مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۰

جلد ۵، شماره ۱، ص ۶۱-۷۴

مولدهای انعطاف‌پذیر برای مفصل‌های FGM تعمیم‌یافته

محمدحسین علامت‌ساز، فروغ ماه‌پیشانیان

گروه آمار، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۳/۲۰ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۹۰/۵/۱۶

چکیده : خانواده‌ای از تعمیم‌های مفصل FGM موسوم به خانواده نیمه پارامتری وجود دارد که توسط تابع مولد توزیع-پایه ایجاد می‌شود. این مولدها عموما برای توزیع‌های متقارن بررسی شده‌اند و انعطاف‌پذیری کمی دارند. در این مقاله روشی برای به دست آوردن توزیع‌های نامتقارن پیشنهاد می‌شود که انعطاف‌پذیری مولدهای توزیع-پایه و در نتیجه مدل را افزایش می‌دهد. علاوه بر این روشی برای تعمیم مولدها در حالت کلی ارایه خواهد شد که می‌تواند برای انعطاف‌پذیرتر کردن مولدهای توزیع-پایه نیز به کار گرفته شود. با افزایش انعطاف‌پذیری مولدها می‌توان مدل مطلوب‌تری برای داده‌های واقعی پیدا کرد.

واژه‌های کلیدی : تابع امتیاز، چگالی چندکی، خانواده نیمه پارامتری، مولد توزیع-پایه، مولد نامتقارن.

° . آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمدحسین علامت‌ساز، alamatho@sci.ui.ac.ir

° . کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۰E۹۹

۱ مقدمه

مفصل دو متغیره C، تابعی از $I^2=[0,1]^2$ به I است که در دو شرط زیر صدق می‌کند

۱) برای هر (u,v) متعلق به I^2،

$$\begin{aligned} C(u,0) &= C(0,v)=0, \\ C(u,1) &= u, C(1,v)=v, \end{aligned}$$

۲) برای هر u_1، u_2، v_1 و v_2 متعلق به I به طوری که $u_1 \leq u_2$ و $v_1 \leq v_2$،

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\geq 0.$$

قضیه اسکلار نشان می‌دهد هر توزیع دو متغیره با توزیع توأم H و کناری‌های F و G را می‌توان به صورت $H(x,y)=C(F(x),G(y))$ نوشت، که در آن C یک مفصل است (نلسن، ۲۰۰۶).

یکی از مفصل‌های معروف، مفصل FGM[1] است، که توسط فارلی (۱۹۶۰)، گامبل (۱۹۶۰) و مورگنسترن (۱۹۵۶) مورد مطالعه قرار گرفته و شکل کلی آن به صورت

$$C_\theta(u,v)=uv(1+\theta(1-u)(1-v)),\quad -1\leq\theta\leq 1,\ 0\leq u,v\leq 1.$$

است. این مفصل برای وابستگی‌های کم مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا ضریب همبستگی اسپیرمن آن تنها مقدارهای متعلق به بازه $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ را اختیار می‌کند و این یکی از محدودیت‌های مفصل FGM است. برای افزایش این محدوده تعمیم‌هایی ارایه شده است. یکی از این تعمیم‌ها در نظر گرفتن یک خانواده نیمه پارامتری به صورت

$$C_{\theta,\phi}(u,v)=uv+\theta\phi(u)\phi(v) \tag{1}$$

[1] Farlie-Gumbel-Morgenstern

با $\theta \in [-۱, ۱]$ است، که اولین بار توسط رودریگز - لالنا (۱۹۹۲) معرفی شد و املارد و گیرارد (۲۰۰۲ و ۲۰۰۵) آن را توسعه دادند. فیشر و کلین (۲۰۰۷) روش جالبی برای ساختن تابع ϕ که "تابع مولد" مفصل $C_{\theta,\phi}$ نامیده می‌شود، معرفی کردند. در این روش که بر اساس توزیع‌ها بنا شده است، افزودن پارامترهای مقیاسی و مکانی به توزیع، انعطاف‌پذیری آن را افزایش نمی‌دهد.

در این مقاله در بخش ۲ مولدهای توزیع-پایه معرفی می‌شود. در بخش ۳ با افزودن یک پارامتر ارتجاعی، مولدهای نامتقارن ایجاد می‌شوند که نسبت به مولدهای معمولی انعطاف‌پذیری بیشتری دارند و در حالت خاص به مولدهای متقارن تبدیل می‌شوند. در بخش ۴ نشان داده می‌شود که هر مولد از جمله مولد توزیع-پایه را می‌توان برای انعطاف‌پذیری بیشتر تعمیم داد. در پایان ویژگی‌های وابستگی برای مفصل‌هایی با مولدهای توزیع-پایه به دست آورده می‌شوند.

۲ مولدهای توزیع-پایه

خانواده نیمه پارامتری متقارن به صورت (۱) را در نظر بگیرید. املارد و گیرارد (۲۰۰۲) نشان دادند که تابع $C_{\theta,\phi}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ مفصل است، اگر و فقط اگر تابع ϕ روی I مطلقاً پیوسته باشد و در شرط‌های زیر صدق کند،

۱) برای تقریبا هر u متعلق به I

$$|\phi'(u)| \leq ۱, \tag{۲}$$

۲) برای هر u متعلق به I

$$|\phi(u)| \leq \min\{u, ۱-u\}, \tag{۳}$$

در این صورت $C_{\theta,\phi}$ مطلقاً پیوسته خواهد بود.

به عنوان مثال تابع‌های $u(۱-u)(۱-۲u)$ و $\min\{u, ۱-u\}$ در شرط‌های فوق صدق می‌کنند و بنابراین می‌توانند مولد مفصل $C_{\theta,\phi}$ باشند. در ادامه مولدهای توزیع-پایه معرفی و روش به دست آوردن آن‌ها شرح داده می‌شود.

تعریف ۱ : فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی و توزیع به ترتیب $f(x)$ و $F(x)$ و تابع چندکی $F^{-1}(x)$ باشد. "تابع چگالی چندکی" به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\xi_f(u) = f(F^{-1}(u)), \quad u \in I.$$

اگر ξ_f به عنوان مولد مفصل به صورت C_{θ,ξ_f} در نظر گرفته شود، به آن مولد توزیع-پایه می‌گویند.

فیشر و کلین (۲۰۰۷) در حالتی که f مشتق پذیر و متقارن باشد، ثابت کردند ξ_f مولد مفصل نیمه پارامتری C_{θ,ξ_f} است، اگر و فقط اگر دو شرط

$$\psi_f(x) \leq 1, \quad x \leq 0, \tag{4}$$

$$\psi_F(x) \leq 1, \quad x \leq 0, \tag{5}$$

برقرار باشند که در آن $\psi_g(x)$ یا قدر مطلق "تابع امتیاز تعمیم‌یافته" برای یک تابع مثبت مشتق پذیر $g : R \to R^+$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi_g(x) = |-\frac{d}{dx}\ln(g(x))| = |\frac{g'(x)}{g(x)}|.$$

علاوه بر این $\psi^*_g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ "تابع امتیاز تعمیم‌یافته" نامیده می‌شود.

مثال ۱ : فرض کنید X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، در این صورت داریم

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R,$$
$$\psi_f^{Norm} = |x| > 1, \quad x < -1,$$

شرط (۴) برقرار نیست و ξ_{Norm} نمی‌تواند یک مولد توزیع-پایه باشد.

مثال ۲ : فرض کنید X دارای توزیع لجستیک باشد. در این صورت داریم

$$F_{Log}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x \in R,$$

$$\psi_F^{Log}(x) = |\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}| \leq 1, \quad x \leq 0,$$ (در واقع برای هر $x \in R$ برقرار است)

$$\psi_f^{Log}(x) = |\frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}}| \leq 1, \quad x \leq 0,$$ (در واقع برای هر $x \in R$ برقرار است)

در نتیجه رابطه‌های (۴) و (۵) برقرار هستند و ξ_{Log} یک مولد توزیع–پایه است. در واقع داریم

$$\xi_{Log}(u) = f_{Log}(F_{Log}^{-1}(u)) = u(1-u),$$

و این همان مولد خانواده FGM استاندارد است.

۳ مولدهای توزیع–پایه انعطاف‌پذیر

روشن است که افزودن پارامترهای مقیاس و مکان به یک توزیع، انعطاف‌پذیری آن را افزایش می‌دهد و به نظر می‌رسد در این‌جا نیز بتوان از این ایده استفاده کرد. اما می‌توان نشان داد افزودن این پارامترها به توزیع، انعطاف‌پذیری آن را افزایش نمی‌دهد، برای این‌که بتوان مولد را انعطاف‌پذیر کرد از روش دیگری باید استفاده نمود. یکی از این روش‌ها، استفاده از یک پارامتر ارتجاعی[۲] برای به توان رساندن تابع توزیع است که خود یک تابع توزیع جدید ایجاد می‌کند. به توان رساندن تابع توزیع روی تقارن تابع چگالی تاثیر می‌گذارد و دیگر نمی توان از رابطه‌های (۴) و (۵) استفاده کرد. اما در حالت کلی، به کمک تابع چگالی چندکی و لم زیر می‌توان تابع مولد توزیع–پایه به دست آورد.

لم ۱ : اگر تابع چگالی f مشتق پذیر باشد، آنگاه

الف) $|\xi'_f(u)| \leq 1, u \in I \quad \Leftrightarrow \quad \psi_f(x) \leq 1, x \in R$،

ب) $|\xi_f(u)| \leq \min\{u, 1-u\}, u \in I \Leftrightarrow \psi_F(x) \leq 1, \psi_{\bar{F}}(x) \leq 1, x \in R$

برهان : با استدلالی مشابه با لم ۲ فیشر و کلین اثبات می‌شود.

تذکر ۱ : فرض کنید تابع چگالی f مشتق پذیر و متقارن باشد. در این صورت اگر برای هر $x \in R$، $\psi_F(x) \leq 1$ آنگاه $\psi_{\bar{F}}(x) \leq 1$. زیرا با توجه به تقارن f، $f(x) = f(-x)$ و $F(x) = \bar{F}(-x)$. در نتیجه،

$$\psi_{\bar{F}}(x) = |\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}| = |\frac{f(-x)}{F(-x)}| = \psi_F(-x).$$

---

[۲] Resilience parameter

بنابراین اگر برای هر $x \in R$، $\psi_F(x) \leq ۱$ آنگاه $\psi_{\bar{F}}(x) \leq ۱$.

این نکته نشان می‌دهد در حالتی که f مشتق پذیر و متقارن باشد، لم ۱ با رابطه‌های (۴) و (۵) معادل است.

مثال ۳ : فرض کنید X دارای توزیع لجستیک باشد. اگر تابع توزیع X به توان α رسانده شود، توزیع لجستیک نامتقارن به دست می‌آید. تابع چگالی لجستیک نامتقارن برای هر $\alpha > ۰$، که در آن α پارامتر چولگی است، تعریف شده است. در واقع تابع چگالی لجستیک برای $\alpha < ۱$ چوله مثبت، برای $\alpha > ۱$ چوله منفی و برای $\alpha = ۱$ متقارن است. اما برای یافتن تابع مولد داریم

$$F_{AL}(x;\alpha) = (\frac{۱}{۱+e^{-x}})^{\alpha},\ x \in R,$$
$$F_{AL}^{-۱}(x;\alpha) = -\ln(x^{-۱/\alpha} - ۱),\ x \in I,$$
$$\psi_F^{AL}(x) = |\frac{\alpha e^{-x}}{۱+e^{-x}}| \leq \alpha,\ x \in R,$$
$$\psi_f^{AL}(x) = |\frac{\alpha e^{-x} - ۱}{۱+e^{-x}}| \leq \max\{\alpha, ۱\},\ x \in R,$$
$$\psi_{\bar{F}}^{AL}(x) = |\frac{\alpha e^{-x}}{(۱+e^{-x})^{\alpha+۱}(۱-\frac{۱}{(۱+e^{-x})^{\alpha}})}| \leq ۱,\ x \in R.$$

بدیهی است اگر $۰ < \alpha < ۱$، آنگاه

$$\xi_{AL}(u) = f_{AL}(F_{AL}^{-۱}(u)) = \alpha u(۱ - u^{۱/\alpha})$$

مولد مفصل $C_{\theta,\xi_{AL}}$ است. اگر $\alpha = ۱$، همان $\xi_{Log}(u) = u(۱-u)$ به دست می‌آید. اما برای $\alpha > ۱$، ξ_{AL} به صورت فوق نمی‌تواند مولد باشد. این‌جا این سوال پیش می‌آید که آیا روشی برای به دست آوردن تابع مولد در این حالت وجود ندارد؟

نکته زیر به ما کمک می‌کند تا در موردهایی مانند مثال ۳ که ψ_f، ψ_F و $\psi_{\bar{F}}$ هر سه کراندارند اما برخی از این کران‌ها بزرگتر از یک هستند نیز بتوان مولد را به‌دست آورد.

تذکر ۲ : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی و توزیع به ترتیب f و F باشد. اگر برای $۰ < \alpha < \infty$ داشته باشیم $\psi_f(x) \leq \alpha$، $\psi_F(x) \leq \alpha$ و $\psi_{\bar{F}}(x) \leq \alpha$ آنگاه $\xi_f^*(u) = \frac{\xi_f(u)}{\alpha}$ مولد مفصل C_{θ,ξ_f^*} برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ خواهد بود.

با استفاده از تذکر ۲، برای تابع چگالی لجستیک با $\alpha > ۱$، تابع مولد توزیع-پایه به صورت $\xi^*_{AL}(u) = \frac{۱}{\alpha}\xi_{AL}(u) = u(۱ - u^{\frac{۱}{\alpha}})$ به دست می‌آید. در واقع این مولد، مفصل هانگ و کوتز را به دست می‌دهد که انعطاف پذیرتر از $u(۱ - u)$ است.

با توجه به تذکر، بدیهی است که تذکر ۲ می تواند برای مولدهای متقارن نیز به کار گرفته شود که شرط‌های ضعیف‌تری را نسبت به شرط‌های فیشر و کلین یعنی رابطه‌های (۴) و (۵) بیان می‌کند. در واقع تذکر ۲ این امکان را فراهم می‌سازد که مولدهای بیشتری برای مفصل $C_{\theta,\phi}$ به دست آید.

در مجموع برای هر تابع چگالی g یک متغیره و مطلقاً پیوسته که برای آن ψ_g، $\psi_{\bar{G}}$ و ψ_G هر سه کراندار باشند، می‌توان مولد مفصل نیمه پارامتری به دست آورد.

۴ مولدهای تعمیم‌یافته

در این بخش روشی دیگر برای انعطاف‌پذیری مولدها پیشنهاد می‌شود که برای هر مولد، از جمله مولدهای توزیع-پایه می‌تواند کاربرد داشته باشد. این روش به توان رساندن تابع مولد یعنی استفاده از پارامتر ارتجاعی برای تابع مولد است که یک تابع مولد تعمیم‌یافته ایجاد می‌کند. این مولد تعمیم‌یافته ممکن است ویژگی‌های وابستگی متفاوتی با مولد اولیه داشته باشد.

قضیه ۱ : اگر ϕ تابع مولد مفصل $C_{\theta,\phi}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ باشد، آنگاه با فرض $\alpha \geq ۲$، تابع ϕ^α نیز برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$، مولد مفصل C_{θ,ϕ^α} است.

برهان : ابتدا نشان داده می‌شود که $|\phi^\alpha(u)| \leq \min(u, ۱ - u)$. از آن‌جا که ϕ تابع مولد است داریم

$$۰ \leq |\phi(u)| \leq \min(u, ۱ - u) \leq ۱, \quad u \in I.$$

در نتیجه با فرض $\alpha \geq ۲$

$$۰ \leq |\phi^\alpha(u)| \leq |\phi(u)| \leq \min(u, ۱ - u) \leq ۱.$$

حال کافیست نشان داده شود که رابطه $|(\phi^{\alpha}(u))'| \leq ۱$ نیز برقرار است. از آن‌جا که ϕ تابع مولد و در نتیجه $|\phi'(u)| \leq ۱$ است، داریم

$$|(\phi^{\alpha}(u))'| = |\alpha\phi'(u)\phi^{\alpha-۱}(u)| \leq \alpha|\phi^{\alpha-۱}(u)|.$$

از طرفی

$$۰ \leq |\phi(u)| \leq \min(u, ۱-u)$$

در نتیجه $|\phi(u)| \leq \frac{۱}{۲}$، بنابراین

$$\begin{aligned} |(\phi^{\alpha}(u))'| \leq \alpha|\phi^{\alpha-۱}(u)| &\leq \alpha(\frac{۱}{۲})^{\alpha-۱} \\ &\leq ۱, \quad \alpha \geq ۲ \end{aligned}$$

و برهان کامل است.

مثال ۴ : در مثال ۲ نشان داده شد که $\xi_{Log}(u) = u(۱-u)$. حال اگر ξ_{Log} به توان α رسانده شود، داریم

$$\xi_{Log}^{\alpha}(u) = (\xi_{Log}(u))^{\alpha} = u^{\alpha}(۱-u)^{\alpha}.$$

بنابراین با فرض $\alpha = ۱$ یا $\alpha \geq ۲$، ξ_{Log}^{α} مولد مفصل $C_{\theta,\xi_{Log}^{\alpha}}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ است. در واقع این مولد که انعطاف‌پذیرتر از $u(۱-u)$ است، همان مولد مفصل لای و خای (۲۰۰۰) به صورت

$$C(u,v) = uv + \theta u^{\alpha}v^{\alpha}(۱-u)^{\beta}(۱-v)^{\beta}$$

با فرض $\alpha = \beta$ و $\alpha \geq ۲$ است. حال اگر $\xi_{AL}^{*}(u) = u(۱-u^{\frac{۱}{\beta}})$ با فرض $\beta \geq ۱$ به توان α رسانده شود داریم

$$\xi_{AL}^{*^{\alpha}}(u) = u^{\alpha}(۱-u^{\frac{۱}{\beta}})^{\alpha}.$$

که با فرض $\alpha = ۱$ یا $\alpha \geq ۲$، $\xi^{*\alpha}_{AL}$ مولد مفصل $C_{\theta,\xi^{*\alpha}_{AL}}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ است. بدیهی است که این مولد انعطاف‌پذیرتر از ξ_{Log} و ξ_{AL} و نیز ξ^{α}_{Log} است و در حالت خاص به تمامی آن‌ها تبدیل می‌شود.

البته برای برخی مولدها با فرض $\alpha > ۲$ نیز ϕ^{α} می‌تواند مولد مولد مفصل $C_{\theta,\phi^{\alpha}}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ باشد. اما مثال زیر نشان می‌دهد این امر کلی نیست.

مثال ۵ : فرض کنید $\phi(u) = \min(u, ۱ - u)$، در این صورت

$$\phi^{\alpha}(u) = (\phi(u))^{\alpha} = (\min(u, ۱ - u))^{\alpha}.$$

در نتیجه به جز در $u = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$|\phi^{\alpha\prime}(u)| = \alpha[\min(u, ۱ - u)]^{\alpha - ۱}.$$

حال فرض کنید $\alpha = ۱/۵$، برای $u = ۰/۴۹$ داریم

$$|\phi^{\alpha\prime}(u)| = ۱/۵(۰/۴۹)^{۰/۵} = ۱/۰۵ > ۱.$$

بنابراین با فرض $\alpha = ۱/۵$، $\phi^{\alpha}(u) = (\min(u, ۱ - u))^{\alpha}$ نمی‌تواند مولد مفصل $C_{\theta,\phi^{\alpha}}$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ باشد.

در ادامه نشان داده می‌شود که مولدهای تعمیم‌یافته ممکن است ویژگی‌های وابستگی متفاوتی با ویژگی‌های مولد اولیه داشته باشند. اما ابتدا باید مفاهیم وابستگی مورد نظر معرفی شوند.

تعریف ۲ : الف) وابستگی مربعی مثبت[۳] (PQD). جفت متغیر تصادفی (X, Y) را وابسته مربعی مثبت گویند، اگر برای هر (x, y)، $P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$.

ب) نزولی دنباله‌ای از چپ[۴] $(LTD(Y|X))$. متغیر تصادفی Y را نزولی دنباله‌ای از چپ بر حسب X گویند، اگر $P(Y \leq y|X \leq x)$ برای هر y نسبت به x غیرصعودی باشد.

---

۳ Positive Quadrant Dependent

۴ Left Tail Decreasing

پ) صعودی دنباله‌ای از راست[۵] ($RTI(Y|X)$). متغیر تصادفی Y را صعودی دنباله‌ای از راست بر حسب X گویند، اگر $P(Y > y|X > x)$ برای هر y نسبت به x غیرنزولی باشد.
ت) به طور تصادفی صعودی[۶] ($SI(Y|X)$). متغیر تصادفی Y را به طور تصادفی صعودی بر حسب X گویند، اگر $P(Y > y|X = x)$ برای هر y نسبت به x غیرنزولی باشد.
ث) در گوشه راست صعودی[۷] ($RCSI$). متغیرهای تصادفی X و Y را در گوشه راست صعودی گویند، اگر $P(Y > y, X > x|Y > y', X > x')$ برای تمام مقدارهای x و y، نسبت به x' و y' غیرنزولی باشد.
ج) در گوشه چپ نزولی[۸] ($LCSD$). متغیرهای تصادفی X و Y را در گوشه چپ نزولی گویند، اگر $P(Y \leq y, X \leq x|Y \leq y', X \leq x')$ برای تمام مقدارهای x و y، نسبت به x' و y' غیرصعودی باشد.

قضیه زیر کمک می‌کند تا مفاهیم وابستگی برای مفصل $C_{\theta,\phi}$، بر حسب تابع مولد ϕ بیان شوند.

قضیه ۲ (املارد و گیرارد، ۲۰۰۲): فرض کنید بردار تصادفی (X, Y) پیوسته با تابع مفصل $C_{\theta,\phi}$ و $\theta > ۰$ باشد. در این صورت داریم
الف) X و Y، PQD هستند، اگر و فقط اگر برای هر $u \in I$ داشته باشیم $\phi(u) > ۰$ یا $\phi(u) < ۰$.
ب) X و Y، LTD هستند، اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u}$ یکنوا باشد.
پ) X و Y، RTI هستند، اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u-۱}$ یکنوا باشد.
ت) X و Y، $LCSD$ هستند، اگر و فقط اگر LTD باشند.
ث) X و Y، $RCSI$ هستند، اگر و فقط اگر RTI باشند.
ج) X و Y، SI هستند، اگر و فقط اگر $\phi(u)$ محدب یا مقعر باشد.

---
۵ Right Tail Increasing
۶ Stochastically Increasing
۷ Right Corner Set Increasing
۸ Left Corner Set Decreasing

با استفاده از قضیه ۲ به سادگی می‌توان نشان داد که مفصل تولید شده توسط مولد $\xi_{Log}(u) = u(۱ - u)$، دارای ویژگی‌های PQD، LTD، RTI، SI و در نتیجه $LCSD$ و $RCSI$ است. اما برای مولد $\xi^{\alpha}_{Log}(u) = (\xi_{Log}(u))^{\alpha} = u^{\alpha}(۱ - u)^{\alpha}$، تابع‌های قسمت‌های ب و پ به ازای $\alpha \neq ۱$ یکنوا نیستند و در نتیجه $\xi^{\alpha}_{Log}(u)$ فقط دارای ویژگی PQD است. در واقع این مولد تعمیم‌یافته کمک می‌کند تا یک مفصل با ویژگی‌های متفاوت حاصل شود.

با توجه به تعریف مولد توزیع-پایه، بدیهی است که این تابع‌ها فقط مقدارهای نامنفی را اختیار می‌کنند بنابراین شرط‌های یکنوایی تابع‌های قسمت‌های ب و پ قضیه ۲ به غیرصعودی بودن کاهش می‌یابند و می‌توان قضیه ۲ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

قضیه ۳ : اگر بردار تصادفی (X, Y) پیوسته با تابع مفصل $C_{\theta,\phi}$، $\theta > ۰$ و ϕ یک مولد توزیع-پایه باشد، آنگاه

الف) X و Y، PQD هستند.

ب) X و Y، LTD هستند، اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u}$ غیرصعودی باشد.

پ) X و Y، RTI هستند، اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u-۱}$ غیرصعودی باشد.

ت) X و Y، SI هستند، اگر و فقط اگر $\phi(u)$ مقعر باشد.

برهان : الف) تابع ϕ فقط مقدارهای مثبت را اختیار می‌کند. در نتیجه بنابر قضیه ۲، X و Y، PQD هستند.

ب) طبق قضیه ۲، X و Y، LTD هستند، اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u}$ یکنوا باشد. اما $\frac{\phi(u)}{u}$ یکنوا است اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned}[\frac{\phi(u)}{u}]' &= \frac{u\phi'(u) - \phi(u)}{u^{۲}} \leq (\geq) ۰,\ u \in I \\ &\Leftrightarrow\ u\phi'(u) \leq (\geq) \phi(u),\ u \in I.\end{aligned}$$

حال اگر $\frac{\phi(u)}{u}$ غیرنزولی باشد، برای هر u متعلق به I، $u\phi'(u) \geq \phi(u)$ خواهد بود. چون ϕ فقط مقدارهای مثبت را اختیار می‌کند، باید $\phi'(u) \geq ۰$ باشد. از طرفی $\phi(۰) = \phi(۱) = ۰$. اما چون ϕ مطلقاً پیوسته است، $\phi'(u)$ نمی‌تواند همواره مثبت باشد. در نتیجه $\frac{\phi(u)}{u}$ فقط می‌تواند غیرصعودی باشد.

پ) طبق قضیه ۲، X و Y، RTI هستند اگر و فقط اگر $\frac{\phi(u)}{u-1}$ یکنوا باشد. اما $\frac{\phi(u)}{u-1}$ یکنوا است هرگاه

$$\begin{aligned}[\frac{\phi(u)}{u-1}]' &= \frac{(u-1)\phi'(u)-\phi(u)}{(u-1)^2} \leq (\geq) 0, \ u \in I \\ &\Leftrightarrow \ (u-1)\phi'(u) \leq (\geq) \phi(u), \ u \in I.\end{aligned}$$

اگر $\frac{\phi(u)}{u-1}$ غیرنزولی باشد، برای هر u متعلق به I، $(u-1)\phi'(u) \geq \phi(u)$ خواهد بود. به طور مشابه با قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت که $\phi'(u)$ نمی‌تواند همواره منفی باشد. در نتیجه $\frac{\phi(u)}{u-1}$ فقط می‌تواند غیرصعودی باشد.

ت) طبق قضیه‌ی ۲، X و Y، SI هستند اگر و فقط اگر $\phi(u)$ محدب یا مقعر باشد. اما $\phi(0) = \phi(1) = 0$ و چون $\phi(u)$ مطلقاً پیوسته و همواره مثبت است، نمی‌تواند محدب باشد.

قضیه‌های ۲ یا ۳ در صورتی کاربرد دارند که مولد توزیع-پایه به دست آورده شده باشند. اما گاهی ممکن است به مولدی نیاز باشد که ویژگی‌های وابستگی خاصی را دارا باشد. در این صورت می‌توان با استفاده از فرع زیر، قبل از یافتن مولد توزیع-پایه و فقط با استفاده از توزیع آن، ویژگی‌های وابستگی بردار تصادفی (X,Y) را به دست آورد.

فرع ۱ : اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته و همتوزیع با تابع چگالی f و مفصل $C_{\theta,\phi}$، $\theta > 0$ و ϕ مولد توزیع-پایه متناظر با f باشد، آنگاه

الف) X و Y، LTD هستند، اگر و فقط اگر برای هر x متعلق به R، $\psi_f^* \leq \psi_F^*(x)$.

ب) X و Y، RTI هستند، اگر و فقط اگر برای هر x متعلق به R، $\psi_{\bar{F}}^* \leq \psi_f^*(x)$.

پ) X و Y، SI هستند، اگر و فقط اگر برای هر x متعلق به R، $\psi_{f'}^* \leq \psi_f^*(x)$.

علاوه بر این‌ها به جای این‌که یک مولد به توان رسانده شود، می‌توان حاصل ضرب تعدادی متناهی از مولدها با هر توانی را به عنوان مولد در نظر گرفت. برای این منظور کافیست ثابت شود که حاصل ضرب هر دو مولد دلخواه مفصل $C_{\theta,\phi}$، برای هر $\theta \in [-1,1]$، یک مولد مفصل $C_{\theta,\phi}$ برای هر $\theta \in [-1,1]$ است. البته باید توجه داشت از آن‌جا که این مولدها مقدارهای متعلق به $[0,\frac{1}{2}]$ را اختیار می کنند، با افزایش تعداد حاصل ضرب‌ها یا توان‌ها، مفصل $C_{\theta,\phi}$ به مفصل Π نزدیک می‌شود.

قضیه ۴ : حاصل ضرب هر دو مولد دلخواه مفصل نیمه پارامتری، خود یک مولد مفصل نیمه پارامتری است.

برهان : فرض کنید $\phi_۱$ و $\phi_۲$ دو تابع مولد دلخواه مفصل C_{θ,ϕ_i}، برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ باشند. در این صورت $|\phi_i(u)| \leq \min(u, ۱-u) \leq ۱$، $i = ۱, ۲$ خواهد بود. در نتیجه داریم

$$۰ \leq |\phi_۱(u)\phi_۲(u)| \leq [\min(u, ۱-u)]^۲ \leq \min(u, ۱-u),\ u \in I.$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} |\frac{d}{du}[\phi_۱(u)\phi_۲(u)]| &= |\phi_۱{}'(u)\phi_۲(u) + \phi_۱(u)\phi_۲{}'(u)| \\ &\leq |\phi_۱{}'(u)||\phi_۲(u)| + |\phi_۱(u)||\phi_۲{}'(u)| \\ &\leq \frac{۱}{۲}(|\phi_۱{}'(u)| + |\phi_۲{}'(u)|) \leq ۱. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌های (۲) و (۳) برقرار هستند و در نتیجه $\phi^*(u) = \phi_۱(u)\phi_۲(u)$ برای هر $\theta \in [-۱, ۱]$ مولد مفصل C_{θ,ϕ^*} است.

بحث و نتیجه‌گیری

تابع مفصل نیمه پارامتری یکی از تعمیم‌های معروفی است که برای مفصل FGM در نظر گرفته می‌شود. مفصل نیمه پارامتری توسط تابع مولد ایجاد می‌شود. در این مقاله دسته‌ای از این مولدها تحت عنوان مولدهای توزیع-پایه در نظر گرفته شد و با استفاده از پارامتر ارتجاعی، انعطاف‌پذیری آن‌ها افزایش داده شد. همچنین نشان داده شد که با استفاده از پارامتر ارتجاعی می‌توان مولدهایی با ویژگی‌های وابستگی متفاوت به دست آورد. علاوه بر این نشان داده شد که حاصل ضرب هر دو مولد دلخواه مفصل نیمه پارامتری خود یک مولد مفصل نیمه پارامتری است و بدین طریق می‌توان مولدهای بیشتری برای مفصل نیمه پارامتری به دست آورد.

مراجع

Amblard, C. and Girard, S. (2002), Symmetry and Dependence Properties within a Semiparametric Family of Bivariate Copulas, *Nonparametr Stat*, **14**, 715-727.

Amblard, C. and Girard, S. (2005), Estimation Procedures for a Semi-parametric Family of Bivariate Copulas, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **14**, 1-15.

Farlie, DJG. (1960), The Performance of some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution, *Biometrika*, **47**, 307-323.

Fischer, M. and Klein, I. (2007), Constructing Generalized FGM Copulas by Means of Certain Univariate Distributions, *Metrika*, **65**, 243-260.

Gumbel, EJ. (1960), Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.

Lai, CD. and Xie, M. (2000), A New Family of Positive Quadrant Dependent Bivariate Distributions, *Statistics and Probability Letters* **46**, 359-364.

Morgenstern, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, *Mitteilungsblatt fur Mathematische Statistik*, **8**, 234-235.

Nelsen, RB. (2006), *An Introduction to Copulas*, 2nd edn. Springer Series in Statistics, Springer, USA.

Rodriguez-Lallena, JA. (1992), *Estudio de la Compabilidad y Diseno de Nuevas Familias en la Teoria de Copulas. Aplicaciones.*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.