < ۰$ یا به‌طور معادل $u(x)$ غیرصعودی است. چون ترکیب یک تابع غیرصعودی با یک تابع غیرنزولی، غیرصعودی است نتیجه می‌شود که تابع $t\tilde{r}(t)$ غیرصعودی است. از طرفی $(t\,\tilde{r}(t))' = \alpha\,\beta^{۲}\, t^{\beta - ۱}\, u'(t^{\beta})$ بنابراین

$$(t\,\tilde{r}(t))'' = \alpha\,\beta^{۲}\, t^{\beta-۲}((\beta - ۱)\, u'(t^{\beta}) + \beta\, t^{\beta}\, u''(t^{\beta})) \qquad (۴)$$

چون $u'(x) < ۰$، طبق رابطه (۴) و در حضور شرط $۰ < \beta \leq ۱$، $(t\,\tilde{r}(t))'' > ۰$ است تنها اگر $u''(x) > ۰$ باشد. به سادگی داریم:

$$\begin{aligned}(u(x))'' &\overset{sgn}{=} xe^{x} + x + ۲ - ۲e^{x}\\ &= w(x)\end{aligned}$$

اما، $w'(x) = xe^{x} + ۱ - e^{x}$ و $w''(x) = xe^{x} > ۰$. پس، برای $x > ۰$، $w'(x) > w'(۰) = ۰$ یا به‌طور معادل تابع $w(x)$ غیرنزولی است. بنابراین،

[۹] Rayleigh
[۱۰] Burr type X
[۱۱] Bathtub shape
[۱۲] upside-down bathtub shape

$w(x) > w(0) = 0$ بوده و نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

فرع زیر، نتیجه مستقیم بند (الف) قضیه ۳ و لم ۱ است که شرایط مناسب برای مقایسه سیستم‌های موازی متشکل از مؤلفه‌های وایبول نمایی شده را در ترتیب تصادفی معمولی فراهم می‌کند.

فرع ۱ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim EW(\alpha, \beta, \lambda_i)$، $i = 1, \ldots, n$ و $X_1^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim EW(\alpha, \beta, \lambda_i^*)$ باشند. آن‌گاه، برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ داریم:

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \overset{p}{\succeq} (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{st} X_{n:n}^*$$

با استفاده از قضیه ۴ و لم ۱، فرع زیر به‌دست می‌آید که شرایط کافی برای مقایسه سیستم‌های موازی متشکل از مؤلفه‌های وایبول نمایی شده را در ترتیب نرخ خطر معکوس ارائه می‌نماید.

فرع ۲ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim EW(\alpha, \beta, \lambda_i)$، $i = 1, \cdots, n$ و $X_1^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim EW(\alpha, \beta, \lambda_i^*)$، باشند. آن‌گاه، برای $\alpha > 0$ و $0 < \beta \leq 1$ داریم:

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \overset{w}{\succeq} (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{rh} X_{n:n}^*$$

مثال زیر نشان می‌دهد که نتیجه فرع ۲ برای حالتی که $\beta > 1$ باشد برقرار نیست.

مثال ۱ : فرض کنید X_1، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim EW(2, 2, \lambda_i)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0/1, 1, 9)$. همچنین، فرض کنید X_1^*، X_2^* و X_3^* متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim EW(2, 2, \lambda_i^*)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0/2, 4, 6)$. واضح است که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{w}{\succeq} (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$. فرض کنید $\tilde{r}(\cdot; \boldsymbol{\lambda})$ و $\tilde{r}(\cdot; \boldsymbol{\lambda}^*)$ به ترتیب نشان‌دهنده نرخ خطر معکوس متغیرهای $X_{3:3}$ و $X_{3:3}^*$ باشند. با استفاده از نرم افزار $Mathematica$ به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{r}(0/1; \boldsymbol{\lambda}^*) = 55/0542 \quad > \quad 52/8809 = \tilde{r}(0/1; \boldsymbol{\lambda})$$
$$\tilde{r}(0/2; \boldsymbol{\lambda}) = 13/068 \quad > \quad 10/5158 = \tilde{r}(0/2; \boldsymbol{\lambda}^*)$$

لذا این توابع یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه $X_{3:3} \ngeq_{rh} X^*_{3:3}$.

توزیع گامای تعمیم یافته: متغیر تصادفی X دارای توزیع گامای تعمیم یافته با پارامترهای شکل α و β، و پارامتر مقیاس λ است ($X \sim GG(\alpha, \beta, \lambda)$) هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha}{\Gamma(\frac{\beta}{\alpha})} x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0$$

باشد که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گامای ناقص است. این توزیع، شامل توزیع‌های نمایی ($\alpha = \beta = 1$)، وایبول ($\alpha = \beta$) و گاما ($\alpha = 1$) است. یکی دیگر از خواص این توزیع، انعطاف پذیری تابع نرخ خطر آن است به‌طوری که به‌ازای $\alpha \geq 1$ و $\beta \geq 1$، نرخ خطر آن غیرصعودی، برای $\alpha \leq 1$ و $\beta \leq 1$ غیرنزولی، به‌ازای $\alpha > 1$ و $\beta < 1$، $\sqcup$-شکل و برای $\alpha < 1$ و $\beta > 1$، نرخ خطر آن $\sqcap$-شکل می‌باشد (کلیبر و کاتز، ۲۰۰۳).

فرض کنید $X \sim GG(\alpha, \beta, 1)$ با نرخ خطر معکوس $\tilde{r}$ باشد. خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان داده‌اند که برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$، $t\,\tilde{r}(t)$ غیرصعودی است و $t\,\tilde{r}(t)$ کوژ است هر گاه $1 \leq \alpha > 0$ و $\beta > 0$ باشد. با توجه به این نتایج و قضیه ۴، فرع زیر به‌دست می‌آید.

فرع ۳ : (خالدی و همکاران،۲۰۱۱) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(\alpha, \beta, \lambda_i)$، $i = 1, \ldots, n$ و $X^*_1, \ldots, X^*_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X^*_i \sim GG(\alpha, \beta, \lambda^*_i)$، باشند. آن‌گاه، برای $1 \leq \alpha > 0$ و $\beta > 0$ داریم:

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \overset{w}{\succeq} (\lambda^*_1, \ldots, \lambda^*_n) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{rh} X^*_{n:n}$$

این فرع تحت شرط بیشاندن بردارهای پارامترهای مقیاس، به‌دست آمده است. اما، همان‌گونه که در بخش ۳ بیان شد، فرع ۳ سیستم‌های موازی بیشتری را در ترتیب نرخ خطر معکوس مورد مقایسه قرار می‌دهد.

مثال ۲ : فرض کنید X_1، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(0/2, 3, \lambda_i)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 5)$.

همچنین، فرض کنید X_1^*، X_2^* و X_3^* متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim GG(0/2, 3, \lambda_i^*)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1^*، \lambda_2^*، \lambda_3^*) = (3, 9, 13)$. واضح است که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{w}{\succeq} (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ و در نتیجه طبق فرع ۳، $X_{3:3} \geq_{rh} X_{3:3}^*$. دقت شود که ترتیب بیشاندن میان این بردارها برقرار نیست. بنابراین، قضیه ۱ در به‌دست آوردن این ترتیب تصادفی مفید نمی‌باشد.

مثال ۳ : فرض کنید X_1، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(3, 2, \lambda_i)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0/9, 2, 5)$. همچنین، فرض کنید X_1^*، X_2^* و X_3^* متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim GG(3, 2, \lambda_i^*)$، $i = 1, 2, 3$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (1, 3, 4)$. واضح است که $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{w}{\succeq} (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$. فرض کنید $\tilde{r}(\cdot; \boldsymbol{\lambda})$ و $\tilde{r}(\cdot; \boldsymbol{\lambda}^*)$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع نرخ خطر معکوس متغیرهای $X_{3:3}$ و $X_{3:3}^*$ باشند. با استفاده از نرم افزار $Mathematica$ به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{r}(1; \boldsymbol{\lambda}) = 6/37606 \quad > \quad 4/67222 = \tilde{r}(1; \boldsymbol{\lambda}^*)$$
$$\tilde{r}(2; \boldsymbol{\lambda}^*) = 1/59439 \quad > \quad 1/06014 = \tilde{r}(2; \boldsymbol{\lambda})$$

مشاهدات فوق نشان می‌دهد که این توابع یگدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه $X_{3:3} \ngeq_{rh} X_{3:3}^*$.

فرض کنید $X \sim GG(\alpha, \beta, 1)$ با نرخ خطر r باشد. خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند که برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$، $t\,r(t)$ غیرنزولی است و $t\,\tilde{r}(t)$ کوژ (کاو) است هر گاه $\alpha \geq 1$ و $\beta \geq 1$ ($\alpha \leq 1$ و $\beta \leq 1$) باشد (لم $A.4$ و نتیجه $A.2$). با توجه به این مشاهدات، قضایای ۶ و ۷، و این نکته که $r(t)$ به‌ازای $\alpha \leq 1$ و $\beta \leq 1$ غیرصعودی است، فرع‌های زیر به‌دست می‌آیند.

فرع ۴ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(\alpha, \beta, \lambda_i)$، $i = 1, \ldots, n$ و $X_1^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقل با

$X_i^* \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i^*)$، باشند. آن‌گاه، برای $\alpha \leq ۱$ و $\beta \leq ۱$ داریم:

$$(\lambda_۱,\ldots,\lambda_n) \overset{w}{\succeq} (\lambda_۱^*,\ldots,\lambda_n^*) \Longrightarrow X_{۱:n} \geq_{hr} (\geq_{disp}) X_{۱:n}^*$$

فرع ۵ : فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i)$، $i=۱,\ldots,n$ و $X_۱^*,\ldots,X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i^*)$، باشند. آن‌گاه، برای $\alpha \geq ۱$ و $\beta \geq ۱$ داریم:

$$(\lambda_۱,\ldots,\lambda_n) \succeq_w (\lambda_۱^*,\ldots,\lambda_n^*) \Longrightarrow X_{۱:n}^* \geq_{hr} X_{۱:n}$$

فرع‌های ۴ و ۵ توسط خالدی و همکاران (۲۰۱۱) تحت شرط بیشاندن میان بردارهای پارامترهای مقیاس به‌دست آمده است. اما، همان‌گونه که در بخش ۳ بیان گردید، با استفاده از این نتایج می‌توان سیستم‌های سری بیشتری را در ترتیب‌های نرخ خطر و پراکندگی مورد مقایسه قرار داد. مثال بعدی به این مساله می‌پردازد.

مثال ۴ : فرض کنید $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i)$، $i=۱,۲,۳$ و $X_۱^*$، $X_۲^*$ و $X_۳^*$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i^* \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i^*)$ باشند.

(الف) فرض کنید $\alpha = ۰/۸$، $\beta = ۰/۳$، $(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳) = (۰/۵, ۱/۵, ۷/۵)$ و $(\lambda_۱^*,\lambda_۲^*,\lambda_۳^*) = (۱/۸, ۲/۱, ٦)$ باشند. داریم:

$$(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳) \overset{w}{\succeq} (\lambda_۱^*,\lambda_۲^*,\lambda_۳^*)$$

در نتیجه، طبق فرع ۴ $X_{۱:۳} \geq_{hr} (\geq_{disp}) X_{۱:۳}^*$ است.

(ب) فرض کنید $\alpha = ۱/۵$، $\beta = ۱/۲$، $(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳) = (۰/۷, ۱/۵, ۵/۵)$ و $(\lambda_۱^*,\lambda_۲^*,\lambda_۳^*) = (۰/٦, ۲, ۴/۲)$. داریم:

$$(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳) \succeq_w (\lambda_۱^*,\lambda_۲^*,\lambda_۳^*)$$

و از فرع ۵ می‌توان نتیجه گرفت که $X_{۱:۳}^* \geq_{hr} X_{۱:۳}$ است. از طرفی، در هر دو حالت، ترتیب بیشاندن میان بردارهای فوق برقرار نیست. لذا در این حالات، نتایج

خالدی و همکاران (۲۰۱۱) برای به‌دست آوردن ترتیب‌های نرخ خطر و پراکندگی میان متغیرهای $X_{1:3}$ و $X^*_{1:3}$ قابل استفاده نیست.

فرع ۶ : فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(\alpha,\beta,\lambda_i)$، $i=1,\dots,n$ و $X^*_1,\dots,X^*_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X^*_i \sim GG(\alpha,\beta,\lambda^*_i)$، باشند. آن‌گاه، برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ داریم:

$$(\log\lambda_1,\dots,\log\lambda_n) \succeq_w (\log\lambda^*_1,\dots,\log\lambda^*_n) \Longrightarrow X^*_{1:n} \geq_{st} X_{1:n}$$

دقت شود که با استفاده از فرع‌های ۴ و ۵، برای حالاتی که $\alpha < 1$ و $\beta > 1$ یا $\alpha > 1$ و $\beta < 1$ باشند، نمی‌توان ترتیب‌های نرخ خطر و پراکندگی میان سیستم‌های سری را نتیجه گرفت. در این حالات، فرع ۶ می‌تواند مفید واقع شود.

مثال ۵ : فرض کنید X_1، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(4, 0/6, \lambda_i)$، $i = 1,2,3$، باشند به‌طوری‌که $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (e^3, e^5, e^8)$. همچنین، فرض کنید X^*_1، X^*_2 و X^*_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim GG(4, 0/6, \lambda^*_i)$ باشند به‌طوری‌که $(\lambda^*_1,\lambda^*_2,\lambda^*_3) = (e^2, e^6, e^7)$. واضح است که $(\log\lambda_1,\log\lambda_2,\log\lambda_3) \succeq_w (\log\lambda^*_1,\log\lambda^*_2,\log\lambda^*_3)$. در نتیجه طبق فرع ۶ $X^*_{1:3} \geq_{st} X_{1:3}$ است.

بحث و نتیجه گیری

سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌هایی که از مدل مقیاس پیروی می‌کنند، مورد مطالعه قرار گرفته و ترتیب‌های تصادفی متفاوتی میان آنها بررسی گردید. همچنین، توزیع‌های طول عمر شناخته شده وایبول نمایی شده و گامای تعمیم یافته به عنوان مصداق‌هایی از نتایج حاصل، بیان گردید. نتایج این مقاله، تعمیم‌دهنده و کامل‌کننده نتایج موجود در مقالات مرتبط در این زمینه هستند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر این مقاله شد کمال قدردانی و تشکر را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع. (۱۳۹۲)، نتایجی جدید در مقایسه تصادفی سیستم‌های ($n-$ ۱) از n، مجله علوم آماری ایران، ۷، ۴۴-۲۵.

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع.، عبداله‌زاده، م. (۱۳۹۱)، مقایسه تصادفی فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی، مجله علوم آماری ایران، ۷، ۳۹-۵.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1992), *A First Course in Order Statistics*, John Wiley, New York.

Balakrishnan, N. and Rao, C. R. (Eds), (1998a), *Handbook of Statistics 16-Order Statistics: Theorey and Methods*, North-Holland, Amsterdam.

Balakrishnan, N. and Rao, C. R. (Eds), (1998b), *Handbook of Statistics 17-Order Statistics: Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Barbour, A. D., Lindvall, T. and Rogers, L. C. G. (1991), Stochastic Ordering of Order Statistics, *Journal of Applied Probability*, **28**, 276-286.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Bon, J. L. and Paltanea, E. (2006), Comparisons of Order Statistics in a Random Sequence to the Same Statistics with i.i.d Variables, *ESAIM: Probability and Statistics*, **10**, 1-10.

David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003), *Order Statistics*, 3rd Ed., John Wiley, Hoboken, New Jersey.

Hu, T. (1995), Monotone Coupling and Stochastic Ordering of Order Statistics, *System Science and Mathematical Sciences*, **8**, 209-214.

Khaledi, B., Farsinezhad, S. and Kochar, S. C. (2011), Stochastic Comparisons of Order Statistics in the Scale Model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 276-286.

Kleiber, C. and Kotz, S. (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Acturial Sciences*, John Weily, Hoboken, New Jersey.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer Verlag, New York.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007), *Life Distributions*, Springer Verlag, New York.

Modhulkar, G. S. and Serivastava, D. K. (1993), Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure Rate Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299-302.

Pledger, P. and Proschan, F. (1971), Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogenous Distributions, In: *Optimizing Methods in Statistics* (Eds., J.S. Rustagi), p.p. 89-113, Academic Press, New York.

Shaked, M. and Shantikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer Verlag, New York.