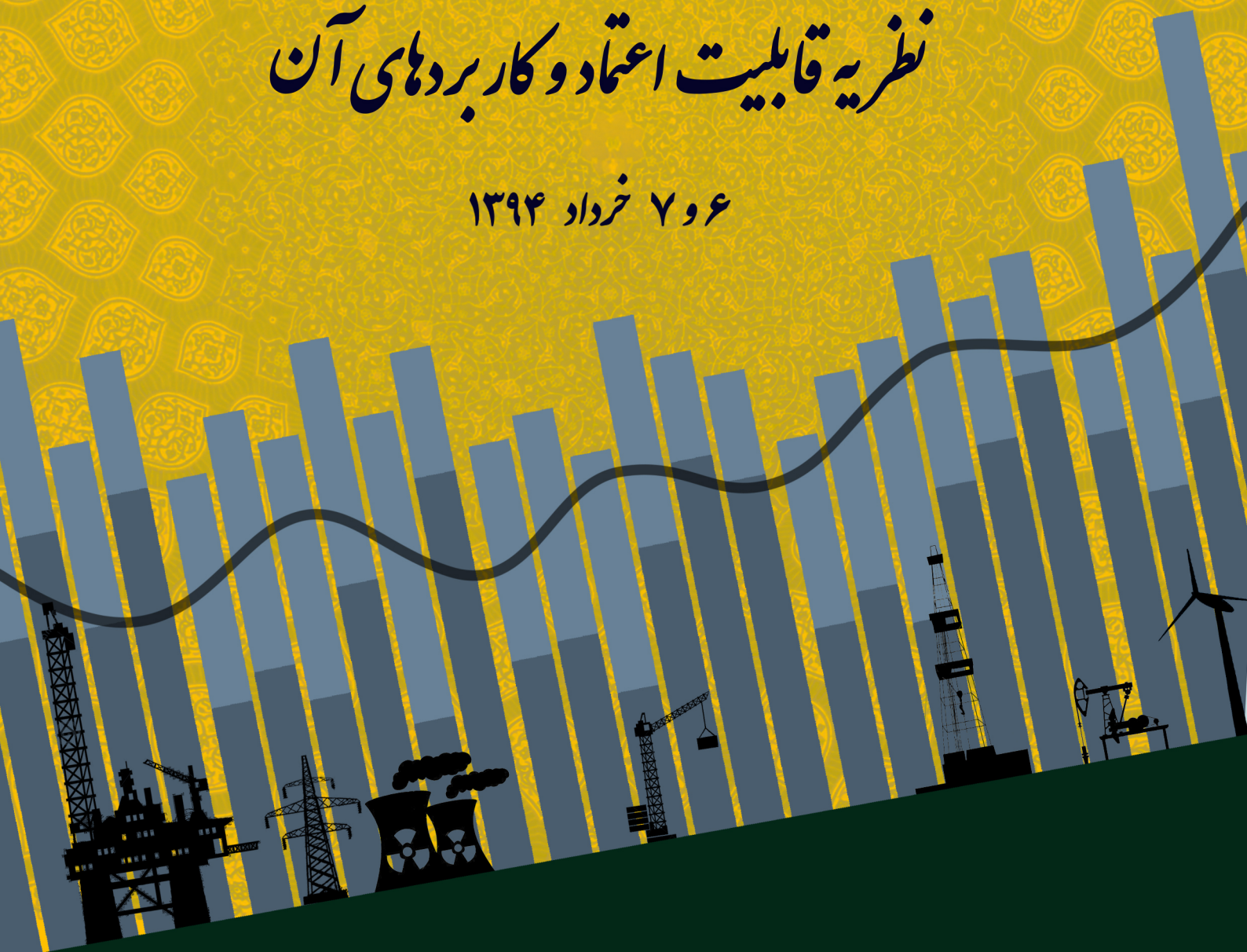




نخستین سمینار تخصصی

نظریه قابلیت اعتماد و کار بردهای آن

۶ و ۷ خرداد ۱۳۹۴



اصفهان، دانشگاه اصفهان، ساختمان علوم ریاضی و آمار

<http://osdce.um.ac.ir>



باسمه تعالی



مجموعه مقالات

نخستین سمینار تخصصی

نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

گروه آمار، دانشگاه اصفهان

با همکاری

قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی

۶ و ۷ خرداد ماه ۱۳۹۴

پیشگفتار

خداوند منان را شاکریم که این توفیق را به برگزارکنندگان اولین سمینار تخصصی "نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای" آن داد تا جمعی از پژوهشگران و علاقه‌مندان به مباحث قابلیت اعتماد را در سمیناری ۲ روزه در دانشگاه اصفهان گرد هم آورند. این سمینار به دنبال برگزاری موفقیت‌آمیز سه کارگاه تخصصی در زمینه قابلیت اعتماد برگزار می‌گردد که با همکاری "قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی" دانشگاه فردوسی مشهد در سال‌های اخیر برگزار گردید. امروزه مبحث قابلیت اعتماد به عنوان یکی از شاخه‌های بین رشته‌ای در آمار و مهندسی از اهمیت فراوانی در پیشبرد تکنولوژی برخوردار است. هدف از برگزاری این سمینار تخصصی فراهم نمودن بستری مناسب برای ارائه پژوهش‌های اعضای هیات علمی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی در زمینه‌های مختلف این شاخه علمی است. به‌ویژه پیشرفت‌های صورت گرفته در کشور در زمینه روش‌های ریاضی در قابلیت اعتماد به‌صورت سخنرانی عمومی، تخصصی و نمایش پوستر توسط مدعوین و شرکت‌کنندگان ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که پس از فراخوان سمینار، مقالات دریافت شده توسط اعضای کمیته علمی و کمیته داوران سمینار مورد ارزیابی و در نهایت ۶۸ مقاله به صورت سخنرانی و ۲۶ مقاله به صورت پوستر مورد پذیرش قرار گرفت. در پایان لازم می‌دانم از کمیته علمی، کمیته اجرایی و کمیته داوران سمینار نهایت تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم. همچنین مراتب قدردانی خود را از معاونت پژوهشی دانشگاه اصفهان جناب آقای دکتر اکبری، مدیر امور پژوهشی دانشگاه اصفهان جناب آقای دکتر رحیمی، مدیر گروه آمار جناب آقای دکتر کاظمی و رئیس پژوهشکده ریاضیات شاخه اصفهان (IPM) جناب آقای دکتر اسداللهی و همچنین روابط عمومی و مسئول امور عمومی دانشگاه اصفهان آقای آقابگی اعلام نمایم.

از خداوند منان آرزوی توفیق تمامی کسانی که در برگزاری این سمینار ما را یاری نمودند، دارم.

مجید اسدی
دبیر سمینار

اعضای کمیته علمی (به ترتیب حروف الفبا):

- دکتر جعفر احمدی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر ناصررضا ارقامی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر مجید اسدی، دانشگاه اصفهان (دبیر سمینار)
- دکتر فیروزه حقیقی، دانشگاه تهران
- دکتر بهاءالدین خالدی، دانشگاه رازی
- دکتر احمد خدادادی، دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر محمد خنجری صادق، دانشگاه بیرجند
- دکتر علی همدانی، دانشگاه صنعتی اصفهان

اعضای کمیته اجرایی (به ترتیب حروف الفبا):

- دکتر جعفر احمدی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر مجید اسدی، دانشگاه اصفهان
- دکتر نصرالله ایران‌پناه، دانشگاه اصفهان
- دکتر مهدی توانگر، دانشگاه اصفهان
- دکتر هادی جباری نوقایی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر احسان زمان‌زاده، دانشگاه اصفهان

اعضای کمیته دانشجویی (به ترتیب حروف الفبا):

- مریم آقارشتی، دانشگاه اصفهان
- مریم اثنا عشری، دانشگاه اصفهان
- سمیه اشرفی، دانشگاه اصفهان
- مرضیه باغبان، دانشگاه اصفهان
- سعید حیاتی، دانشگاه اصفهان
- فریبا عبدی، دانشگاه اصفهان

محورهای سمینار:

- استنباط آماری داده‌های قابلیت اعتماد
- آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته

- الگوهای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها
- قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم
- ترتیب‌های تصادفی در قابلیت اعتماد
- مدل‌های تنش-مقاومت
- قابلیت اعتماد شبکه‌ها
- مفاهیم سالخوردگی
- قابلیت اعتماد داده‌های فرسایشی
- تحلیل بقاء

فهرست

۲	اندازه اطلاع پیش‌بین در فرآیندهای تصادفی آقای رشتی، م.
۶	مقایسه توزیع وایبل و توزیع‌های آمیخته با وایبل اسماعیلیان، م.
۱۰	کاربرد ترتیب تصادفی کل زمان آزمون در قابلیت اعتماد اصفهانی، م.
۱۴	افزونی در سیستم‌های چند وضعیتی امیریان، ی.، خدادادی، ا.
۱۸	تعیین اندازه اهمیت اجزای سیستم بر مبنای نظریه اطلاع باغبان سیچانی، م.
۲۲	پیش‌بینی طول عمر باقیمانده سیستم‌های r از n دنباله‌ای برات‌نیا، م.، دوست‌پرست، م.
۲۶	شبیه‌سازی طرح قابلیت اطمینان سیستم‌های نیمه-مارکف گسسته-زمان سه حالتی جولایی، ح.
۳۰	برآوردیابی کلاسیک پارامتر تنش-مقاومت بر اساس توزیع لیندلی تعمیم یافته GLD5 رضائی، ا.، شرفی، م.، بهبودیان، ج.
۳۴	تحلیل بقاء پیشامدهای بازگشتی خاکی یادگار، س.، حبیبی راد، آ.
۳۸	پیش‌بینی در آزمون فشار-مرحله‌ای براساس سانسور فزاینده نوع دو صادقپور، ا.، رزمخواه، م.
۴۲	بهینه‌سازی آستانه زمان-تعمیر و دوره تعمیر پیشگیرانه صفائی، ف.، احمدی، ج.

۴۶	برآورد فاصله ای تعمیم یافته برای توزیع بیرنهام-ساندرز طوسیان، و.، عبدالله نژاد، ک.
۵۰	بهبود قابلیت دسترسی سیستم های سری- موازی تعمیرپذیر تحت فرض غیر ثابت بودن نرخ شکست اجزاء عبادی، ر.، زینل همدانی، ع.
۵۴	کاربرد ترتیب های تصادفی وابسته در قابلیت اعتماد محتشمی، و.، امینی، م.، احمدی، ج.
۵۸	کاربرد مدل شکنندگی وایبل- گاما در داده های پزشکی محمدی، م.، بزرگ، م.، امینی، م.
۶۲	مقایسه ی تصادفی G سیستم های k از n با مولفه ی آماده بکار سرد میمندی، ا. م.، احمدی، ج.

اندازه اطلاع پیش‌بین در فرآیندهای تصادفی

آقای رشتی، م^۱

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده

در بسیاری تحقیقات مربوط به آزمون‌های طول عمر، با محدودیت‌هایی مانند زمان و تعداد واحد نمونه مواجه هستیم، که این عوامل باعث می‌شود پژوهشگر دسترسی به کل داده‌ها نداشته باشد. بنابراین پیش‌بینی مقادیر آینده بر اساس اطلاعات واحدهایی از نمونه که در دسترس می‌باشند، ارزش مطالعه دارد. در این مقاله بررسی می‌کنیم که داده‌های یک فرآیند تصادفی چه مقدار اطلاع در مورد پیش‌بین فراهم می‌کنند.

کلمات کلیدی: آنتروپی، اطلاع پیش‌بین، توزیع پیش‌بین، فرآیند تصادفی، نرخ خطر

۱ مقدمه

یکی از مفاهیم مهم نظریه اطلاع، مفهوم آنتروپی است که توسط شانون (۱۹۴۸) معرفی شد. برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ ، آنتروپی شانون که آنتروپی تفاضلی نیز نامیده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(X) \equiv H(f) = - \int f(x) \log f(x) dx$$

همچنین آنتروپی تفاضلی مجموعه متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ با تابع چگالی توام $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = - \int f(x^n) \log f(x^n) dx^n$$

که در آن $\mathbf{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ می‌باشد. یکی از خواص آنتروپی شانون این است، هنگامی که هیچ گونه اطلاعاتی در مورد متغیر تصادفی X ، با تکیه‌گاه متناهی S ، در اختیار نداشته باشیم، توزیع یکنواخت با تکیه‌گاه S تنها توزیعی

^۱maryam.870@gmail.com

است که آنتروپی شانون را ماکسیمم می کند. یعنی هرچه مقدار $H(X)$ بیشتر شود توزیع به توزیع یکنواخت نزدیک تر می شود. از این رو توزیع کم چگال تر و پیش بینی بر اساس آن مشکل تر می شود. بنابراین می توان آنتروپی شانون را به عنوان معیاری برای اندازه گیری عدم حتمیت یا به عبارت دیگر یکنواختی توزیع X در نظر گرفت. در این مقاله فرض می کنیم آزمون طول عمر در طول یک دوره بررسی می شود. بنابراین مجموعه ای از متغیرهای تصادفی با اندیس مرحله یا زمان که وضعیت آزمون را نشان می دهد، خواهیم داشت. حال علاقمند هستیم که بررسی کنیم مشاهدات فرآیند چه مقدار اطلاع در مورد مرحله یا زمان بعدی فراهم می کنند.

۲ اندازه اطلاع پیش بین

فرآیند تصادفی $\chi = \{X_n, n \geq 1\}$ را در نظر بگیرید که در آن X_n وضعیت سیستم در زمان n می باشد. فرض کنید $\mathbf{X}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ و $F_n(\mathbf{X}_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، $n \geq 1$ ، توزیع احتمال توام بردار $\mathbf{X}_n$ است. برای پیش بینی وضعیت سیستم در زمان های بعدی باید به ساختار وابستگی فرآیند توجه شود و این بدین معناست که پیش بینی وضعیت سیستم در زمان n ، وابسته به وضعیت های قبلی سیستم، $X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$ می باشد. $F_n(x_n | \mathbf{X}_{n-1})$ توزیع شرطی و یا توزیع پیش بین نیز نامیده می شود. واریانس و مجذور ضریب همبستگی از جمله معیارهایی هستند که در اندازه گیری میزان عدم تمرکز استفاده می شوند. اما در بعضی از شرایط از این دو معیار نمی توان استفاده کرد. بنابراین برای پیش بینی نیاز به معیارهای دیگری برای اندازه گیری عدم تمرکز یک توزیع می باشد.

همانگونه که قبلا اشاره شد، آنتروپی شانون معیاری برای اندازه گیری عدم تمرکز توزیع می باشد. آنتروپی شانون به مقایسه توزیع F با توزیع یکنواخت می پردازد و از آنجایی که توزیع یکنواخت کمترین تمرکز را دارد، هرچه مقدار آنتروپی بیشتر باشد تابع چگالی f به تابع چگالی توزیع یکنواخت نزدیک تر است و پیش بینی نتیجه ای از آزمایش با توزیع F مشکل تر می شود. اندازه اطلاع بردار $\mathbf{X}_n$ برابر است با

$$I(\mathbf{X}_n) = -H(\mathbf{X}_n) = E[\log f_n(\mathbf{X}_n)].$$

آنتروپی توزیع پیش بین به صورت

$$H(X_n | \mathbf{X}_{n-1}) \equiv H[F_n(x_n | \mathbf{X}_{n-1})] = \int_S \log f_n(x_n | \mathbf{X}_{n-1}) dF_n(x_n | \mathbf{X}_{n-1})$$

که آنتروپی شرطی یک فرآیند نیز می نامند و به عنوان تابعی از بردار تصادفی $\mathbf{X}_{n-1}$ است و داریم

$$I(X_n | \mathbf{X}_{n-1}) = -H(X_n | \mathbf{X}_{n-1})$$

آنتروپی شرطی نقش مهمی در اندازه گیری اطلاع برای پیش بینی X_n در فرآیندهای تصادفی ایفا می کند. آنتروپی مورد انتظار فرآیند نیز برابر است با

$$H_n \equiv E[H(X_n | \mathbf{X}_{n-1})] = \int_{S_{n-1}} H(X_n | \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}) dF_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}).$$

آنتروپی شرطی نقش مهمی در اندازه‌گیری اطلاع برای پیش‌بینی X_n در فرآیندهای تصادفی ایفا می‌کند. در حالت کلی، $I(X_n | \mathbf{X}_{n-1})$ تابعی از مشاهدات $\mathbf{X}_{n-1}$ و نشانگر اطلاع مشاهدات است و می‌تواند از اطلاع حاشیه‌ای $I(X_n) = -H(X_n)$ کمتر، بیشتر و یا حتی مساوی باشد و این تنها وابسته به میزان متمرکزتر بودن توزیع‌های پیش‌بین و حاشیه‌ای در مقایسه با یکدیگر دارد.

اطلاع مورد انتظار پیش‌بین یک فرآیند تصادفی برای $n < \infty$ ، برابر است با

$$I_n = -H_n = E[I(X_n | \mathbf{X}_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots$$

با توجه به ویژگی‌های آنتروپی‌های شانن، آنتروپی توام را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$H(\mathbf{X}_n) = H(\mathbf{X}_{n-1}) + H_n \leq H(\mathbf{X}_{n-1}) + H(X_n) \quad (1)$$

تساوی آخر برقرار است اگر و تنها اگر X_n و $\mathbf{X}_{n-1}$ به طور تصادفی از یکدیگر مستقل باشند. یعنی همواره، $H_n \leq H(X_n)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر X_n و $\mathbf{X}_{n-1}$ مستقل باشند. بنابراین

$$I_n \geq I(X_n) \quad (2)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر وضعیت‌های قبلی هیچ اطلاعی در مورد پیش‌بینی وضعیت جدید نداشته باشند. با استفاده از (۳.۲) اطلاع مورد انتظار پیش‌بین را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد

$$I_n = I(\mathbf{X}_n) - I(\mathbf{X}_{n-1}) \quad (3)$$

بنابراین، I_n

$\mathbf{X}_n$ با مقدار اطلاع فراهم شده از مشاهدات با توزیع توام $\mathbf{X}_{n-1}$ است. اختلاف بین I_n و $I(X_n)$ در (۵.۲) اطلاع متقابل نامیده می‌شود و به صورت زیر می‌باشد

$$M_n = M(X_n, \mathbf{X}_{n-1}) = I_n - I(X_n) \geq 0 \quad (4)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر X_n و $\mathbf{X}_{n-1}$ به طور تصادفی مستقل باشند.

۱.۲ پیش‌بینی در فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱. فرآیند تصادفی $\chi = \{X_n, n \geq 1\}$ قابل پیش‌بینی بیشتر (MP) (قابل پیش‌بینی کمتر (LP)) است، اگر $0 \leq \Delta \leq 1$ و $\Psi + 1I_n$ تحت n صعودی (نزولی) باشد.

واضح است که در فرآیندهای تصادفی مانا، H_n تحت n نزولی و I_n تحت n صعودی است. بنابراین، فرآیند مانا با افزایش n اطلاع بیشتر در مورد پیش‌بین فراهم می‌کند.

قضیه ۱. فرض کنید $\chi = \{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد که در آن به ازای تمام مقادیر $n \geq 1$ ، $X_n \geq_{st} X_{n+1}$ و همچنین فرض کنید $\Upsilon = \{Y_n = \phi(X_n), n \geq 1\}$ که در آن ϕ تابعی صعودی و محدب است. اگر χ ، MP (LP) باشد آن‌گاه Υ ، MP (LP) می‌باشد.

تعریف ۲. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ را مارتینگل (زیر-مارتینگل) می‌نامند، اگر به ازای هر n ، داشته باشیم

$$E(X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) = (\geq) X_{n-1} \quad a.s.$$

اگر جهت نامساوی برعکس باشد، دنباله متغیرهای تصادفی را سوپر-مارتینگل می‌نامند.

قضیه ۲. فرض کنید $\chi = \{X_n, n \geq 1\}$ مارتینگل (زیر-مارتینگل) و اطلاع مشاهدات به صورت زیر باشد

$$I(X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) = \phi(X_n) \text{ a.s.}$$

که در آن $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ محدب (صعودی و محدب) و به ازای تمام مقادیر $n \geq 1$ ، $E[\max\{\cdot, \phi(X_n)\}] < \infty$ است. MP, χ آن گاه است.

۲.۲ ترتیب بندی اطلاع پیش بین

تحت n ، با مقایسه $I(\Upsilon)$ و $I(\chi)$ می توان دو فرآیند را در نظر این که کدام یک تحت مشاهدات قبلی شان، دارای اطلاعات بیشتری هستند، مقایسه کرد.

تعریف ۳. فرآیند تصادفی $\chi = \{X_n, n \geq 1\}$ نسبت به فرآیند $\Upsilon = \{Y_n, n \geq 1\}$ قابل پیش بینی کمتری است $I_n(\chi) \leq I_n(\Upsilon)$ ، اگر به ازای هر $n \geq 1$.

لم ۱. فرض کنید $k = 1, 2, X^{(k)}$ دو بردار n بعدی باشد. اگر برای تمام $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ، $\mathbf{x}_{i-1}^{(1)} \leq \mathbf{x}_{i-1}^{(2)}$ داشته باشیم $X_1^{(1)} \leq_{st} X_1^{(2)}$ آن گاه $k = 1, 2$ ، $X_1^{(k)} | x^{(k)} \stackrel{st}{=} X_1^{(k)}$ به طوریکه $(X_i^{(1)} | \mathbf{x}_{i-1}^{(1)} = \mathbf{x}_{i-1}^{(2)}) \leq_{st} (X_i^{(2)} | \mathbf{x}_{i-1}^{(2)} = \mathbf{x}_{i-1}^{(2)})$ برای اثبات به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه کنید.

قضیه ۳. فرض کنید $\chi^{(k)} = \{X_n^{(k)}, n \geq 1\}$ ، $k = 1, 2$ ، دو دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی با توزیع پیش بین $F_n^{(k)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1})$ باشند. همچنین فرض کنید $X_1^{(1)} \stackrel{st}{=} X_1^{(2)}$ و $\lambda_n^{(k)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1})$ تابع نرخ خطر متناظر با $F_n^{(k)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1})$ باشد. اگر

$$n = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(1)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1}) \leq \lambda_n^{(2)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1}) \quad (i)$$

(ii) $\lambda_n^{(2)}(x_n | \mathbf{x}_{n-1})$ بر حسب $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ نزولی باشد.

آن گاه $\chi^{(1)} \leq_{pr} \chi^{(2)}$.

مراجع

- [1] Cover, T.M. and Thomas, J.A. (2006). *Elements of information theory*, 2nd edition. Wiley, New York.
- [2] Ebrahimi, N., Kirmani, S.N.U.A. and Soofi, E.S. (2010). Predictability of operation processes in finite horizon. *Naval Research Logistics*, **58**, 531-545.
- [3] Ebrahimi, N., Soofi, E.S. and Zahedi, H. (2004). Information properties of order statistics and spacings. *IEEE Transactions Information Theory*, **50**, 177-183.
- [4] Lindley, D.V. (1956). On a measure of the information provided by an experiment. *The Annals of Mathematical Statistics*, **27**, 986-1005.
- [5] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423.



مقایسه توزیع وایبل و توزیع‌های آمیخته با وایبل

اسماعیلیان، م^۱

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی

چکیده

دسته‌ای از توزیع‌ها که به نوعی از توزیع وایبل مشتق شده‌اند را براساس معیارهای آکائیک و خی دو با توزیع وایبل مقایسه می‌کنیم. دو مجموعه داده را برای نشان دادن برازندگی یکی از توزیع‌ها ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: توزیع وایبل، معیار آکائیک، نیکویی برازش

۱ مقدمه

توزیع وایبل کاربردهای زیادی دارد، اما برخی نویسندگان توزیع‌های دیگری را که به نوعی از توزیع وایبل مشتق شده‌اند مطرح کرده‌اند. در این مقاله قصد داریم مقایسه‌ای بین توزیع‌های وایبل (W)، وایبل نمایی شده (EW)، وایبل تعمیم یافته (GW) [۴]، وایبل معکوس (IW)، وایبل-پارتو (WP) [۱] و بتا-وایبل (BW) [۲] از نظر نیکویی برازش انجام دهیم. دو معیار آکائیک (AIC) و خی دو را برای اندازه‌گیری نیکویی برازش به کار می‌بریم. آماره آکائیک با رابطه $AIC = -2 \ln L(\hat{\psi}_g; \underline{x}) + 2p$ تعریف می‌شود که در آن $\hat{\psi}_g$ بردار برآورد ML پارامترها تحت توزیع g ، p تعداد پارامترهای توزیع g است. هر قدر توزیع g به داده‌های $\underline{x}$ برازنده‌تر باشد، آنگاه $L(\hat{\psi}_g; \underline{x})$ به عدد یک نزدیک‌تر می‌شود و داریم $L(\hat{\psi}_g; \underline{x}) \rightarrow 1^-$ یا به طور معادل $-2 \ln L(\hat{\psi}_g; \underline{x}) \rightarrow 0^+$. در نتیجه $AIC \rightarrow 2p^+$. بنابراین مقدار AIC متناظر با هر توزیعی کوچک‌تر باشد آن توزیع از نظر معیار AIC بهتر از بقیه توزیع‌هاست. همچنین، آماره خی دو را از رابطه $\sum_{i=1}^k \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$ محاسبه می‌کنیم که در آن f_i و e_i به ترتیب فراوانی‌های مشاهده شده و نظری طبقه i ام هستند.

در بخش ۲ نخست دو مجموعه داده معرفی می‌کنیم. سپس، برای هریک از توزیع‌های مورد بحث در بخش ۱ برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای آن‌ها را به ازای هر دو مجموعه داده محاسبه می‌کنیم. در بخش ۳ مقادیر

^۱esmailian@uma.ac.ir

آماره‌های آکائیک و خی دو را برای هریک از توزیع‌های مورد بحث در بخش ۱ به ازای هر دو مجموعه داده محاسبه می‌کنیم.

۲ برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم

در این بخش، برای هر یک از توزیع‌های مذکور در بخش ۱، برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم را براساس داده‌های دو مثال زیر محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱. شکست‌ها در یک میکرومدار به علت حرکت اتم‌ها در مدار می‌باشد. زمان‌های شکست (برحسب ساعت) مربوط به آزمون عمر ۵۹ رسانی در صفحه ۲۶۷ مرجع [۳] آمده است.

مثال ۲. زمان‌های بهبودی (برحسب ماه) افراد یک نمونه تصادفی ۱۲۸ تایی از بیماران سرطان مثانه در مرجع [۵] آمده است.

جدول ۱: توابع چگالی

توزیع	$f(x)$
W	$\alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}, x > 0, \alpha, \lambda > 0$
IW	$\alpha \lambda x^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0, \alpha, \lambda > 0$
GW	$\frac{1}{\alpha \sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \left[1 - \lambda \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\lambda}-1}, \alpha, \sigma > 0, \{\lambda \leq 0, x \in (0, \infty)\} \cup \{\lambda > 0, x \in (0, \frac{\sigma}{\lambda^{\alpha}})\}$
EW	$\frac{\alpha \theta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}}\right]^{\theta-1}, x \geq 0, \alpha, \theta, \sigma > 0$
WP	$\frac{\beta c}{x} \left[\beta \ln \left(\frac{x}{\theta}\right)\right]^{c-1} e^{-\left[\beta \ln \left(\frac{x}{\theta}\right)\right]^c}, x > \theta, \theta, c, \beta > 0$
BW	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{c}{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{c-1} e^{-\beta \left(\frac{x}{\gamma}\right)^c} \left[1 - e^{-\beta \left(\frac{x}{\gamma}\right)^c}\right]^{\alpha-1}, x > 0, \alpha, \beta, c, \gamma > 0$

جدول ۱ ضابطه چگالی هریک از توزیع‌های مذکور در بخش ۱ را نشان می‌دهد. با ماکزیمم‌سازی تابع لوگ درست‌نمایی نسبت به پارامترها، برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم پارامترها به دست آمده که در جدول ۲ نمایش داده می‌شوند. برای مثال، با ماکزیمم‌سازی

$$\ell(\alpha, \lambda; \mathbf{0}\Delta\mathbf{91} = \mathbf{100} * \Upsilon + \mathbf{1x}) = n \ln(\alpha \lambda) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha},$$

برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای توزیع وایبل داده می‌شوند. ما برای این کار، از تابع $NMaximize$ در نرم‌فزار *Mathematica* بهره برده‌ایم.

جدول ۲: براوردهای درستنمایی ماکزیمم پارامترهای توزیع‌ها

توزیع	داده‌ها	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	
W	مثال ۱	۴/۶۹۸۸۵	۰/۰۰۰۰۷۲۱	
	مثال ۲	۱/۰۴۷۸۳	۰/۰۹۳۸۸۷۸	
EW		$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$
	مثال ۱	۲/۹۲۰۸۷	۲/۷۲۲۱	۶/۰۴۱۹۳
	مثال ۲	۰/۶۵۴۴۰۹	۲/۷۹۶۰۱	۳/۳۴۵۸۲
GW		$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
	مثال ۱	۰/۱۶۲۸۱۳	۷/۱۶۱۹۶	-۰/۴۵۷۲۲۳
	مثال ۱	۰/۷۰۰۴۷۵	۷/۲۲۸۳	-۰/۴۸۳۰۶۶
IW		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	
	مثال ۱	۳/۵۱۱	۵۳۱/۶۰۳	
	مثال ۱	۰/۷۵۲۰۸	۲/۴۳۱۰۹	
WP		$\hat{\theta}$	$\hat{c}$	$\hat{\beta}$
	مثال ۱	۱/۲۲۶۹۳	۸/۳۴۹۱۱	۰/۵۵۲۰۵۷
	مثال ۲	۰/۰۰۱۷۲۸	۸/۹۰۱۳۷	۰/۱۱۶۸۱۷
BW		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{c}$
	مثال ۱	۲/۳۷۰۱	۰/۵۲۷۶۴۶	۳/۲۸۶۹۲
	مثال ۲	۲/۷۳۴۷۷	۰/۹۰۸۲۵۸	۰/۶۶۶۱۳۲

۳ آماره‌های آکائیک و خی‌دو

مقدار آماره آکائیک برای هریک از توزیع‌های مذکور در بخش ۱، برای داده‌های دو مثال ۱ و ۲ در جدول ۳ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که توزیع‌های وایبل نمایی شده و وایبل تعمیم یافته نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری انجام می‌دهند.

جدول ۳: مقدار آماره آکائیک

داده	W	EW	GW	IW	WP	BW
مثال ۱	۲۲۰/۰۰	۲۲۸/۵۹	۲۲۸/۶۱	۲۵۲/۶۹	۲۲۸/۹۸	۲۳۰/۵۵
مثال ۲	۸۳۲/۱۷	۸۲۷/۳۶	۸۲۵/۴۸	۸۹۲/۰۰	۸۲۹/۱۵	۸۲۹/۳۶

فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های نظری و نیز مقدار آماره خی‌دو متناظر با هریک از توزیع‌ها در ارتباط با مثال ۱ در جدول ۴ آمده است. برای نمونه، فراوانی نظری داده‌های مثال ۱ در طبقه دوم براساس توزیع وایبل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$W_7 = 59P(4/146 \leq X < 5/294) = 59[F(5/294) - F(4/146)] = 6/495$$

که در آن $F(x,.) = 1 - e^{-\hat{\lambda}x^{\hat{\alpha}}}$ است و $\hat{\lambda}$ و $\hat{\alpha}$ براوردهای درستنمایی پارامترهای

توزیع وایبل هستند که در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. ملاحظه می‌شود که آماره خی دوی توزیع وایبل تعمیم یافته کمترین مقدار را دارد، لذا این توزیع بیشترین میزان برازندگی را بر داده‌های مثال ۱ دارد.

جدول ۴: فراوانی‌های مشاهده شده و نظری و مقدار آماره خی دوی توزیع‌ها برای مثال ۱.

e_i						حدود طبقات		
BW	WP	IW	GW	EW	W	f_i	U_i	L_i
۱/۸۸	۲/۱۰	۱/۶۰	۲/۰۰	۱/۹۰	۳/۳۰	۲	۴/۱۵	۳/۰۰
۶/۷۲	۶/۹۸	۱۱/۱۹	۶/۲۷	۶/۷۲	۶/۴۹	۵	۵/۲۹	۴/۱۵
۱۳/۸۳	۱۳/۳۷	۱۴/۶۰	۱۳/۷۹	۱۳/۷۹	۱۱/۸۴	۱۳	۶/۴۴	۵/۲۹
۱۶/۳۷	۱۵/۹۶	۱۰/۹۴	۱۷/۳۱	۱۶/۴۱	۱۵/۳۸	۲۲	۷/۵۹	۶/۴۴
۱۲/۰۳	۱۲/۲۸	۷/۰۳	۱۲/۰۴	۱۲/۰۷	۱۳/۲۸	۹	۸/۷۴	۷/۵۹
۵/۸۲	۶/۰۵	۴/۴۰	۵/۱۸	۵/۷۷	۶/۷۷	۵	۹/۸۹	۸/۷۴
۲/۳۵	۲/۲۶	۹/۲۵	۲/۴۱	۲/۳۴	۱/۹۳	۳	۱۱/۰۴	۹/۸۹
۳/۴۹	۴/۱۷	۱۹/۷۵	۲/۴۹	۳/۴۷	۶/۲۵	آماره خی دو		

مقدار آماره خی دو متناظر با هریک از توزیع‌های BW و WP ، IW ، GW ، EW ، W برای داده‌های مثال ۲ به ترتیب برابر ۲/۲۸، ۰/۴۷، ۰/۱۳، ۱۸/۶۵، ۰/۸۴ و ۰/۴۶ به دست آمد که نشان از برازندگی بهتر توزیع وایبل تعمیم یافته بر داده‌های مثال ۲ دارد.

نتیجه ۱. براساس معیارهای آکائیک و خی دو، توزیع وایبل تعمیم یافته، برازنده‌تر از سایر توزیع‌های مورد بحث برای دو مجموعه داده ارائه شده در مثال‌های ۱ و ۲ است.

مراجع

- [1] Alzaatreh, A. and Famoye, F. and Lee, C. (2013), *Weibull-Pareto Distribution and Its Applications*, Communications in Statistics - Theory and Methods 42, 1673-1691.
- [2] Famoye, F. and Lee, C. and Olumolade, O. (2005), *The beta-Weibull distribution*, Journal of Statistical Theory and Applications 4(2), 121-136.
- [3] Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2ed, John Wiley, New Jersey, Hoboken.
- [4] Mudholkar, G. and Kollia, G. (1994), *Generalized Weibull family: A structural analysis*, Commun. Statist. Theor. Meth. 23(4), 1149-1171.
- [5] Zea, L. M. and Silva, R. B. and Bourguignon, M. and Santos, A. M. and Cordeiro, G. M. (2012), *The Beta Exponentiated Pareto Distribution with Application to Bladder Cancer Susceptibility*, International Journal of Statistics and Probability 1(2), 8-19.



کاربرد ترتیب تصادفی کل زمان آزمون در قابلیت اعتماد

اصفهانی، م^۱
گروه آمار، دانشگاه ولایت

چکیده

در این مقاله ابتدا ترتیب تصادفی کل زمان آزمون (TTT) را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم. در ادامه با معرفی ترتیب تصادفی فزونی ثروت (EW) ارتباط این دو ترتیب با یکدیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان کاربرد این ترتیب‌ها را در قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: ترتیب تصادفی TTT ، ترتیب تصادفی EW ، $DMRL$ ، $IMIT$ ، $IFRA$

۱ مقدمه

ترتیب تصادفی کل زمان آزمون بطور جدی در سال ۱۹۷۲ توسط بارلو و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. بررسی خواص ترتیب TTT و رابطه آن با ترتیب محدب توسط بارلو و داکسوم (۱۹۷۲) صورت گرفت. نیت و سامانیگو (۱۹۹۲) نیز در مورد این ترتیب تصادفی مطالعه کرده و نتایج مفیدی به دست آوردند. در سال‌های اخیر نیز ارتباط بین ترتیب‌های تصادفی کل زمان آزمون و فزونی ثروت توسط محققانی مانند کوچار و همکاران (۲۰۰۲) و لی و شیکد (۲۰۰۷)، (۲۰۰۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. تعریف‌هایی که در این مقاله مورد توجه هستند در ادامه بیان می‌شوند. برخی ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی TTT و EW و رابطه آنها با یکدیگر در بخش ۲ بررسی می‌شود و کاربرد این دو ترتیب در قابلیت اعتماد در بخش ۳ مطالعه می‌شود. تعاریف زیر بر اساس شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) بیان می‌شود.

تعریف ۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توزیع‌های G, F باشند

(الف) اگر $\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)dx \leq \int_0^{G^{-1}(p)} \bar{G}(x)dx, p \in (0, 1)$ آنگاه X را کوچکتر از Y در ترتیب TTT گوئیم و با نمادهای $X \leq_{ttt} Y$ یا $G \leq_{ttt} F$ نشان می‌دهیم.

(ب) اگر $\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x)dx, p \in (0, 1)$ آنگاه X را کوچکتر از Y در ترتیب EW گوئیم و با نمادهای $X \leq_{ew} Y$ یا $G \leq_{ew} F$ نشان می‌دهیم.

^۱esfahani64@yahoo.com

۲ ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی EW و TTT

در این بخش ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی TTT و EW مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اگر X متغیری تصادفی با تابع توزیع F باشد آنگاه $p \in (0, 1)$ را تبدیل TTT مرتبط با F می‌نامیم و $W_X(p) = \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) dx$ را تبدیل EW مرتبط با F نامیم (کوچار و همکاران ۲۰۰۲). وقتی X یک متغیر تصادفی نامنفی با $\mu < \infty$ باشد مشاهده کل زمان آزمون وقتی X رخ داده را با X_{ttt} نشان می‌دهیم و به صورت $X_{ttt} = T_X(F(X))$ تعریف می‌شود و مشاهده فزونی ثروت وقتی X رخ داده است را با X_{ew} نشان می‌دهیم و به صورت $X_{ew} = W_X(F(X))$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع پیوسته F و $\mu = E(X) < \infty$ باشد. در این صورت الف) تابع توزیع X_{ttt} معکوس تبدیل TTT است. ب) تابع بقای X_{ew} معکوس تبدیل فزونی ثروت است.

نتیجه ۱-۲. اگر شرایط قضیه (۱-۲) برقرار باشد آنگاه $X_{ew} = \mu - X_{ttt}$.

بلزونس (۱۹۹۹) نشان داد که X دارای خاصیت $NBUE$ است اگر و تنها اگر $X \leq_{ew} Y$ که در آن Y یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $E(X)$ است. از طرفی چون $E(X) = E(Y)$ داریم $X \geq_{ttt} Y \iff X \leq_{ew} Y$ (کوچار و همکاران ۲۰۰۲).

متغیر تصادفی X_{ttt} که معرف مشاهده کل زمان آزمون است در مفاهیم IFR و $IFRA$ نیز صدق می‌کند. اگر Y دارای توزیع پارتو باشد یعنی $\bar{F}(y) = \frac{1}{1+y}, y \geq 0$ ، به سادگی می‌توان نشان داد که X_{ttt} دارای خاصیت IFR است اگر و تنها اگر $X \leq_c Y$ و علاوه بر این اگر $X \leq_* Y$ آنگاه قضیه ۱ بارتازوویچ (۱۹۹۵) نتیجه می‌دهد X_{ttt} دارای خاصیت $IFRA$ است.

۳ کاربرد در قابلیت اعتماد

در این بخش به بیان کاربردهایی از ترتیب‌های تصادفی TTT و EW در قابلیت اعتماد می‌پردازیم. برای هر متغیر تصادفی X تعریف می‌کنیم

$$X_t = [X - t | X > t], \quad t < t^*$$

که در آن $t^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$. هنگامی که متغیر تصادفی X نشان دهنده طول عمر یک مولفه باشد، X_t باقی مانده عمر را نشان می‌دهد.

متغیر تصادفی X دارای خاصیت میانگین باقی مانده عمر نزولی ($DMRL$) است اگر و تنها اگر تابع $\mu_X(t) = \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx$ نسبت به t نزولی باشد.

بلزونس (۱۹۹۹) نشان داد که اگر X یک متغیر تصادفی باشد آنگاه:

$$X \in DMRL \iff X_s \leq_{ew} X_t \quad \forall t < s.$$

فرض کنید برای هر متغیر تصادفی X تعریف کنیم

$$X_{(t)} = [t - X | X \leq t], \quad t > 0$$

آنگاه گوئیم X دارای خاصیت میانگین زمان فعالیت صعودی (IMIT) است اگر $E[X(t)]$ برای همه $t \geq 0$ صعودی باشد.

احمد و همکاران (۲۰۰۵) نشان دادند که اگر X یک متغیر تصادفی باشد آنگاه:

$$X \in IMIT \iff X_{(s)} \leq_{ew} X_{(t)} \quad \forall s < t.$$

۱.۳ مدل مخاطره معکوس متناسب

فرض کنید X و $X(\theta)$ ، $\theta > 0$ ، دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع به ترتیب F و $F^{(\theta)}$ باشند. در نظریه قابلیت اعتماد اختلاف $X(\theta)$ دارای مخاطره های معکوس متناسب اند. به طور مشابه برای متغیر تصادفی نامنفی Y هم متغیر $Y(\theta)$ را با تابع توزیع $G^{(\theta)}$ تعریف می کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع توزیع پیوسته باشند و $X(\theta)$ و $Y(\theta)$ دارای نرخ خطر معکوس به صورت بالا باشند

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \text{ اگر } X \leq_{ew} Y \text{ آنگاه برای } \theta > 1, X(\theta) \leq_{ew} Y(\theta). \\ \text{ب)} & \text{ اگر } X(\theta) \leq_{ew} Y(\theta) \text{ آنگاه برای } \theta \in (0, 1), X \leq_{ew} Y. \end{aligned}$$

قضیه ۳. فرض کنید X متغیر تصادفی با توابع توزیع پیوسته باشد و $X(\theta)$ دارای نرخ خطر معکوس باشد.

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \text{ اگر } X(\theta) \text{ برای } \theta > 1 \text{ دارای خاصیت } IMIT \text{ باشد آنگاه } X \text{ نیز } IMIT \text{ است.} \\ \text{ب)} & \text{ اگر } X \text{ برای } 0 < \theta < 1 \text{ دارای خاصیت } IMIT \text{ باشد آنگاه } X(\theta) \text{ نیز } IMIT \text{ است.} \end{aligned}$$

۲.۳ مدل خطر متناسب

فرض کنید X و $X(\theta)$ ، $\theta > 0$ ، دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع بقای به ترتیب F و $(\bar{F})^\theta$ باشند. در نظریه قابلیت اعتماد اختلاف $X(\theta)$ دارای مخاطره های متناسب اند. تابع توزیع $X(\theta)$ را با $(\bar{F})^\theta = 1 - F^{(\theta)}$ نشان می دهیم. به طور مشابه برای متغیر تصادفی نامنفی Y هم متغیر $Y(\theta)$ را با تابع توزیع $(\bar{G})^\theta$ تعریف می کنیم.

قضیه ۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع توزیع پیوسته باشند و $X(\theta)$ و $Y(\theta)$ دارای خطر معکوس به صورت بالا باشند

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \text{ اگر } X \leq_{ew} Y \text{ آنگاه برای } \theta \in (0, 1), X(\theta) \leq_{ew} Y(\theta). \\ \text{ب)} & \text{ اگر } X(\theta) \leq_{ew} Y(\theta) \text{ آنگاه برای } \theta > 1, X \leq_{ew} Y. \end{aligned}$$

قضیه ۵. فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع توزیع پیوسته باشد و $X(\theta)$ دارای خطر معکوس باشد.

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \text{ اگر } X(\theta) \text{ برای } \theta > 1 \text{ دارای خاصیت } DMRL \text{ باشد آنگاه } X \text{ نیز } DMRL \text{ است.} \\ \text{ب)} & \text{ اگر } X \text{ برای } 0 < \theta < 1 \text{ دارای خاصیت } DMRL \text{ باشد آنگاه } X(\theta) \text{ نیز } DMRL \text{ است.} \end{aligned}$$

قضیه ۶. فرض کنید $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ و $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ دو بردار تصادفی با مولفه های مستقل و هم توزیع و مستقل از هم و علاوه بر این X_i و Y_i ، $1 \leq i \leq n$ ، معرف طول عمر مولفه های دو سیستم باشند

الف) اگر سیستم سری 1 باشد و $X_i \leq_{ttt} Y_i$ آنگاه

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq_{ttt} \min\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

^۱ series system

ب) اگر سیستم موازی^۲ باشد و $X_i \leq_{ew} Y_i$ آنگاه

$$\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq_{ew} \max\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

۴ نتیجه گیری

در این تحقیق ترتیب های تصادفی کل زمان آزمون و فرونی ثروت معرفی و ویژگی هایی از آنها بیان شد. در ادامه ارتباط این ترتیب ها با یکدیگر و برخی از ترتیب های دیگر و کاربرد آنها در برخی مباحث قابلیت اعتماد مورد بررسی قرار گرفت. مطالعه در یافتن کاربردهای بیشتر و کنکاش در مباحث دیگر قابلیت اعتماد در آینده تحقیق مد نظر است.

مراجع

- [1] BARLOW, R. E., BARTHOLOMEW, D.J, BREMNER, J.M. AND BRUNK,H.D. (1972), *Statistical Inference under Order Restrictions*. Wiley, New York
- [2] BARLOW, R. E. AND DAKSUM, K. A. (1972), *Isotonic tests for convex ordering*. *Mathematical Statistics and Probability*, Vol. i, 293-323.
- [3] BARTOSZEWICZ, J. (1995) *Stochastic order relations and the total time on test transform*. *Statist. Probab. Lett.* 22, 103-110.
- [4] BELZUNCE, F. (1999), *On a characterization of right spread order by the increasing convex order*. *Statist. Probab. Lett.* 45, 103-110.
- [5] KOCHAR, S. C., LI, X. AND SHAKED, M. (2002) *The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions*. *Adv.inAppl, Probab.* 34, 826-845
- [6] LI, X. AND SHAKED, M. (2007) *A general family of univariate stochastic orders*. *J. Statist. Plann. Inference* 137, 3601-3610.
- [7] LI, X. AND SHAKED, M. (2004) *The observed total time on test and the observed excess wealth*. *Statist. Probab. Lett.* 68, 247-258.
- [8] NEATH, A. A. AND SAMANIEGO, F. J. (1992) *On the total time on test transform of an IFRA distribution*. *Statist. Probab. Lett.* 14, 189-291.
- [9] SHAKED, M. AND SHANTHIKUMAR, J. G. (2007) *Stochastic Orders*. Springer, New York.



افزونگی در سیستم‌های چند وضعیتی

امیریان، ی^۱ خدادادی، ا^۲

گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

همه سیستم‌ها به منظور انجام وظایف محوله در یک محیط معین طراحی می‌شوند. برخی سیستم‌ها این وظایف را با سطوح مشخص و متفاوتی از کارایی که عموماً آنرا به عنوان نرخ عملکرد معرفی می‌کنند، انجام می‌دهند. یک سیستم که دارای شمارمتهای از نرخ عملکرد بوده یک سیستم چند وضعیتی (*MSS*) نامیده می‌شود. در این مقاله به بررسی سیستم‌های چند وضعیتی متشکل از n جزء می‌پردازیم که در آن هم سیستم و هم اجزاء می‌توانند شامل سطوح متفاوتی از خرابی کامل تا عملکرد کامل می‌باشند. روش فرایند تصادفی یک ابزار بسیار مؤثر برای برآورد قابلیت اعتماد *MSS* ها می‌باشد. عیب اصلی مدل فرایندهای تصادفی برای برآورد قابلیت اعتماد *MSS* ها، عناصر زیاد سطوح عملکردهاست که گاهی عملاً کار را غیر ممکن می‌سازد. در مقابل روشهایی که بر پایه‌ی ساده سازی روند می‌باشند و می‌توانند بعد مسأله را کاهش دهند در مهندسی قابلیت اعتماد بینهایت سودمند می‌باشند. در این مقاله روش توابع مولد عمومی (*UGF*) ترکیب شده با فرایند تصادفی را که از نظر محاسبات جبری برای کاهش بعد روشی سودمند و ساده می‌باشد و به عنوان ابزاری برای بدست آوردن اندازه‌های مربوط به قابلیت اعتماد سیستم‌های فوق استفاده می‌شود، معرفی و به کار می‌بندیم. در نهایت مسأله افزونگی را در سیستم‌های *MSS* بیان کرده و ضمن طرح ویژگی‌های آنها با به کارگیری داده‌های واقعی موارد فوق را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم‌های چند وضعیتی، توابع مولد عمومی، افزونگی، قابلیت اعتماد.

۱ مقدمه

معمولاً یک *MSS* ترکیبی از عناصری است که آنها هم به نوبه خود چند وضعیتی هستند. در حقیقت، یک سیستم دودویی، ساده‌ترین حالت یک *MSS* است که شامل دو وضعیت متمایز، عملکرد کامل و خرابی کامل، است. در کل، نرخ عملکرد از هر عنصر را می‌توان از کار کردن کامل تا خرابی کامل در نظر گرفت. به خرابی منجر به کاهش

^۱y – amirian@sbu.ac.ir

^۲a – khodadadi@sbu.ac.ir

عملکرد عنصر، خرابی جزئی گفته می‌شود. بعد از خرابی جزئی، عنصر می‌تواند به فعالیت خود با نرخ عملکرد کاهش یافته، ادامه دهد. مسأله افزونگی در یک MSS پیچیده‌تر از سیستم‌های با وضعیت دودویی است. MSS ها، معمولاً بعد از تأمین تقاضای مربوط به خود، عملکرد اضافی خود را برای MSS دیگر، به صورت مستقیم یا از طریق یک سیستم اتصال داخلی (که می‌تواند چند وضعیتی باشد) فراهم کند. برای مطالعه‌ی بیشتر با توجه به حجم زیاد مطالعات انجام شده می‌توان به مقالات مروری ینکوی و جینگ (۲۰۱۲) و لیس‌نیانسی و دینگ (۲۰۰۹) و کتاب لیس‌نیانسی، فرنکل و دینگ (۲۰۱۰) مراجعه کرد.

۲ معرفی مدل

معرفی مدل MSS عمومی: عنصر j ام سیستم می‌تواند k_j وضعیت متفاوت متناظر با نرخ عملکرد داشته باشد، که به صورت $g_j = \{g_{j1}, \dots, g_{jk_j}\}$ نمایش داده می‌شود که در آن g_{ji} ، نرخ عملکرد از عنصر j در وضعیت i ، $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$ می‌باشد. نرخ عملکرد $G_j(t)$ از عنصر j در هر لحظه‌ی $t \geq 0$ یک متغیر تصادفی است که مقادیر خود را از $g_j : G_j(t) \in g_j$ می‌گیرد. بنابراین، برای هر بازه‌ی $[0, T]$ که در آن T یک دوره کارکردن MSS است، نرخ عملکرد از عنصر j به عنوان یک فرایند تصادفی تعریف می‌شود. احتمال وابسته به وضعیت‌های متفاوت (نرخ عملکرد) از عنصر j ام سیستم در هر لحظه t می‌تواند به صورت مجموعه‌ی زیر در نظر گرفته شود:

$$P_j(t) = \{P_{j1}(t), P_{j2}(t), \dots, P_{jk_j}(t)\}$$

که در آن $P_{ji}(t) = \Pr\{G_j(t) = g_{ji}\}$ با توجه به اینکه عنصر j صرفاً در یکی از k_j وضعیت قرار دارد ۱ $\sum_{i=1}^{k_j} P_{ji}(t) = 1$ برای هر $t : 0 \leq t \leq T$. عبارت $P_{ji}(t) = \Pr\{G_j(t) = g_{ji}\}$ ، تابع احتمال تجمعی برای متغیر تصادفی گسسته $G_j(t)$ در هر وضعیت t را نشان می‌دهد. مجموعه جفت‌های g_{ji} و $P_{ji}(t)$ ، $i = 1, 2, \dots, k_j$ ، به صورت کامل توزیع احتمالی عملکرد عنصر j در هر زمان t را تعیین می‌کند. وقتی MSS شامل n عنصر باشد، نرخ عملکرد آن توسط نرخ عملکرد عناصر آن تعیین می‌شود. فرض کنید سیستم کلی دارای k وضعیت متفاوت و g_i نرخ عملکرد سیستم کلی در وضعیت i ، $i = 1, 2, \dots, k$ باشد. نرخ عملکرد MSS کلی در زمان t یک متغیر تصادفی است که مقادیرش را از مجموعه‌ی $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ می‌گیرد.

تعریف ۱. فرض کنید

$$L^n = \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1k_1}\} \times \{g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2k_2}\} \times \dots \times \{g_{n1}, g_{n2}, \dots, g_{nk_n}\}$$

فضای همه‌ی ترکیبات ممکن نرخ عملکرد عناصر MSS ها باشد و $M = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ فضای مقادیر ممکن نرخ عملکرد سیستم کلی باشد. تبدیل $f(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)) : L^n \rightarrow M$ ، که نگاشت فضای نرخ عملکرد عناصر به نوی فضای نرخ عملکرد سیستم است تابع ساختار MSS نامیده می‌شود.

برای برآورد قابلیت اعتماد سیستم‌های چند وضعیتی بر پایه فرایندهای تصادفی خروجی $G_j(t)$ تعیین شده برای همه عناصر $j = 1, 2, \dots, n$ و براساس تابع ساختار سیستم داده شده‌ی $f(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t))$ ، یک فرایند تصادفی عملکرد خروجی $G(t)$ برای MSS کلی باید براساس $G(t) = f(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t))$ تعریف شود. اندازه قابلیت اعتماد MSS را می‌توان به سادگی از این توزیع عملکرد خروجی با اجرای گام‌های زیر بدست آورد.

گام اول: داشتن g_{ji} و احتمال‌های متناظر $P_{ji}^{(t)}$ برای هر عنصر j ، $j = 1, 2, \dots, n$ و $i = 1, 2, \dots, k_j$ و تعریف UGF $u_j(z, t)$ ، وابسته به یک فرایند تصادفی عملکرد خروجی برای این عناصر که در فرم زیر تعریف می‌شود

$$u_j(z, t) = P_{j1} z^{g_{j1}} + P_{j2} z^{g_{j2}} + \dots + P_{jk_j} z^{g_{jk_j}}.$$

گام دوم: عملگرهای ترکیبی برای عناصر متصل شده به صورت سری، Ω_{fser} ، موازی، Ω_{fpar} ، و یا به صورت پل، $\Omega_{fbridge}$ ، را در عناصر مجزا و ترکیباتشان به کار می‌بریم که بر پایه‌ی این روند نتایج UGF برای MSS کلی به صورت $U(z, t) = \sum_{i=1}^k P_i(t) z^{g_i}$ بدست می‌آید که در آن k شمار وضعیت‌های سیستم کلی و g_i برابر عملکرد سیستم کلی در وضعیت‌های متناظر i ، $i = 1, 2, \dots, k$ می‌باشد.

۳ مطالعه‌ی موردی

یک سیستم تولید جریان الکتریکی بهم پیوسته را بررسی می‌کنیم که شامل دو سیستم تولیدجریان الکتریکی متصل شده توسط یک خط ارتباطی است. سیستم یک شامل دو واحد ذغال با ظرفیت $360 MW$ ، یک واحد گاز با ظرفیت $228 MW$ و یک واحد نفت با ظرفیت $228 MW$ و سیستم دو شامل یک واحد ذغال با ظرفیت $360 MW$ و یک واحد گاز با ظرفیت $228 MW$ می‌باشد. داده‌ها از مطالعه گلدمن (۲۰۰۶) استخراج گردیده است و پارامترهای متناظر برای این واحدها به صورت زیر است: ذغال در دو وضعیت با ظرفیت‌های ۰ و 360 ، با نرخ خرابی 11.6956 و نرخ تعمیر 93.7 می‌باشد. گاز در دو وضعیت با ظرفیت‌های ۰ و 228 ، با نرخ خرابی 78.9189 و نرخ تعمیر 136.6 می‌باشد. نفت در دو وضعیت با ظرفیت‌های ۰ و 228 ، با نرخ خرابی 128.8230 و نرخ تعمیر 73.6134 می‌باشد. فرض می‌کنیم که خط ارتباطی با ظرفیت انتقال $300 MW$ سیستم ۲ را به سیستم ۱ وصل می‌کند. و فرض می‌کنیم که خط ارتباطی یک جزء با وضعیت دودویی باشد که فقط دو وضعیت: ظرفیت انتقال کامل و خرابی کامل را شامل شود و نرخ خرابی و نرخ تعمیر از خط ارتباطی به ترتیب $0.477 \frac{f}{year}$ و $364 \frac{f}{year}$ باشد. تقاضا دارای دو سطح: سطح کمترین تقاضا و سطح حداکثر تقاضا است تقاضای $W_1(t)$ از سیستم ۱ به عنوان یک فرایند تصادفی مارکوف زمان پیوسته در دو وضعیت در هر لحظه $t \geq 0$ مقادیر گسسته از مجموعه‌ی $W_1 = \{W_{11}, W_{12}\}$ را می‌گیرد که در آن $W_{11} = 40 MW$ ، $W_{12} = 800 MW$ می‌باشد. نرخ انتقال از کمترین تقاضا به سطح حداکثر تقاضا برابر $621.96 year^{-1}$ و نرخ انتقال از سطح حداکثر تقاضا به کمترین تقاضا برابر $876 year^{-1}$ می‌باشد. تقاضای $W_2(t)$ از سیستم ۲ به عنوان یک فرایند تصادفی مارکوف زمان پیوسته در دو وضعیت در هر لحظه $t \geq 0$ مقادیر گسسته از مجموعه‌ی $W_2 = \{W_{21}, W_{22}\}$ را می‌گیرد که در آن $W_{21} = 20 MW$ ، $W_{22} = 450 MW$ می‌باشد. و نرخ‌های انتقال همانند سیستم ۱ است. در این جا ما سیستم ۲ را به عنوان سیستم اصلی و سیستم ۱ را به عنوان سیستم رزرو در نظر می‌گیریم. برای حل این مثال ابتدا باید $U(z, t)$ را برای اجزاء به صورت جداگانه بدست آوریم که برای این کار نیاز به دانستن $P_{ji}(t)$ و g_{ji} برای جزء j ام داریم که g_{ji} ها را با توجه به اطلاعات مسأله می‌توانیم استخراج کنیم و $P_{ji}(t)$ ها را که از بخش معرفی مدل و فرض اولیه که در لحظه اول در بهترین وضعیت هستیم، با استفاده از روش لاپلاس بدست می‌آوریم. سپس با توجه به این نکته که اجزاء باید در هر سیستم در این مثال موازی نصب شده باشند UGF را برای سیستم ۱ و ۲ بدست می‌آوریم و همچنین با توجه به g_{ji} و $P_{ji}(t)$ از تقاضای $W_1(t)$ و $W_2(t)$ که به طور مشابه حاصل می‌شوند، UGF را برای W_1 و W_2 به دست می‌آوریم و آنگاه UGF حاصل از عملکرد، پس از تأمین تقاضای خود، را برای سیستم ۱ و ۲ که همان UGF برای $G_1(t) - W_1(t)$ و $G_2(t) - W_2(t)$ است، محاسبه

می‌کنیم. در اینجا خط ارتباطی نیز به عنوان یک MSS در نظر گرفته می‌شود و UGF آن به طور مشابه به دست می‌آید. همچنین UGF حاصل از عملکرد اضافی جزء ۱ بعد از تأمین تقاضای خود و خط ارتباطی به دست آورده و آن را به عنوان کمک جزء ۱ یا همان جزء رزرو به جزء ۲ تزریق می‌کنیم و نهایتاً UGF حاصل از جزء ۲ بعد از تأمین تقاضای خود و مساعدت جزء رزرو ۱، را که همان UGF نهایی ما برای جزء اصلی است به دست می‌آوریم نتیجه نهایی ما برابر

$$U_{final}(z, t) = \sum_{i=1}^{M_{G_r-W_r}} \sum_{j=1}^{k_{out}} P_i^{(G_r-W_r)} P_j^{(out)} z^{g_i^{(G_r-W_r)} + g_j^{(out)}},$$

است که در آن $M_{G_r-W_r}$ تعداد وضعیت‌های حاصل از سیستم ۲ بعد از تأمین تقاضای خود و $g_i^{(G_r-W_r)}$ وضعیت i ام از سیستم ۲ بعد از تأمین تقاضای خود است و $P_i^{(G_r-W_r)}$ احتمال اینکه عملکرد در وضعیت $g_i^{(G_r-W_r)}$ باشد و k_{out} تعداد وضعیت‌های حاصل کمک سیستم ۱ بعد از عبور از سیستم اتصال داخلی و $g_j^{(out)}$ وضعیت j ام از کمک سیستم ۱ بعد از عبور از سیستم اتصال داخلی باشد و $P_j^{(out)}$ احتمال این است که عملکرد در وضعیت $g_j^{(out)}$ باشد.

مراجع

- [1] Goldner, Sh, (2006), Markov model for a typical 360 MW coal fired generation unit. Commun Depend Qual Manag 9(1):24–29.
- [2] Lisnianski, A, Ding, Y, (2009), Redundancy analysis for repairable multi-state system by using combined stochastic processes methods and universal generating function technique. Reliability Engineering and System Safety 94:1788-1795.
- [3] Lisnianski, A, Frenkel, I, Ding, Y, (2010), Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers. Springer-Verlag London.
- [4] Yingkui, G, Jing, L, (2012), Multi-State System Reliability: A New and Systematic Review. Procedia Engineering 29: 531-536.

تعیین اندازه اهمیت اجزای سیستم بر مبنای نظریه اطلاع

باغبان سیجانی، م^۱

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان

چکیده

هر سیستم مجموعه‌ای از اجزاء است که برای هدفی معین طراحی شده است. از نقطه نظر عملکرد، همه‌ی اجزای یک سیستم اهمیت یکسانی برای کارایی سیستم ندارند. هدف از این مقاله، ارائه معیارهایی بر مبنای مفاهیم نظریه اطلاع جهت تعیین اولویت اجزاء در مراحل مختلف طراحی، بهینه‌سازی و تعمیر و نگهداری پیشگیرانه سیستم‌ها می‌باشد. نشان می‌دهیم معیارهای ارائه شده در این مطالعه در راستای معیارهای مطرح شده در متون قابلیت اعتماد می‌باشد.

کلمات کلیدی: اطلاع شرطی، اندازه اطلاع توأم، اندازه اهمیت، سیستم

۱ مقدمه

در متون قابلیت اعتماد، اندازه‌های اهمیت متفاوتی بر اساس ساختار، قابلیت اعتماد و یا توزیع طول عمر اجزاء در یک سیستم ارائه شده است. این اندازه‌ها، معیارهایی کمی هستند که جهت تعیین اولویت اجزای سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرند. اخیراً مسئله رتبه‌بندی اهمیت اجزای یک سیستم از دیدگاه نظریه اطلاع در [۴] مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که این اندازه بیشتر در مراحل اولیه طراحی یک سیستم کاربرد دارد؛ در این مقاله به ارائه معیارهایی بر مبنای مفاهیم نظریه اطلاع جهت تعیین اولویت اجزاء در مراحل مختلف طراحی، بهینه‌سازی و تعمیر و نگهداری پیشگیرانه سیستم‌ها می‌پردازیم.

۲ اندازه اهمیت اطلاع

سیستمی با n جزء مستقل $c_1, \dots, c_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $Q_i = Q_i(c_i)$ متغیر تصادفی حالت (یا طول عمر) جزء c_i باشد. از مجموعه $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ ، متغیر تصادفی Q برای حالت (یا طول عمر) سیستم بر اساس تابع

^۱ Marziehbaghban@yahoo.com

ساختار سیستم به صورت $Q = \varphi(Q)$ تعیین می شود. Q و Q_i به ترتیب دارای توزیع F_q و F_{q_i} با تابع چگالی f_q و f_{q_i} هستند.

اطلاع متقابل بین Q و Q_i به صورت زیر بر حسب آنتروپی شانون (H) تعریف می شود

$$M(Q, Q_i) = H(Q) - \mathcal{H}(Q | Q_i) = \mathcal{I}(Q | Q_i) - I(Q), \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن $\mathcal{H}(Q | Q_i) = E_{q_i}[H(F_{q|q_i})]$ و $\mathcal{I}(Q | Q_i) = -\mathcal{H}(Q | Q_i)$ لازم به ذکر است که $I(Q)$ اندازه اطلاع مطرح شده در [۶] است.

اندازه اهمیت اطلاع جزء c_i بر حسب انتظار اطلاع مؤثر بودن آگاهی از حالت (یا طول عمر) آن برای پیش بینی حالت (یا طول عمر) سیستم به صورت زیر در [۴] تعریف شده است.

تعریف ۱. اهمیت جزء c_i بیشتر از جزء c_j در سیستم است اگر و تنها اگر،

$$M(Q, Q_i) \geq M(Q, Q_j) \Leftrightarrow \mathcal{I}(Q | Q_i) \geq \mathcal{I}(Q | Q_j). \quad (1)$$

با توجه به تعریف فوق، جزئی اهمیت بیشتری دارد که اطلاع متقابل متغیر حالت (یا طول عمر) آن با سیستم بیشتر از اجزای دیگر باشد. با توجه به [۴] اندازه اهمیت اطلاع، اجزاء را در سیستم های متوالی، موازی و k از n معادل اندازه اهمیت بیرنباوم^۱ در [۳] و بارلو-پروشان^۲ در [۱] رتبه بندی می کند.

۱.۲ اندازه اهمیت اطلاع مدول ها

با توجه به [۲] هر سیستم منسجمی شامل مدول های منسجم است و در صورت مستقل بودن اجزاء از یکدیگر، مدول ها نیز از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین، با فرض استقلال اجزاء در یک سیستم منسجم می توان اندازه اهمیت اطلاع را برای یک مدول تعریف کرد.

سیستم منسجم (N, φ) شامل m مدول مستقل $\{(S_k, \chi_k)\}_{k=1}^m$ را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر Q_{S_k} نشان دهنده حالت (یا طول عمر) مدول S_k باشد. بنابراین، اندازه اهمیت اطلاع مدول S_k بر حسب انتظار اطلاع مؤثر بودن آگاهی از حالت (یا طول عمر) آن برای پیش بینی حالت (یا طول عمر) سیستم از رابطه ذیل حاصل می شود

$$\begin{aligned} M(Q, Q_{S_k}) &= H(Q) - \mathcal{H}(Q | Q_{S_k}), \quad k = 1, \dots, n \\ &= \mathcal{I}(Q | Q_{S_k}) - I(Q). \end{aligned}$$

تعریف ۲. اندازه اهمیت اطلاع مدول S_k بیشتر از مدول S_r است اگر و تنها اگر

$$M(Q, Q_{S_k}) \geq M(Q, Q_{S_r}) \Leftrightarrow \mathcal{I}(Q | Q_{S_k}) \geq \mathcal{I}(Q | Q_{S_r}).$$

تذکر ۱. اندازه اهمیت اطلاع یک مدول با اندازه اهمیت اطلاع اجزای آن مدول برابر نیست. یعنی، $M(Q, Q_{S_k}) \neq \sum_{i \in S_k} M(Q, Q_i)$

^۱Birnbaum

^۲Barlow-Proshan

۳ اندازه اهمیت اطلاع شرطی

اطلاع متقابل بین Q_i و Q به شرط $Q_j = q_j$ از رابطه ذیل حاصل می‌شود

$$M(Q, Q_i | Q_j = q_j) = H(Q | Q_j = q_j) - \mathcal{H}(Q | Q_i, Q_j = q_j) \quad (۲)$$

$$= \mathcal{I}(Q | Q_i, Q_j = q_j) - I(Q | Q_j = q_j).$$

در ادامه جهت اختصار، جزء c_i به شرط جزء c_j را با $(c_i | c_j)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳. اندازه اهمیت اطلاع شرطی جزء $c_i | c_j$ بیشتر از جزء $c_k | c_j$ در سیستم است اگر و تنها اگر،

$$M(Q, Q_i | Q_j = q_j) \geq M(Q, Q_k | Q_j = q_j) \quad (۳)$$

بر اساس اندازه اهمیت اطلاع شرطی، علاقه‌مندیم که بدانیم آیا تغییر حالت جزء c_j از فعال به غیر فعال، اهمیت جزء c_i را برای پیش‌بینی حالت سیستم تغییر می‌دهد؟ آیا این تغییر سبب افزایش اهمیت جزء c_i شده یا سبب کاهش اهمیت آن؟ برای پاسخ به این پرسش‌ها از تفاضل اندازه اهمیت اطلاع شرطی زیر استفاده می‌کنیم

$$\Delta M(Q, Q_i | Q_j) = M(Q, Q_i | Q_j = ۱) - M(Q, Q_i | Q_j = ۰)$$

به عنوان مثال، اگر $\Delta M > ۰$ آنگاه اهمیت جزء c_i در صورتی که جزء c_j فعال باشد بیشتر از زمانی است که جزء c_j در سیستم غیر فعال است.

تذکر ۲. از این پس اگر $\Delta M(Q, Q_i | Q_j) \geq ۰$ آنگاه دو جزء c_i و c_j را مکمل اطلاع یکدیگر در پیش‌بینی حالت سیستم و اگر $\Delta M(Q, Q_i | Q_j) \leq ۰$ آنگاه دو جزء c_i و c_j را جانشین اطلاع یکدیگر می‌نامیم.

علامت تابع $\Delta M(Q, Q_i | Q_j)$ نشان دهنده نوع ارتباط دو جزء c_i و c_j در سیستم می‌باشد که علامت این تابع را می‌توان در حالات خاصی بدون محاسبه تعیین نمود. تابع علامت را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\text{sgn}(\Delta M(Q, Q_i | Q_j)) = \begin{cases} ۱, & \Delta M(Q, Q_i | Q_j) > ۰ \\ ۰, & \Delta M(Q, Q_i | Q_j) = ۰ \\ -۱, & \Delta M(Q, Q_i | Q_j) < ۰ \end{cases}$$

در قضایای زیر نشان می‌دهیم که علامت ΔM برای دو جزء c_i و c_j در یک سیستم متوالی همانند معیار JRI همیشه مثبت و در یک سیستم موازی همانند معیار JRI منفی است.

قضیه ۱. در یک سیستم متوالی، دو جزء c_i و c_j مکمل اطلاع یکدیگر هستند.

قضیه ۲. در یک سیستم موازی، دو جزء c_i و c_j جانشین اطلاع یکدیگر هستند.

۴ اندازه اطلاع توأم دو جزء

میزان اطلاع متغیر تصادفی Q_i و Q_j در مورد متغیر تصادفی Q بر حسب تابع آنتروپی از رابطه ذیل حاصل می‌شود

$$M(Q, Q_i \cap Q_j) = H(Q) - \mathcal{H}(Q | Q_i, Q_j).$$

در رابطه فوق، هرچه $M(Q, Q_i \cap Q_j)$ بزرگتر باشد؛ اجزای c_i و c_j برای پیش‌بینی حالت سیستم اهمیت بیشتری دارند. لذا، منطقی است که دو جزئی را جهت تعمیر یا نگهداری پیشگیرانه در اولویت قرار دهیم که آگاهی از حالت آن‌ها در پیش‌بینی حالت سیستم مؤثرتر باشد.

قضیه ۳. الف) اگر در یک سیستم متوالی $p_i \leq p_j \leq p_k$ ، آنگاه داریم

$$M(Q, Q_j \cap Q_k) \leq M(Q, Q_i \cap Q_j).$$

ب) اگر در یک سیستم موازی $p_i \leq p_j \leq p_k$ ، آنگاه داریم

$$M(Q, Q_i \cap Q_j) \leq M(Q, Q_j \cap Q_k).$$

نتیجه ۲. در یک سیستم متوالی (موازی) دو جزئی بیشترین اهمیت را برای پیش‌بینی Q دارند که احتمال کارکردشان نسبت به سایر اجزاء کمتر (بیشتر) باشد.

تعریف ۴. اندازه اطلاع توأم (JIM) تعیین کننده نوع ارتباط (مکمل اطلاع-جانشین اطلاع) و میزان اثر متقابل دو جزء c_i و c_j در پیش‌بینی حالت (فعال-غیر فعال) یا طول عمر سیستم است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$JIM(Q_i, Q_j) = \text{sgn}(\Delta M(Q, Q_i | Q_j)) M(Q, Q_i \cap Q_j). \quad (۴)$$

تابع فوق متقارن است و می‌تواند هر مقداری را در بازه $(-\infty, \infty)$ اختیار کند.

بر اساس تعریف فوق و قضایای ۳.۳، ۴.۳ و ۱.۴ معیار JIM ، اجزاء را در سیستم‌های متوالی و موازی معادل معیار JRI رتبه‌بندی می‌کند.

تشکر و قدردانی: از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر مجید اسدی جهت راهنمایی‌های ارزنده خود در نگارش این مقاله تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

- [1] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975a). Importance of system components and fault tree events. *Statistic Processes and Their Applications*, **3**, 153-172.
- [2] Birnbaum, Z. W. and Esary, J.D. (1965). Nodules of coherent binary systems. *J. Soc. Indust. ADD1. Math.*, **13**, 444-462.
- [3] Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system. In: Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II*. New York: Academic Press, pp. 581-592.
- [4] Ebrahimi, N., Jalali, N. Y., Soofi, E. S. and Soyer, R. (2014). Importance of components for a system. *Econometric Reviews*, **33**, 395-420.
- [5] Hong, J. S. and Lie, C. H. (1993). Joint reliability-importance of two edges in an undirected network. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 17-33.
- [6] Zellner, A. (1977). Maximal data information prior distributions. In: Aykac, A., Brumat, C., eds. *New developments in the Applications of Bayesian Methods*. Amsterdam: North-Holland, pp. 211-232.



پیش بینی طول عمر باقیمانده سیستم‌های r از n دنباله‌ای

برات نیا، م^۱ دوست پرست، م^۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای به عنوان ابزاری برای الگو سازی طول عمر سیستم‌های r از n دنباله‌ای که در آنها مؤلفه‌ها از هم مستقل هستند ولی شکست هر یک از مؤلفه‌ها باعث تغییر طول عمر مؤلفه‌های باقیمانده در سیستم می‌شود به کار می‌روند. در این مقاله، زمان رخ دادن $(s+j)$ امین شکست به شرط وقوع s امین شکست در سیستم‌های r از n دنباله‌ای پیش بینی می‌شود.

کلمات کلیدی: آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، سیستم‌های r از n دنباله‌ای، الگوی طول عمر، پیش بینی

۱ مقدمه

“کرامر^۱ و کمپس^۲ [۲]” مفهوم سیستم‌های r از n دنباله‌ای را به عنوان تعمیمی از سیستم‌های r از n معمولی معرفی کردند. در این سیستم‌ها شکست هر یک از مؤلفه‌ها طول عمر مؤلفه‌های باقیمانده در سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین آماره‌های ترتیبی معمولی به منظور تعیین طول عمر سیستم‌های r از n دنباله‌ای مناسب نیستند. اما الگوی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای این هدف را برآورده می‌کند. مثالی بارز از سیستم‌های r از n دنباله‌ای هواپیماهای چند موتور هستند. بعضی از هواپیماها از چهار موتور تشکیل شده‌اند که اگر سه موتور از بین چهار موتور موجود معیوب شود، هواپیما دیگر قادر به پرواز نیست. حال نمونه‌ای از این هواپیماهای چهار موتور را در نظر بگیرید که حین پرواز یک موتور از چهار موتور آن خراب می‌شود. تحت این شرایط پیش بینی مدت زمانی که این هواپیما (با یک موتور معیوب) قادر به پرواز است به امری حیاتی بدل خواهد شد. لذا در اینگونه مسائل، محاسبه میانگین طول عمر باقیمانده سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در متون آماری این شاخص برای انواع سیستم‌ها مورد

^۱m.baratnia@stu.um.ac.ir

^۲doustparast@um.ac.ir

^۱Cramer

^۲Kamps

بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال صالحی و همکاران [۵] میانگین عمر باقیمانده سیستمهای k از n پی در پی را بدست آورده‌اند. با این مقدمه، مطالب موجود در مقاله پیش رو به شکل زیر بخش بندی شده است: در بخش دوم، تعدادی از مفاهیم مورد نیاز این مقاله بازگو خواهد شد. سپس در بخش سوم، نتیجه اصلی مقاله به همراه یک مثال عددی بیان می‌شود.

۲ آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای

با وجود آنکه آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای توسط “کمپس [۴] معرفی شده‌اند، تعریف ارائه شده توسط “بورکشات^۳ و ناوارو^۴ [۱] را برای آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای در نظر گرفته‌ایم. لذا در سراسر این مقاله $X_{n:n}^*, \dots, X_{1:n}^*$ آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای متناظر با $F_n, \dots, F_1$ هستند که در آن توابع توزیع طول عمر به طور مطلق پیوسته، به ترتیب با توابع چنک $F_n^{[-1]}, \dots, F_1^{[-1]}$ و توابع قابلیت اطمینان $\bar{F}_n, \dots, \bar{F}_1$ می‌باشند و $F_1^{[-1]}(1) \leq \dots \leq F_n^{[-1]}(1)$. دقت شود که طول عمر یک سیستم r از n دنباله‌ای برابر $X_{r:n}^*$ است.

لم ۱ (“لم ۲.۴ از کرامر و کمپس [۳]) تابع توزیع s امین آماره ترتیبی دنباله‌ای با نماد $F_{s:n}^*$ نشان داده شده است $(1 \leq s \leq n)$. برای هر عدد حقیقی مانند t

$$F_{1:n}^*(t) = 1 - (\bar{F}_1(t))^n,$$

و برای $2 \leq s \leq n$

$$F_{s:n}^*(t) = \begin{cases} 1, & F_s(t) = 1, \\ F_{s-1:n}^*(t) - \int_{-\infty}^t \left(\frac{\bar{F}_s(t)}{\bar{F}_s(x)} \right)^{n-s+1} dF_{s-1:n}^*(x), & F_s(t) < 1. \end{cases}$$

همچنین بر اساس “کمپس [۴، صفحه ۴] آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای دارای ویژگی مارکوفی هستند و برای هر $2 \leq s \leq n$ داریم

$$P(X_{s:n}^* \leq t | X_{s-1:n}^* = x) = 1 - \left(\frac{\bar{F}_s(t)}{\bar{F}_s(x)} \right)^{n-s+1}, \quad t \geq x. \quad (1)$$

۳ پیش بینی زمان رخ داد شکست‌ها در سیستم‌های r از n دنباله‌ای

چون $F_n, \dots, F_1$ توابع توزیع طول عمر به طور مطلق پیوسته فرض شده‌اند، از لم ۱ می‌توان متوسط زمان رخ داد s امین شکست در یک سیستم r از n دنباله‌ای را به صورت زیر بدست آورد.

$$E(X_{s:n}^*) = \int_0^\infty \bar{F}_{s:n}^*(t) dt, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (2)$$

قضیه ۱. فرض کنید $1 \leq j \leq n-1$ یک عدد طبیعی و x یک عدد حقیقی باشد. برای عدد طبیعی $1 \leq s \leq n-j$ قرار دهید $T_{s,j}^{[x]} = [X_{s+j:n}^* | X_{s:n}^* = x]$ در این صورت

^۳Burkschat

^۴Navarro

الف. برای هر $1 \leq s \leq n-1$ داریم

$$F_{T_{s,1}^{[x]}}(t) = 1 - \left(\frac{\bar{F}_{s+1}(t)}{\bar{F}_{s+1}(x)} \right)^{n-s}, \quad t \geq x,$$

ب. برای هر $1 \leq s \leq n-j$ و $2 \leq j \leq n-1$

$$F_{T_{s,j}^{[x]}}(t) = F_{T_{s,j-1}^{[x]}}(t) - \int_x^t \left(\frac{\bar{F}_{s+j}(t)}{\bar{F}_{s+j}(y)} \right)^{n-s-j+1} dF_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y), \quad t \geq x,$$

که در آن $F_{T_{s,j}^{[x]}}(t) = P(T_{s,j}^{[x]} \leq t)$ است.

برهان: بر اساس معادله (۱) قسمت (الف) بدیهی است. برای اثبات قسمت (ب) ابتدا دقت شود که $P(X_{s+j-1:n}^* \leq y | X_{s:n}^* = x) = F_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y)$ در این صورت چنانچه $2 \leq j \leq n-1$ باشد، آنگاه برای هر $1 \leq s \leq n-j$ و هر حقیقی مانند t نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F_{T_{s,j}^{[x]}}(t) &= P(X_{s+j:n}^* \leq t | X_{s:n}^* = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_{s+j:n}^* \leq t | X_{s:n}^* = x, X_{s+j-1:n}^* = y) dF_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y). \end{aligned} \quad (۳)$$

به وضوح اگر $t < x$ باشد، آنگاه به دلیل رابطه صعودی موجود بین آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای حاصل معادله (۳) برابر صفر است. در غیر این صورت از ویژگی مارکوف آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، رابطه صعودی بین آنها و معادله (۱) حاصل معادله (۳) به صورت زیر ساده خواهد شد

$$\begin{aligned} F_{T_{s,j}^{[x]}}(t) &= \int_x^t P(X_{s+j:n}^* \leq t | X_{s+j-1:n}^* = y) dF_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y) \\ &= \int_x^t \left[1 - \left(\frac{\bar{F}_{s+j}(t)}{\bar{F}_{s+j}(y)} \right)^{n-s-j+1} \right] dF_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y) \\ &= F_{T_{s,j-1}^{[x]}}(t) - \int_x^t \left(\frac{\bar{F}_{s+j}(t)}{\bar{F}_{s+j}(y)} \right)^{n-s-j+1} dF_{T_{s,j-1}^{[x]}}(y), \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۳. چنانچه در یک سیستم r از n دنباله‌ای $(r-j)$ امین شکست در لحظه‌ای مانند x رخ دهد، آنگاه متوسط طول عمر باقیمانده سیستم برابر $-x = \int_x^{\infty} \bar{F}_{T_{r-j,j}^{[x]}}(t) dt$ خواهد بود.

مثال ۱. در یک سیستم ۳ از ۴ دنباله‌ای قرار دهید

$$F_j(t) = 1 - \exp\{-jt^\gamma\}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

در این صورت لم ۱ برای هر $t \geq 0$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} F_{1;4}^*(t) &= 1 - \exp\{-4t^\gamma\}, \\ F_{2;4}^*(t) &= 1 - 3 \exp\{-4t^\gamma\} + 2 \exp\{-6t^\gamma\}, \\ F_{3;4}^*(t) &= 1 - 9 \exp\{-4t^\gamma\} + 8 \exp\{-6t^\gamma\} + 12t^\gamma \exp\{-6t^\gamma\}. \end{aligned}$$

لذا با استفاده از رابطه (۲)، متوسط زمان رخ داد شکست‌ها در این سیستم برابر است با: $E(X_{1:4}^*) \approx 0.44$ ،
 $E(X_{2:4}^*) \approx 0.61$ و $E(X_{3:4}^*) \approx 1.45$. همچنین برای $x \geq 0$ و $t \geq x$ از قضیه ۱ داریم

$$F_{T_{1:1}^{[x]}}(t) = 1 - \exp\{-\phi(t^2 - x^2)\},$$

$$F_{T_{2:1}^{[x]}}(t) = 1 - \exp\{-\phi(t^2 - x^2)\},$$

$$F_{T_{3:1}^{[x]}}(t) = 1 - \exp\{-\phi(t^2 - x^2)\} (1 + \phi(t^2 - x^2)).$$

از طرفی می‌دانیم که اگر Φ_a نشان دهنده تابع توزیع تجمعی $N(0, 1/2a)$ باشد، آنگاه $\int_b^\infty \exp\{-ay^2\} dy = \sqrt{\pi/a} (1 - \Phi_a(b))$ است. بنابراین به وسیله انتگرال گیری جزء به جزء، متوسط زمان رخ دادن سومین شکست به شرط وقوع اولین شکست در لحظه x عبارت است از

$$E(T_{1:2}^{[x]}) = \sqrt{\frac{\pi}{\phi}} \exp\{\phi x^2\} \left(\frac{3}{2} - \phi x^2 \right) (1 - \Phi_\phi(x)) + \frac{x}{\phi}.$$

مراجع

- [1] Burkschat, M., Navarro, J. (2011), *Ageing properties of sequential order statistics*, Probab. Engrg. Inform. Sci. 25, 1–19.
- [2] Cramer, E., Kamps, U. (1996), *Sequential order statistics and k-out-of-n systems with sequentially adjusted failure rates*, Ann. Inst. Stat. Math. 48(3), 535–549.
- [3] Cramer, E., Kamps, U. (2003), *Marginal distributions of sequential and generalized order statistics*, Metrika. 58, 293–310.
- [4] Kamps, U. (1995), *A concept of generalized order statistics*, J. Stat. Plann. Infer. 48, 1–23.
- [5] Salehi, E. T., Asadi, M., Eryılmaz, S. (2012), *On the mean residual lifetime of consecutive k-out-of-n systems*, Test. 21, 93–115.



شبیه‌سازی طرح قابلیت اطمینان سیستم‌های نیمه - مارکف گسسته - زمان سه حالتی

جولایی، ح^۱

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله یک سیستم تعمیرپذیر با فضای حالت متناهی در نظر گرفته می‌شود. قابلیت اطمینان و نرخ خرابی یا شکست سیستمی که توسط یک فرآیند نیمه-مارکف گسسته-زمان اداره می‌شود را بررسی می‌نماییم. برآوردگر ناپارامتری پیشنهاد شده برای قابلیت اطمینان را ارائه و با شبیه‌سازی یک سیستم نیمه-مارکف سه‌حالتی، نتایج مربوط به آن را بررسی کرده‌ایم.

کلمات کلیدی: زنجیره‌های نیمه-مارکف، سیستم‌های نیمه-مارکف گسسته-زمان، قابلیت اطمینان

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر کارهای بسیاری در خصوص قابلیت اطمینان در شاخه احتمال و روش‌های آماری انجام شده است. در این مقاله برای قابلیت اطمینان، مدل‌هایی معروف به مدل‌های نیمه-مارکف در حالت گسسته-زمان ارائه شده است. یک مدل‌سازی دقیق از قابلیت اطمینان بر روی یک مسیر در بازه زمانی دلخواه $[0, M]$ آورده شده است. با توجه به گسسته-زمان بودن مدل ارائه شده، این مدل‌سازی با برنامه‌های کاربردی بیشتر منطبق است و برای محاسبه و برآورد معیارهای قابلیت اطمینان به صورت عددی با استفاده از نرم‌افزارها آسان‌تر است. در این مقاله پس از خلاصه‌ای از مفاهیم فرآیندهای نیمه-مارکف، مثال عددی ارائه شده در [۳] را با تغییراتی جزئی در توزیع‌ها دوباره شبیه‌سازی را انجام داده‌ایم که الگویی برای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها در قالب قابلیت اطمینان سیستم‌های نیمه-مارکف گسسته-زمان ارائه می‌دهد و کار انجام شده صرفاً مروری بر همان مثال عددی است.

^۱h-joolae@mscstu.scu.ac.ir

۲ تعاریف

کلیه تعاریف در اینجا و همچنین تعاریف و قضیه‌های تکمیلی در مراجع [۱] و [۳] آمده‌است. فرض کنید E یک مجموعه ناتهی متناهی و $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضای احتمالی کامل باشد.

تعریف ۱. فرآیند تصادفی زمان همگن $(\mathbf{J}, \mathbf{S}) := (J_n, S_n)_{n \geq 0}$ یک زنجیر تجدید مارکف با هسته انتقال $q_{ij}(k) := P(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k | J_n = i), n \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

تعریف ۲. فرآیند تصادفی $\mathbf{J} := (J_n)_{n \geq 0}$ یک زنجیر مارکف همگن با فضای حالت E و با ماتریس احتمال انتقال $\mathbf{p} := (p_{ij}; i, j \in E)$ می‌باشد که در آن

$$p_{ij}(k) := P(J_{n+1} = j | J_n = i), n \in \mathbb{N}$$

فرآیند تصادفی $\mathbf{S} := (S_n)_{n \geq 0}$ با فضای حالت $\mathbb{N}$ یک دنباله صعودی اکید می‌باشد که در آن S_n امین زمان پرش می‌باشد و $0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots$. همچنین دنباله‌ای از زمان‌های اقامت موقت در حالات متوالی دیده شده را با $\mathbf{X} := (X_n)_{n \geq 1}$ نشان داده و به صورت $X_n := S_n - S_{n-1}$ تعریف شده است.

تعریف ۳. زنجیر $\mathbf{Z} := (Z_k)_{k \geq 0}$ یک زنجیر نیمه-مارکف مرتبط با $(\mathbf{J}, \mathbf{S})$ است هرگاه: $Z_k := J_{N(k)}, k \in \mathbb{N}$ که در آن $N(k)$ یک فرآیند شمارشی می‌باشد که به صورت $N(k) := \max\{n \in \mathbb{N} | S_n \leq k\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴. (ضرب پیچشی ماتریسی گسسته-زمان) فرض کنید $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ دو ماتریس باشند، ضرب پیچشی ماتریسی $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ خود ماتریسی مانند $\mathbf{C}$ می‌باشد که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij}(k) := \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k A_{ir}(k-l) B_{rj}(l), \quad i, j \in E, \quad k \in \mathbb{N}$$

۳ قابلیت اطمینان و نرخ شکست

۱.۳ تعریف

سیستمی مانند S را در نظر گرفته که در زمان $k = 0$ عملیات خود را آغاز می‌نماید. فضای حالت E را به دو زیرمجموعه D, U تقسیم می‌نماییم که به ترتیب حالت‌های سالم و خرابی سیستم باشند. اولین زمان گذار به حالت D را طول عمر سیستم نامند و با T_D نشان داده و به صورت $T_D := \inf\{n \in \mathbb{N}; Z_n \in D\}$ تعریف می‌گردد. قابلیت اطمینان یک سیستم نیمه-مارکف گسسته-زمان S در زمان $k \in \mathbb{N}$ احتمال عملیاتی بودن سیستم در بازه $[0, k]$ می‌باشد و به صورت $R(k) := \mathbb{P}(T_D > k) = \mathbb{P}(Z_n \in U, n = 0, \dots, k)$ تعریف شده است.

گزاره ۱. قابلیت اطمینان یک سیستم نیمه-مارکف گسسته-زمان در زمان $k \in \mathbb{N}$ توسط رابطه زیر به دست می‌آید [۲] و [۳]:

$$R(k) = \alpha_1 \text{textbf{f}} P_{11}(k) \mathbf{1}_{s1} = \alpha_1 (\delta \mathbf{I} - \text{textbf{f}} q_{11})^{(-1)} * (I - \text{diag}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{1})_{11})(k) \mathbf{1}_{s1}$$

که در آن $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ به ترتیب هسته نیمه مارکف انباشته و ماتریس احتمال انتقال زنجیر نیمه-مارکف می‌باشد که درایه‌های آن‌ها نیز بصورت $Q_{ij}(k) := \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq k | J_n = i)$ و $P_{ij}(k) := \mathbb{P}(Z_k = j | Z_0 = i)$ می‌باشند.

گزاره ۲. فرض کنید S سیستمی باشد که در زمان $k = 0$ شروع به کار کند. نرخ خرابی یا شکست یک سیستم نیمه-مارکف گسسته-زمان احتمال خرابی در زمان $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد به شرط آن که تا زمان $k - 1$ در حال کار بوده باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲] و [۳]:

$$\lambda(k) := P(T_D = k | T_D \geq k) = \begin{cases} 1 - \frac{R(k)}{R(k-1)}, & R(k-1) \neq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

۲.۳ برآورد

حال یک مسیر نمونه‌ای از زنجیر تجدید مارکف $(\mathbf{J}, \mathbf{S})$ که در زمان $M \in \mathbb{N}$ سانسور شده است را به صورت

$$\mathcal{H}(M) := (J_0, X_1, \dots, J_{N(M)-1}, X_{N(M)}, J_{N(M)}, U_M)$$

در نظر می‌گیریم که در آن U_M زمان اقامت موقت سانسور شده در آخرین حالت ملاقات شده $J_{N(M)}$ می‌باشد که به صورت $U_M := M - S_{N(M)}$ داده شده است. حال برای معرفی برآوردگرهای تجربی نیاز به سه نوع فرآیند شمارشی داریم که به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$1. N_i(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i\}} : \text{تعداد ملاقات‌های حالت } i \text{ توسط زنجیر مارکف تعبیه شده تا زمان } M;$$

$$2. N_{ij}(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i, J_n=j\}} : \text{تعداد انتقالات زنجیر مارکف تعبیه شده از } i \text{ به } j \text{ تا زمان } M;$$

$$3. N_{ij}(k, M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n=k\}} : \text{تعداد انتقالات زنجیر مارکف تعبیه شده از } i \text{ به } j \text{ تا زمان } M \text{ با زمان اقامت موقتی برابر با } k \text{ در مکان } i \text{ (} 1 \leq k \leq M \text{)}.$$

حال با در نظر گرفتن مسیر نمونه‌ای $\mathcal{H}(M)$ ، برای هر $i, j \in E$ و $k \in \mathbb{N}$ ، $k \leq M$ ، برای احتمالات انتقال p_{ij} و هسته نیمه-مارکف q_{ij} برآوردگرهای تجربی زیر را داریم:

$$\hat{p}_{ij}(M) := \frac{N_{ij}(M)}{N_i(M)}, \quad \hat{q}_{ij}(k, M) := \frac{N_{ij}(k, M)}{N_i(M)} \quad (1)$$

علاوه بر این برآوردگر تجربی توزیع شرطی زمان اقامت موقت $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ برای هر دو حالت ثابت شده $i, j \in E$ به این صورت تعریف شده است:

$$\hat{f}_{ij}(k, M) := \frac{N_{ij}(k, M)}{N_{ij}(M)}. \quad (2)$$

اثبات و بررسی خواص مجانی این برآوردگرها در [۳] و [۳] آمده است. با استفاده از برآوردگرهای تابع انتقال نیمه-مارکف و هسته انباشته نیمه-مارکف که در بالا معرفی شد، برآوردگر قابلیت اطمینان سیستم در زمان k به صورت زیر پیشنهاد شده است [۳]:

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, M) &:= \alpha_1 \cdot \hat{\mathbf{P}}_{11}(k, M) \cdot 1_{s_1} \\ &= \alpha_1 \left[(\delta I - \hat{\mathbf{Q}}_{11})(\cdot, M) * \left(I - \text{diag}(\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, M) \cdot 1) \right)_{11} \right](k) 1_{s_1} \end{aligned} \quad (3)$$

همچنین برآوردگر نرخ خرابی یا شکست نیز به صورت زیر پیشنهاد شده است [۳]:

$$\hat{\lambda}(k, M) := \begin{cases} 1 - \frac{\hat{R}(k, M)}{\hat{R}(k-1, M)}, & \hat{R}(k-1, M) \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\hat{\lambda}(0, M) := 1 - \hat{R}(0, M)$$

۴ شبیه سازی قابلیت اطمینان سیستم نیمه-مارکف سه حالتی

در این بخش نتیجه قبل را با استفاده از شبیه سازی روی یک مدل نیمه-مارکف گسسته-زمان سه حالتی اعمال می کنیم. فضای حالت شامل $E = \{1, 2, 3\}$ که در آن $U = \{1, 2\}$ حالات در حال کار سیستم و $D = \{3\}$ حالت خرابی سیستم باشد. سیستم را با توزیع اولیه $\alpha := (1, 0, 0)$ و ماتریس احتمال انتقال زیر در نظر می گیریم:

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

توزیع زمان های اقامت در هر وضعیت نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$X_{12}(k) \sim \text{geometric}(0.15), \quad X_{21}(k) \sim \text{discreteWeibull}(0.3, 0.5)$$

$$X_{23}(k) \sim \text{discreteWeibull}(0.5, 0.7), \quad X_{31}(k) \sim \text{geometric}(0.2)$$

تابع چگالی احتمال توزیع وایبول گسسته در [۵] آمده است. با استفاده از توزیع های زمان های اقامت و ماتریس احتمال انتقال داده شده در بالا، نمونه راهی از یک زنجیر نیمه-مارکف سه حالتی با اندازه نمونه ۱۰۰۰۰، شبیه سازی کرده ایم. با استفاده از فرآیندهای شمارشی معرفی شده و به دست آوردن روابط ۱ و ۲، برآوردگرهای تجربی قابلیت اطمینان ۱ و نرخ شکست یا خرابی ۴ را بدست آورده ایم. برای نمونه شکل برآوردگر تجربی قابلیت اطمینان در پیوست آورده شده است.

مراجع

- [1] Limnios, N. and Oprişan, G., (2001), *Semi-Markov Processes and Reliability* (Boston: Birkhäuser).
- [2] Ouhbi, B. and Limnios, N., (2003), *Nonparametric reliability estimation for semi-Markov processes*. Journal of Statistical Planning of Inference, 109, 155–165.
- [3] Barbu, V., Boussemart, M. and Limnios, N., (2004), *Discrete time semi-Markov model for reliability and survival analysis*. Communications in Statistics – Theory and Methods, 33(11), 2833–2868.
- [4] Barbu, V. S. and Limnios, N. (2008). *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models Toward Applications*. Springer, New York.
- [5] Nakagawa, T. and Osaki, S. (1975). *The discrete Weibull distribution*. IEEE Transactions on Reliability, R-24(5):300–301.



برآوردیابی کلاسیک پارامتر تنش-مقاومت بر اساس توزیع لیندلی تعمیم یافته GLD5

رضائی، ا^۱ شرفی، م^۲ بهبودیان، ج^۳

گروه آمار، دانشگاه شیراز

چکیده

در این مقاله به برآوردیابی پارامتر تنش-مقاومت (R) براساس تعمیم جدیدی از توزیع لیندلی که اخیراً معرفی شده است، می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی، گشتاوری و UMVUE برای این پارامتر بدست آورده و سپس، با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی، به ارزیابی و مقایسه عملکرد این برآوردگرها نسبت به هم و با توجه به حجم نمونه‌های مختلف پرداخته می‌شود.

کلمات کلیدی: مدل تنش-مقاومت، توزیع لیندلی تعمیم یافته GLD5، برآورد ماکزیمم درستنمایی، UMVUE

۱ پیش‌گفتار

توزیع لیندلی از مهمترین توزیع‌ها در مدل‌بندی داده‌های طول عمر و قابلیت اعتماد می‌باشد، از این رو این توزیع توسط محققین مختلفی تعمیم یافته است. توزیع GLD5، پنجمین و جدیدترین تعمیم از توزیع لیندلی می‌باشد که توسط ابوعمّوح و همکاران (۲۰۱۵) معرفی شده است. این توزیع آمیخته‌ای از دو توزیع گامای $\text{Gamma}(\alpha, \theta)$ و $\text{Gamma}(\alpha - 1, \theta)$ با احتمال آمیختگی به ترتیب $p_1 = \frac{1}{(1+\theta)}$ و $p_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)}$ است و دارای تابع چگالی و تابع توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-2}}{(1+\theta)\Gamma(\alpha)} (x + \alpha - 1)e^{-\theta x}, \quad \theta \geq 0, \alpha \geq 2, x \geq 0, \quad (1)$$

^۱asadollah.matin@gmail.com

^۲msharafi@susc.ac.ir

^۳behboodian@susc.ac.ir

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \frac{(\alpha - 1)\theta\Gamma(\alpha - 1, \theta x) + \Gamma(\alpha, \theta x)}{(1 + \theta)\Gamma(\alpha)}, \quad \theta \geq 0, \alpha \geq 2, x \geq 0,$$

جایی که

$$\Gamma(\alpha, \theta x) = \int_{\theta x}^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du = (\alpha - 1)! e^{-\theta x} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\theta x)^k}{k!}.$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی (۱) باشد در این صورت آن را با $X \sim \text{GLD5}(\alpha, \theta)$ نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که $\text{GLD5}(2, \theta)$ همان توزیع لیندلی کلاسیک می‌باشد [۱].

در قابلیت اعتماد، مدل تنش-مقاومت توصیف‌کننده طول عمر یک سیستم است وقتی که سیستم مقاومت تصادفی X را در برابر تنش تصادفی Y بکار می‌برد. در این مدل، سیستم دچار اختلال شده و از کار می‌افتد اگر و فقط اگر در هر زمان تنش بتواند بر مقاومت سیستم غلبه کند یا به عبارت دیگر $Y \geq X$. همچنین در این مدل با استفاده از $R = P(Y < X)$ که به آن پارامتر تنش-مقاومت گفته می‌شود، میزان اعتمادی که می‌توان به سیستم داشت تا به کار خود ادامه دهد، سنجیده می‌شود. ایده اصلی این مدل توسط بیرنوم در سال ۱۹۵۶ مطرح شده است [۲].

۲ پارامتر تنش-مقاومت

در این بخش، با این فرض که $X \sim \text{GLD5}(\alpha, \theta_1)$ و $Y \sim \text{GLD5}(\alpha, \theta_2)$ متغیرهای مستقل باشند (α معلوم)، به محاسبه $R = P(Y < X)$ می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} R &= R(\theta_1, \theta_2) = P(Y < X) = \int_0^{\infty} F_Y(x) f_X(x) dx \\ &= 1 - \frac{1}{(\theta_1 + 1)(\theta_2 + 1)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right)^{\alpha} [(\theta_2 + 1) \sum_{k=0}^{\alpha-2} \frac{\Gamma(k + \alpha - 1)}{k!} \\ &\quad \times \left(\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^k \{k + (\alpha - 1)(1 + \theta_1 + \theta_2)\} \\ &\quad + \frac{\Gamma(2\alpha - 2)}{(\alpha - 1)!} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right)^{\alpha-1} (\alpha - 1)(2 + \theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (2)$$

۳ برآوردیابی پارامتر تنش-مقاومت

پس از محاسبه R ، با فرض این که $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_m$ نمونه‌هایی مستقل به ترتیب از $\text{GLD5}(\alpha, \theta_1)$ و $\text{GLD5}(\alpha, \theta_2)$ باشند، در این بخش به برآوردیابی R خواهیم پرداخت.

۱.۳ برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی $R(\hat{R}_1)$

با توجه به خاصیت پایایی، $\hat{R}_1 = R(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ ؛ جایی که $\hat{\theta}_1 = \frac{-(\bar{x} - \alpha + 1) + \sqrt{(\bar{x} - \alpha + 1)^2 + 4\alpha\bar{x}}}{2\bar{x}}$ و $\hat{\theta}_2 = \frac{-(\bar{y} - \alpha + 1) + \sqrt{(\bar{y} - \alpha + 1)^2 + 4\alpha\bar{y}}}{2\bar{y}}$ به ترتیب برآوردگرهای ماکزیمم درست‌نمایی θ_1 و θ_2 هستند، وقتی که α معلوم می‌باشد.

۲.۳ برآوردگر گشتاوری $R(\hat{R}_r)$

برآوردگر گشتاوری R را می‌توان با توجه به $\hat{R}_r = R(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_r)$ بدست آورد وقتی که $\tilde{\theta}_1$ و $\tilde{\theta}_r$ برآوردگرهای گشتاوری می‌باشند.

با توجه به [۱]، $E[X] = \frac{\alpha + (\alpha - 1)\theta_1}{\theta_1(\theta_1 + 1)} = \bar{X}$ ، از این رو $\bar{X}\theta_1 + (\bar{X} - \alpha + 1)\theta_1 - \alpha = 0$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{-(\bar{X} - \alpha + 1) + \sqrt{(\bar{X} - \alpha + 1)^2 + 4\alpha\bar{X}}}{2\bar{X}}.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد،

$$\tilde{\theta}_r = \frac{-(\bar{Y} - \alpha + 1) + \sqrt{(\bar{Y} - \alpha + 1)^2 + 4\alpha\bar{Y}}}{2\bar{Y}}.$$

همان طور که مشاهده می‌شود برآوردگرهای ماکزیمم درست‌نمایی و گشتاوری R یعنی $\hat{R}_1$ و $\hat{R}_r$ برابرند و با توجه به سازگاری برآوردگر گشتاوری، برآوردگر $\hat{R}_1$ نیز سازگار می‌باشد.

۳.۳ R SUMVUE $(\hat{R}_r)$

چون $U = \sum_{i=1}^n X_i$ و $V = \sum_{j=1}^m Y_j$ به ترتیب آماره‌های بسنده و کامل برای θ_1 و θ_r هستند، $\hat{R}_r$ را می‌توان با $E[\phi(X_1, Y_1) | U = u, V = v]$ بدست آورد وقتی که $\phi(X_1, Y_1) = I_{\{Y_1 < X_1\}}(X_1, Y_1)$ یک برآوردگر نااریب برای R می‌باشد.

پس از یک سری محاسبات $\hat{R}_r$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\hat{R}_r = \begin{cases} \frac{1}{g(u, v)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} C_{k,n} C_{s,m} J_1(u, v, \tau, \eta) & u \leq v \\ \frac{1}{g(u, v)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} C_{k,n} C_{s,m} J_r(u, v, \tau, \eta) & v \leq u \end{cases}$$

جایی که $A_w(z) = \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} \frac{z^{\alpha w - j - 1}}{\Gamma(\alpha w - j)}$ ، $C_{q,p} = \frac{\binom{p-1}{q}}{\Gamma(\alpha(p-1) - q)}$ ، $\eta = \alpha(m-1) - s - 1$ ، $\tau = \alpha(n-1) - k - 1$ ، $g(u, v) = [\Gamma(\alpha)]^r A_n(u) A_m(v)$

$$\begin{aligned} J_1(u, v, \tau, \eta) &= \sum_{p=0}^{\alpha-2} \sum_{h=0}^{\alpha-2} \sum_{t=0}^{\eta} \binom{\alpha-2}{p} \binom{\alpha-2}{h} \binom{\eta}{t} \frac{(-1)^{p+h} u^{\tau(\alpha-2)-p-h}}{(p+\tau+1)(p+\tau+2)} \\ &\times (v-u)^{\eta-t} \int_0^u [(u+\alpha-1)(p+\tau+2) - (p+\tau+1)w] \\ &\times w^{\tau+p+h+t+1} (u-w+\alpha-1) dw, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} J_r(u, v, \tau, \eta) &= \sum_{p=0}^{\alpha-2} \sum_{h=0}^{\alpha-2} \sum_{t=0}^{p+\tau+1} \binom{\alpha-2}{p} \binom{\alpha-2}{h} \binom{p+\tau+1}{t} (u-v)^{p+\tau+1-t} \\ &\times \frac{(-1)^{p+h} u^{\alpha-2-p} v^{\alpha-2-h}}{(p+\tau+1)(p+\tau+2)} \int_0^v [(u+\alpha-1)(p+\tau+2) \\ &- (p+\tau+1)(u-v+z)] z^{\eta+h+t} (v-z+\alpha-1) dz. \end{aligned}$$

۴ شبیه سازی

جدول زیر مقادیر برآوردگرهای R معرفی شده در بخش قبل به همراه MSE آن‌ها را با توجه به حجم نمونه‌های مختلف و تعداد تکرار ۱۰۰۰ نشان می‌دهد. برای این منظور با استفاده از نرم‌افزار R ، نمونه‌هایی از دو توزیع $GLD5$ با پارامترهای $\theta_1 = 1$ ، $\theta_2 = 1$ و $\alpha = 3$ شبیه‌سازی شده‌اند، که از این رو مقدار واقعی R برابر است با ۰/۵. همان طور که مشاهده می‌شود بر اساس این مطالعه شبیه‌سازی، MSE برآوردگرها با افزایش حجم نمونه کاهش می‌یابد و همواره MSE ی $\hat{R}_1$ از MSE ی $\hat{R}_2$ کمتر می‌باشد.

جدول ۱: برآوردهای R به همراه MSE آن‌ها

n	m	$\hat{R}_1$	$MSE(\hat{R}_1)$	$\hat{R}_2$	$MSE(\hat{R}_2)$
۱۵	۲۰	۰/۴۹۷	۰/۰۰۷۸۶	۰/۴۹۷	۰/۰۰۸۱۹
۱۵	۲۵	۰/۴۹۸	۰/۰۰۷۷۳	۰/۵۰۳	۰/۰۰۷۷۸
۲۰	۱۵	۰/۴۹۸	۰/۰۰۷۸۵	۰/۴۹۲	۰/۰۰۸۰۱
۲۰	۲۰	۰/۴۹۵	۰/۰۰۶۸۳	۰/۴۹۱	۰/۰۰۷۴۲
۲۰	۲۵	۰/۵۰۱	۰/۰۰۵۹۳	۰/۴۹۶	۰/۰۰۷۱۶
۲۵	۲۰	۰/۴۹۹	۰/۰۰۶۰۱	۰/۴۹۹	۰/۰۰۶۹۷
۲۵	۲۵	۰/۵۰۲	۰/۰۰۵۲۵	۰/۵۱۰	۰/۰۰۵۵۱

مراجع

- [1] Abouammoh, A. M., Alshangiti, A. M. and Ragab, I. E. (2015), *A new generalized Lindley distribution*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 1–17.
- [2] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), *The Stress-Strength Model and its Generalized: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore.



تحلیل بقاء پیشامدهای بازگشتی

خاکی یادگار، س ۱ حبیبی راد، آ ۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

تحلیل بقاء، مجموعه ای شامل تکنیک های آماری متنوع برای تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی است که دارای مقادیر مثبت می باشد که برای هر یک هم مبداء زمانی دقیق و هم برای آن ها پایان (شکست، بهبودی و مرگ) تعریف می شود. در بسیاری از تحقیقات پزشکی زمان وقوع یک واقعه موردنظر محقق است. در این داده ها گاهی با مواردی روبه رو می شویم که هر فرد رخداد موردنظر را بیش از یک بار تجربه می کند. به عنوان مثال بیماران قلبی ممکن است در طی یک زمان مشخص بیش از یک بار حمله قلبی را تجربه کنند. هدف ما معرفی و مقایسه رهیافت های آماری شامل مدل برازش فزونی، مدل های شرطی نوع اول و دوم و مدل حاشیه ای می باشد. مجموعه داده های عود شامل اطلاعات بالینی ثبتی طی ویزیت های متوالی از یک بیمار می باشد. داده ها شامل نمونه ای به حجم ۶۴ از بیماران قلبی هستند که از ابتدای سال ۱۳۸۴ تا پایان نیمه اول سال ۱۳۸۷ در کلینیک قلب بیمارستان قائم (عج) مشهد جمع آوری شده اند. داده ها شامل متغیر سن بیمار، جنسیت، سابقه بیماری، فاصله بین دو نقطه اندازه گیری شده در قلب و ...، که هر چه فاصله بین این دو نقطه بیشتر باشد احتمال خطر بروز سکت در بیمار افزایش می یابد. در این مقاله چهار مدل آماری مورد بررسی قرار گرفته است و بامقایسه مقدار آماره آکایک آن ها مدل شرطی نوع اول بهترین مدل برای برازش به داده ها انتخاب شده است. همچنین تحلیل داده ها را از دیدگاه پارامتری به وسیله نمودار مورد بررسی قرار دادیم نتایج حاکی از این است که مدل پارامتری با فرض وایبل بودن توزیع داده ها مناسب نمی باشد.

کلمات کلیدی: داده بازگشتی، مدل برازش فزونی، مدل میانگین متناسب، مدل شرطی نوع اول.

۱ مقدمه

چهار مدل برای تحلیل این نوع داده ها ارایه می شود:

۱ - مدل برازش فزونی توسط آندرسون و گیل^۱ (۱۹۸۲) و مدل میانگین های متناسب.

^۱ samanehkhaki99@yahoo.com

^۲ ahabibi@um.ac.ir

^۱ Andersen and Gill

۲- مدل شرطی ویلیام و پترسون^۲ (۱۹۸۱) که خود از دو دیدگاه بررسی می شود که به ترتیب مدل شرطی نوع اول و نوع دوم نامیده می شود.

۳- مدل ^{3}wlw .

بررسی داده ها در این مقاله توسط نرم افزار SAS نسخه ۹/۱ و با استفاده از رویه *phreg* انجام شده است. ابتدا مدل برازش فزونی در نظر می گیریم. رهیافت فوق یک مدل کاکس به هر یک از مولفه های زمان برازش می دهد. تفاوت این دو مدل در تعدیل شدن واریانس است. مدل برازش فزونی بر اساس واریانس تخمین می یابد. اما در مدل میانگین های متناسب مدل بر اساس واریانس تعدیل یافته است. به همین علت اثر دو متغیر سن و جنسیت در مدل برازش فزونی معنی دار است در حالی که اثر همین متغیرها در مدل میانگین های متناسب معنی دار نمی باشد. نتایج برازش مدل به این ترتیب است: در مدل برازش فزونی اثرات سن و جنسیت با p مقدارهای ۰/۰۰۰۷ و ۰/۰۲۴ معنی دار هستند و نسبت مخاطره برای متغیر سن نشان می دهد که اگر سن فرد به اندازه یک واحد تغییر کند مخاطره به اندازه ۱/۰۲۱ افزایش خواهد یافت.

اثر متغیر سن در این مدل با $p = ۰/۰۰۰۷$ به طور معنی داری نسبت به مدل میانگین های متناسب با $p = ۰/۱۱۰۵$ بیشتر است. همان طور که گفته شد دلیل تفاوت معنی داری اثرات در این دو مدل تعدیل شدن واریانس است. تحلیل این دو مدل در خروجی زیر مشاهده می شود.

جدول ۱: مدل برازش فزونی بر اساس واریانس

پارامتر	درجه آزادی	برآورد پارامتر	خطای استاندارد	آماره کای دو	$Pr > ChiSq$	نرخ مخاطره
سن	۱	۰/۰۲۰۸۰	۰/۰۰۶۱۲	۱۱/۵۴۰۶	۰/۰۰۰۷	۱/۰۲۱
جنسیت	۱	-۰/۶۱۰۵۱	۰/۲۷۰۵۰	۵/۰۹۴۰	۰/۰۲۴۰	۰/۵۴۳
سابقه بیماری	۱	۰/۱۷۶۳۴	۰/۳۹۹۶۷	۰/۱۹۴۷	۰/۶۵۹۱	۱/۱۹۳
فاصله بین دو نقطه	۱	۰/۰۰۰۲۸۶۸	۰/۰۰۴۹۵	۰/۰۰۳۴۴	۰/۹۵۳۸	۱/۰۰

جدول ۲: مدل میانگین های متناسب بر اساس واریانس تعدیل یافته

پارامتر	درجه آزادی	برآورد پارامتر	خطای استاندارد	آماره کای دو	$Pr > ChiSq$	نرخ مخاطره
سن	۱	۰/۰۲۰۸۰	۰/۰۱۳۰۳	۲/۵۴۷۲	۰/۱۱۰۵	۱/۰۲۱
جنسیت	۱	-۰/۶۱۰۵۱	۰/۴۵۸۴۰	۱/۷۷۳۸	۰/۱۸۲۹	۰/۵۴۳
سابقه بیماری	۱	۰/۱۷۶۳۴	۰/۶۵۹۶۶	۰/۰۷۱۵	۰/۷۸۹۲	۱/۱۹۳
فاصله بین دو نقطه	۱	۰/۰۰۰۲۸۶۸	۰/۰۰۴۹۵	۰/۰۰۳۴	۰/۹۵۳۸	۱/۰۰

حال مدل شرطی را در نظر می گیریم، در این مدل مجموعه ریسک برای $k+1$ امین ویزیت (تجربه) از رخداد مورد نظر به آن بیمارانی که ابتدا k ویزیت از همان رخداد را داشته اند محدود می شود. برای مثال بیماری که تنها یک بار ویزیت می شود یک مشاهده برای رخداد مکرر داریم و این بیمار یک مشاهده سانسور شده برای دومین ویزیت محسوب می شود و نباید در مجموعه ریسک برای ویزیت های سوم و چهارم قرار گیرد. چون تعداد محدودی از بیماران حداکثر ۱۳ بار ویزیت از رخداد موردنظر را تجربه کرده اند ما تنها به بررسی ۵ ویزیت از رخداد موردنظر اکتفا می کنیم. به طور مثال برای اثر متغیر سن می خواهیم بررسی نمائیم که آیا اثر متقابل سن و اولین ویزیت بیماران بر روی متغیر وابسته (روز مناسب برای وارد نمودن شوک) موثر است یا خیر؟ نتایج تحلیل نشان می دهد

^۲Williams and Peterson

^۳Wei lin and weissfeld

که ۳۰/۲۶ درصد داده ها سانسور شده هستند. اثر متقابل سن و ویزیت چهارم برای کل بیماران با p مقدار ۰/۰۴۷، معنی دار است. اثر متقابل جنسیت و ویزیت چهارم نیز با p مقدار ۰/۰۲۹ معنی دار می باشد. و هیچ اثر معنی داری برای هر کدام از اثرات متقابل متغیر سابقه بیماری و ۵ بار ویزیت و فاصله اندازه گیری شده بین دو نقطه قلب و ۵ بار ویزیت دیده نمی شود. به منظور متناسب بودن خطرات می توانیم فرضیه $\beta = 0$ را مورد آزمون قرار داد. اگر آزمون منجر به معنی داری β گردد به این معناست که فرض متناسب بودن خطرات معتبر نمی باشد. طبق آزمون نسبت راستنمائی فرضیه فوق در سطح خطای ۰/۰۵ با p مقدار ۰/۴۵ پذیرفته می شود بنابراین خطرات در مدل کاکس متناسب می باشد. حال به بررسی مدل شرطی نوع دوم می پردازیم. نتایج نشان می دهد که هیچ اثر معنی داری از اثرات متقابل متغیر سابقه بیماری و ۵ بار ویزیت، فاصله اندازه گیری شده بین دو نقطه قلب و ۵ بار ویزیت، سن بیمار و ۵ بار ویزیت، جنسیت بیمار و ۵ بار ویزیت دیده نمی شود. ضریب مخاطره برای اثر متقابل متغیر سن و ویزیت اول، اثر متقابل متغیر سن و ویزیت دوم بیشتر از یک است پس آزمایش با کاهش در میزان بقاء همراه است. طبق آزمون نسبت راستنمائی فرضیه صفر در سطح خطای ۰/۰۵ با p مقدار ۰/۹۸ پذیرفته می شود بنابراین فرض متناسب بودن خطرات معتبر می باشد. چهارمین رهیافت برای تحلیل داده ها مدل wlw می باشد. داده های عود یک حالت خاص از چندین پیشامد داده ها هستند که زمان های عود به عنوان زمان های شکست چند متغیره محسوب می شود. و این روش یک مدل کاکس به هریک از مولفه های زمان برازش می دهد و یک استنباط آماری از پارامترهای رگرسیون بر اساس یک ماتریس کواریانس انجام می دهد. در این مدل برخلاف مدل شرطی بیماری که رخداد موردنظر را یک بار تجربه می کند علاوه بر اینکه یک مشاهده سانسور شده برای دومین ویزیت از رخداد موردنظر محسوب می شود، یک مشاهده سانسور شده برای ویزیت های سوم، چهارم و پنجم نیز می باشد. به همین علت است که درصد مشاهدات سانسور شده در مدل wlw همواره از درصد مشاهدات سانسور شده مدل شرطی بیشتر است. در مدل wlw از مجموع ۶۵ بیمار، ۶۳ بیمار تنها یک بار رخداد، ۳۴ بیمار ۲ بار رخداد و به همین ترتیب تنها ۳ بیمار ۱۳ بار رخداد مورد نظر محقق را تجربه کرده اند. نتایج این مدل نشان می دهد که هیچ اثر معنی داری از اثرات متقابل متغیر سابقه بیماری و ۵ بار ویزیت، فاصله اندازه گیری شده بین دو نقطه قلب و ۵ بار ویزیت، سن بیمار و ۵ بار ویزیت، جنسیت بیمار و ۵ بار ویزیت دیده نمی شود.

۲ دست آوردهای پژوهش

آزمون همگنی واریانس برای ۱۳ بار ویزیت افراد از رخداد موردنظر نشان می دهد که فرض برابری واریانس ها با p مقدار ۰/۰۰۰۱ رد می شود. به بیان دیگر ویزیت اول تا سیزدهم از نظر زمان مناسب وارد نمودن شوک برای کل بیماران واریانس یکسانی ندارد. مقدار آماره کای دو برابر با ۱۱۳/۳۶۵ و درجه آزادی ۱۲ می باشد. با توجه به همگن نبودن واریانس ها به بررسی جداگانه ویزیت اول تا سیزدهم می پردازیم. از مجموع ۶۴ بیماری که برای اولین بار ویزیت شده اند ۲۸ بیمار مشاهده کامل و ۳۶ بیمار دیگر سانسور شده هستند. همچنین ۱۷ داده مربوط به بیماران زن و ۴۷ داده مربوط به بیماران مرد می باشد و ۶ بیمار دارای سابقه بیماری قلبی و ۵۸ بیمار دیگر سابقه بیماری ندارند. با توجه به اینکه تعداد بیمارانی که دارای سابقه بیماری هستند در مقابل بیماران بدون سابقه بسیار کم هستند، لذا ما از مقایسه سابقه بیماری و روز مناسب برای وارد نمودن شوک در این تحلیل خودداری می کنیم. برای بررسی متغیر سن بیمار می توان از نمودار هیستوگرام و یا استفاده از آماره های (انحراف معیار، میانگین و...) داده ها را خلاصه نمود. میانگین سن بیماران قلبی ۴۷/۶۲ و حداقل سن بیماران ۱۲ سال و حداکثر سن آنان ۷۸ سال می باشد. بیشترین فراوانی سن بیماران در بازه بین ۴۰ و ۶۰ سال است. اثرات متغیرهای سن، جنسیت، سابقه

فامیلی، فاصله بین دو نقطه اندازه گیری در قلب در سطح خطای ۰.۰۵ در مدل میانگین های متناسب معنی دار نمی باشد. یکی از روشهای مقایسه مدل های آماری آماره آکایک است که باید پس از برازش دادن هر مدل مقدار آن محاسبه گردد و مدلی که مقدار آماره آکایک آن از همه کمتر باشد مدل بهتری است. نتیجه تحلیل نشان می دهد که مقدار آماره آکایک در مدل شرطی نوع اول برابر با ۳۸۳/۶۸ در مقایسه با سه مدل دیگر کمترین مقدار را دارد، لذا بهترین مدل برای برازش به داده ها مدل شرطی نوع اول است.

همچنین در صورت داشتن داده های بقاء و ایبل بودن توزیع داده ها را با کمک نمودار می توان تعیین نمود. به این صورت که ابتدا $S(t)$ را از روش کاپلن مایر برآورد می کنیم. سپس $\log[-\log S(t)]$ را در مقابل $\log t$ رسم می کنیم. با توجه به اینکه خطوط در این نمودار برای ۵ بار ویزیت از رخداد مورد نظر همدیگر را قطع نموده اند لذا مدل پارامتری با فرض وایبل بودن توزیع داده ها مناسب نمی باشد.

مراجع

- [1] Andersen P.K. and Gill, R.D. (1982), *Cox's regression model for counting processes: a large sample study.*, Ann. Statist, 10, 1100-1120.
- [2] Lawless J.F. and Nadeau, c. (1995), *Some simple and robust methods for the analysis of recurrent events*, Technometrics, 158-169.
- [3] Lin, D.Y., Wei, L.J., Yang, I. and Ying, Z. (2000), *Semi-parametric regression for the mean and rate functions of recurrent events* J. R. Statist. Soc., B, 62, 711-730.
- [4] Pepe M.S. and Cai, J. (1993), *Some graphical displays and marginal regression analyses for recurrent failure times and time dependent covariates.* J.AM. Statist. Assoc. 88, 811-820.
- [5] Prentice, R.L., Williams, B.J. and Peterson, A.V. (1981), *On the regression analysis of multivariate failure time data* biometrika, 68, 373-379.



پیش بینی در آزمون فشار - مرحله ای براساس سانسور فزاینده نوع دو

صادقپور، ا^۱ رزمخواه، م^۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله، پیش بینی در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور فزاینده نوع دو بررسی می‌گردد. برای این منظور فرض می‌شود طول عمر واحدهای آزمایشی در هر سطح فشار دارای توزیع نمایی باشند. با استفاده از داده‌های مشاهده شده در دو سطح فشار، برای کمینه و میانگین نمونه‌ای که در یک سطح فشار پایه به دست خواهد آمد فاصله پیش بینی تعیین می‌گردد.

کلمات کلیدی: بازه پیش‌بینی، آزمون فشار-مرحله‌ای، توزیع نمایی، سانسور فزاینده نوع دو

۱ مقدمه

از نقطه نظر آماری یکی از وجوه تمایز مطالعات طول عمر با سایر بخش‌ها، نحوه جمع‌آوری مشاهدات است. امروزه با وجود محصولات با قابلیت اعتماد بالا به دست آوردن تعداد معقولی مشاهده جهت انجام استنباط آماری معمولاً کار ساده‌ای نیست. یکی از روش‌های متداول در آزمون‌های طول عمر، برای بدست آوردن مشاهدات، به کار بردن آن‌ها در شرایطی سخت‌تر از شرایط نرمال است. این روش‌ها را روش‌های آزمون‌های طول عمر تسریع یافته می‌گویند. یکی از مهمترین انواع این آزمایش‌ها، آزمون‌های فشار مرحله‌ای است که توسط محققین زیادی از جمله ویوروس و بالاکریشن^۱ (۱۹۹۴)، و همکاران مطالعه شده‌اند. در این آزمون‌ها، مشاهدات خیلی سریع‌تر از حالتی که واحدها در شرایط نرمال مورد استفاده قرار می‌گیرند به دست می‌آیند. با این وجود می‌توان از روش‌های سانسور نیز استفاده نمود. در این مقاله با فرض اینکه طول عمر آزمودنی‌ها در یک آزمون فشار-مرحله‌ای تحت سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نمایی تبعیت می‌کنند، به پیش‌بینی طول عمر آزمودنی‌ها تحت یک فشار پایه می‌پردازیم. تحلیل گران کنترل کیفیت و مهندسی قابلیت اعتماد به فراوانی با مسئله پیش‌بینی نتایج برای مشاهدات آینده از یک محصول خاص براساس نمونه ابتدایی مواجه می‌شوند.

^۱sadeghpour.amineh@shahroodut.ac.ir

^۲razmkhahm@um.ac.ir

^۱Viveros and Balakrishnan

۲ سانسور فزاینده نوع دو در آزمون فشار مرحله ای

در این بخش آزمون فشار- مرحله ای ساده (یعنی آزمایشی که فقط دو مرحله فشار در آن وجود دارد) تحت سانسور فزاینده نوع دو را بررسی می کنیم. فرض کنید تمام n واحد آزمایشی در ابتدا تحت کمترین فشار x_1 قرار می گیرند. پس از مشاهده اولین زمان شکست $T_{1,1}$ ، تعداد $R_{1,1}$ واحد آزمایشی از $n-1$ واحد باقیمانده به طور تصادفی حذف می گردد. در دومین زمان شکست $T_{1,2}$ ، تعداد $R_{1,2}$ واحد از $n-2-R_{1,1}$ واحد باقیمانده به تصادف از آزمایش خارج می شود. آزمایش ادامه می یابد تا زمانی که شکست r_1 ام در مرحله اول یعنی T_{1,r_1} اتفاق بیفتد. در زمان شکست T_{1,r_1} ، تعداد R_{1,r_1} واحد از $n-r_1-\sum_{j=1}^{r_1-1} R_{1,j}$ واحد باقیمانده به تصادف حذف می گردد. سپس سطح فشار به x_2 تغییر می یابد. همانند سطح فشار x_1 ، آزمون تا زمانی که r_2 شکست اتفاق بیفتد ادامه می یابد. بنابراین در سطح فشار x_2 ، زمان شکست $T_{2,1}, \dots, T_{2,r_2}$ از واحدهای آزمایشی مشاهده می شوند. در زمان شکست $T_{2,j}$ ، تعداد $R_{2,j}$ واحد به طور تصادفی از $n-\sum_{i=1}^{r_1}(1+R_{1,i})-j-\sum_{i=1}^{j-1} R_{2,i}$ واحد باقیمانده باقیمانده حذف می گردد. برای اطلاعات بیشتر در خصوص سانسور فزاینده نوع دو، می توان به بالا کریشن و آگاروالا^۲ (۲۰۰۰) و بالا کریشن و کرامر^۳ (۲۰۱۴) مراجعه نمود.

تابع چگالی احتمال توأم آماره های مرتب سانسور فزاینده نوع دو در مدل مورد نظر را می توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$f_1(t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,r_1}) f_2(t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,r_2} | t_{1,1}, \dots, t_{1,r_1}), \quad (1)$$

که در آن f_1 تابع چگالی احتمال متغیرهای اشاره شده در سطح اول فشار و f_2 تابع چگالی احتمال شرطی متغیرهای سطح دوم فشار به شرط مشاهده متغیرهای سطح اول فشار می باشد. با توجه به تابع چگالی احتمال توأم آماره های مرتب سانسور فزاینده نوع دو، داریم

$$f_1(t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,r_1}) = c_1 \prod_{j=1}^{r_1} f_{\theta_1}(t_{1,j}) (\bar{F}_{\theta_1}(t_{1,j}))^{R_{1,j}} (\bar{F}(t_{1,r_1}))^{(n-\sum_{j=1}^{r_1}(1+R_{1,j}))}. \quad (2)$$

که در آن $c_1 = n(n-R_{1,1}-1)(n-R_{1,1}-R_{1,2}-2) \dots (n-\sum_{j=1}^{r_1-1}(1+R_{1,j}))$. در صورتی که توزیع طول عمر واحدهای آزمایشی در هر سطح فشار نمایی با میانگین θ_i باشند، داریم

$$f_1(t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,r_1}) = c_1 \theta_1^{-r_1} \exp(-t_1^*/\theta_1), \quad (3)$$

طوری که

$$t_1^* = \sum_{j=1}^{r_1} (1+R_{1,j}) t_{1,j} + \left[n - \sum_{j=1}^{r_1} (1+R_{1,j}) \right] t_{1,r_1}, \quad (4)$$

زمان کل آزمایش تحت فشار x_1 را نشان می دهد. همچنین، تابع چگالی احتمال شرطی در رابطه (۱) به صورت زیر به دست می آید

$$f_2(t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,r_2} | t_{1,1}, \dots, t_{1,r_1}) = c_2 \theta_2^{-r_2} \exp\left(-\frac{t_2^*}{\theta_2}\right) \quad (5)$$

^۲Balakrishnan and Aggarwala

^۳Balakrishnan and cramer

که در آن

$$t_{\gamma}^* = \sum_{j=1}^{r_{\gamma}} (1 + R_{\gamma,j})(t_{\gamma,j} - t_{1,r_1}) + \left[n - \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{r_i} (1 + R_{i,j}) \right] (t_{\gamma,j} - t_{1,r_1}) \quad (6)$$

زمان کل آزمایش تحت فشار x_{γ} را نشان می دهد و

$$c_{\gamma} = \left(n - \sum_{j=1}^{r_1} (1 + R_{1,j}) \right) \left(n - \sum_{j=1}^{r_1} (1 + R_{1,j}) - R_{\gamma,1} - 1 \right) \\ \times \dots \left(n - \sum_{j=1}^{r_1} (1 + R_{1,j}) - \sum_{j=1}^{r_{\gamma}-1} (1 + R_{\gamma,j}) \right).$$

بنابراین،

$$f(t_{1,1}, \dots, t_{1,r_1}, t_{\gamma,1}, \dots, t_{\gamma,r_{\gamma}}) = c_1 \theta_1^{-r_1} e^{-\left(\frac{t_1^*}{\theta_1}\right)} c_{\gamma} \theta_{\gamma}^{-r_{\gamma}} e^{-\left(\frac{t_{\gamma}^*}{\theta_{\gamma}}\right)},$$

که در آن t_1^* و t_{γ}^* به ترتیب در (۴) و (۶) تعریف شده اند. در لم زیر خواص توزیعی این متغیرها را بررسی می کنیم.

لم ۱. فرض کنید t_1^* و t_{γ}^* که به ترتیب در (۴) و (۶) تعریف شدند، مقادیر مشاهده شده آماره های T_1^* و T_{γ}^* باشند. در این صورت این آماره ها مستقل از هم می باشند و $2T_i^*/\theta_i$ دارای توزیع $\chi_{(2r_i)}^2$ می باشد ($i = 1, \gamma$).

۳ بازه های پیش بینی تحت فشار پایه

فرض کنید $T_1^*, T_{\gamma}^*, \dots, T_q^*$ نمونه تصادفی از طول عمرهای آینده تحت فشار پایه x هستند که دارای توزیع نمایی با میانگین θ و مستقل از طول عمرهای مشاهده در آزمایش فشار-مرحله ای می باشند. در این صورت پیش بینی کمینه و میانگین این نمونه بر اساس مشاهدات به دست آمده تحت فشارهای x_1 و x_{γ} بررسی خواهند شد.

۴ پیش بینی کمینه نمونه

فرض کنید $T_{(1)}$ نشان دهنده کمینه نمونه ای باشد که تحت فشار پایه به دست آمده است. بنا به لم ۱،

$$\frac{2T_1^*}{\theta_1} + \frac{2T_{\gamma}^*}{\theta_{\gamma}} \sim \chi_{(2(r_1+r_{\gamma}))}^2. \quad (7)$$

از طرفی چون تحت فشار پایه T_i^* دارای توزیع نمایی با میانگین θ است، بنابراین $\frac{2qT_{(1)}}{\theta}$ دارای توزیع $\chi_{(2r)}^2$ می باشد. در نتیجه،

$$\frac{qT_{(1)}\theta_1\theta_{\gamma}(r_1+r_{\gamma})}{\theta.(T_1\theta_{\gamma}+T_{\gamma}\theta_1)} \sim F(2, 2(r_1+r_{\gamma})),$$

که در آن $F(a, b)$ نشان دهنده توزیع فیشر با a درجه آزادی صورت و b درجه آزادی مخرج می باشد. اگر $k_1 =$ $F_{\gamma/2}(2, 2(r_1 + r_2))$ و $k_2 = F_{1-\gamma/2}(2, 2(r_1 + r_2))$ به ترتیب چندک های مرتبه $\gamma/2$ ام و $(1 - \gamma/2)$ ام این توزیع باشند، در این صورت می توان نشان داد بازه ی

$$\left(\frac{k_1 \theta_1 (T_1 \theta_2 + T_2 \theta_1)}{q \theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)}, \frac{k_2 \theta_1 (T_1 \theta_2 + T_2 \theta_1)}{q \theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)} \right) = 1 - \gamma.$$

یک بازه پیش بینی $100(1 - \gamma)\%$ برای $T_{(1)}$ است.

۵ پیش بینی میانگین نمونه

فرض کنید $\bar{T}^*$ نشان دهنده میانگین نمونه ای باشد که تحت فشار پایه به دست آمده است. ابتدا توجه شود که $\frac{\sum_{i=1}^q T_i}{\theta} \sim \chi_{(2q)}^2$ ، در نتیجه با استفاده از (۷)،

$$\frac{\bar{T}^* \theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)}{\theta_1 (T_1 \theta_2 + T_2 \theta_1)} \sim F(2q, 2(r_1 + r_2)).$$

$\sum_{i=1}^q T_i$ دارای توزیع $\Gamma(q, 1/\theta)$ و $\frac{\sum_{i=1}^q T_i}{\theta} \sim \chi_{(2q)}^2$ و چون $\frac{2T_1}{\theta_1} + \frac{2T_2}{\theta_2} \sim \chi_{(2r_1+2r_2)}^2$ در نتیجه

$$\frac{\bar{T}^* \theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)}{\theta_1 (T_1 \theta_2 + T_2 \theta_1)} \sim F(2q, 2(r_1 + r_2))$$

در صورتی که فرض کنیم

$k_3 = F_{\gamma/2}(2q, 2(r_1 + r_2))$ و $k_4 = F_{1-\gamma/2}(2q, 2(r_1 + r_2))$ می توان نشان داد

$$\left(\frac{T_1^* k_3 \theta_1 \theta_2 + T_2^* k_4 \theta_1 \theta_2}{\theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)}, \frac{T_1^* k_4 \theta_1 \theta_2 + T_2^* k_3 \theta_1 \theta_2}{\theta_1 \theta_2 (r_1 + r_2)} \right). \quad (8)$$

بازه پیش بینی $100(1 - \gamma)\%$ برای $\bar{T}^*$ است.

مراجع

- [1] Balakrishnan, N. ; Erhard cramer (2014), The art of Progressive Censoring: Applications to Reliability and Quality, Springer New York, Mordad 3,1393 AP-Mathematics- 645 pages.
- [2] Balakrishnan, N. and Aggarwala, A. (2000), Progressive Censoring-Theory, Methods, and Application. Boston: Birkhauser
- [3] Viveros, R.; Balakrishnan, N. (1994).Interval estimation of life characteristics from progressively censored data, Technometrics, 36, 84-91



بهینه سازی آستانه زمان- تعمیر و دوره تعمیر پیشگیرانه

صفائی، ف^۱ احمدی، ج^۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

کاهش هزینه تعمیرات و افزایش عملکرد سیستم‌ها همواره مورد توجه پژوهشگران مسایل قابلیت اعتماد می‌باشد. در این مقاله سیستمی در نظر گرفته شده است که در صورت بروز خرابی قابل تعمیر است. زمانی که یک خرابی رخ می‌دهد باید تصمیم به تعمیر و یا جایگذاری سیستم اتخاذ شود. برای این منظور، زمان تعمیر برآورد شده و اگر از آستانه‌ی مشخصی کمتر باشد، تعمیر و در غیر این صورت جایگذاری می‌شود. در این بررسی، آستانه بهینه برای تصمیم‌گیری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، در طول دوره عملکرد سیستم، به منظور افزایش طول عمر آن، میتوان تعمیرات پیشگیرانه انجام داد. بنابراین دوره تعمیرات پیشگیرانه بهینه نیز همزمان با آستانه زمان-تعمیر بهینه مشخص شده‌اند.

کلمات کلیدی: قابلیت اعتماد، بهینه سازی، آستانه زمان-تعمیر، تعمیر اصلاحی، تعمیر پیشگیرانه

۱ مقدمه

در الگوهای آستانه هزینه-تعمیر، زمانی که یک واحد خراب می‌شود، هزینه‌ی تعمیر برآورد می‌شود و اگر مقدار آن، کمتر از هزینه‌ی تعمیر از پیش تعیین شده، باشد؛ آنگاه مولفه مربوطه تعمیر و هزینه آن پرداخت می‌گردد و در غیر اینصورت با واحد نو جایگذاری می‌شود. مسئله آستانه هزینه-تعمیر، توسط دوهی و کیو (۲۰۰۵) بررسی شده است. در الگوهای آستانه زمان-تعمیر، اگر تعمیر در مدت زمان از پیش تعیین شده، کامل شود آنگاه مولفه از کار افتاده تعمیر شده و سیستم دوباره شروع به کار می‌کند؛ در غیر اینصورت؛ با واحدی نو جایگزین می‌شود. یکی از تحقیقات در این مورد کیم و یون (۲۰۱۰) می‌باشد. این نکته نیز قابل ذکر است که به این تعمیرات در متون قابلیت اعتماد، تعمیرات اصلاحی می‌گویند. از طرفی روشهای دیگری نیز وجود دارد که به بحث در مورد تعمیرات پیشگیرانه می‌پردازد. در واقع قبل از اینکه سیستم خراب شود، تعمیرات پیشگیرانه با هزینه کمتری نسبت به تعمیرات

^۱ safaei_fa123@yahoo.com

^۲ ahmadi-j@um.ac.ir

اصلاحی انجام می‌شود، تا از بروز تعمیرات اصلاحی و جایگذاری‌ها تا حد امکان جلوگیری کند. تحقیقات زیادی با در نظر گرفتن این شرایط، انجام شده است که از آن جمله می‌توان به ناکاگوا (۲۰۰۵ و ۲۰۰۷) و آون و کاسترو (۲۰۰۸) اشاره نمود. در این مقاله این دو سیاست را به هم آمیخته و به بهینه سازی سیستم می‌پردازیم.

۲ تشریح الگو و نمادها

یک سیستم را در نظر بگیرید که از زمان صفر شروع به کار می‌کند و مدت زمان کارکرد سیستم قبل از خرابی متغیر تصادفی غیرمنفی X با میانگین μ_f است. برای بررسی الگو در نظر گرفته شده، به نمادگذاری‌های زیر نیازمندیم.

T_a : متغیر تصادفی مدت زمان تعمیر سیستم با تابع چگالی $g(\cdot)$ و تابع توزیع $G(\cdot)$

t : آستانه ازپیش تعیین شده، برای زمان تعمیر برآورد شده.

$F(x)$ و $f(x)$: تابع توزیع و تابع چگالی زمان کارکرد سیستم تا وقوع خرابی.

k : هزینه جرمه‌ی هر واحد زمان که سیستم خاموش است.

e : نرخ درآمد هر واحد زمان که سیستم کار می‌کند.

e_1 : هزینه‌ی تعمیر سیستم به ازای هر واحد زمان.

e_2 : هزینه تعمیر پیشگیرانه.

c : هزینه‌ی ثابت مربوط به سفارش یک سیستم جدید.

L : مدت زمان انتظار برای تحویل یک سیستم جدید.

Y : متغیر تصادفی نامنفی با میانگین μ_y .

d : طول دوره‌های انجام تعمیر پیشگیرانه.

در صورتی که تصمیم به جایگزینی سیستم بگیریم، سیستم جدید از زمان $t = X + \frac{Y}{d} + L$ شروع به کار می‌کند. دقت

داریم که در اینجا مدت زمان جایگذاری سیستم جدید را ناچیز فرض نموده‌ایم. در صورتی که تصمیم به تعمیر

بگیریم، $t = X + \frac{Y}{d} + T_a$ شروع به کار می‌کند.

۳ فرمول‌بندی و بهینه‌سازی سیستم

زمان تعمیر تخمین زده شده، T_e تابعی از زمان تعمیر واقعی و خطای برآورد است یعنی $T_e = T_a + \epsilon$ ، که در آن خطا یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 فرض می‌شود. با داشتن $T_a = t$ آنگاه زمان تعمیر برآورد شده $T_e|t$ خواهد بود که تابع چگالی احتمال شرطی آن را با $h(u|t)$ نشان می‌دهیم. اگر زمان تعمیر واقعی داده شده، را با t نشان دهیم. آنگاه زمان تعمیر تخمین زده شده با شرط زمان تعمیر واقعی یک متغیر تصادفی با تابع توزیع شرطی زیر است

$$P(T_e \leq y | T_a = t) = \int_{-\infty}^y h(u|t) du = H(y|t). \quad (1)$$

به منظور یافتن متوسط یک دوره با شرط زمان تعمیر واقعی، می‌دانیم که

$$(۲) \quad \text{زمان تعمیر واقعی} \mid \text{طول یک دوره} =$$

$$X + \frac{Y}{d} + \begin{cases} \text{زمان تعمیر واقعی} & t. > \\ L & t. < \end{cases}$$

برای امیدریاضی طول یک دوره با شرط زمان تعمیر واقعی با توجه به (۱) و (۲) داریم

$$(۳) \quad E(\text{طول یک دوره} \mid \text{زمان تعمیر واقعی} = t) = \mu_f + \frac{\mu_y}{d} + tH(t, |t) + L\bar{H}(t, |t),$$

که در آن $\bar{H}(t, |t) = 1 - H(t, |t)$. همچنین برای به دست آوردن متوسط یک دوره با شرط زمان تعمیر واقعی، می‌دانیم که

$$(۴) \quad \begin{aligned} & \text{سود یک دوره} \mid (\text{زمان تعمیر واقعی} = t) = e. \left(X + \frac{Y}{d} \right) - e_r \left[\frac{X}{d} + \frac{Y}{d^r} \right] \\ & - \begin{cases} (e_1 + k)t & t. > \\ (kL + c) & t. < \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن $[x]$ نشان دهنده جزء صحیح x است. در نتیجه امیدریاضی سود یک دوره با شرط زمان تعمیر واقعی با توجه به (۴) به صورت زیر داده می‌شود

$$(۵) \quad \begin{aligned} E(\text{سود یک دوره} \mid \text{زمان تعمیر واقعی} = t) &= e. \left(\mu_f + \frac{\mu_y}{d} \right) - e_r \left(\frac{\mu_f}{d} + \frac{\mu_y}{d^r} \right) \\ &- ((e_1 + k)tH(t, |t) + (kL + c)\bar{H}(t, |t)). \end{aligned}$$

متوسط طول یک دوره غیر شرطی و سود یک دوره غیر شرطی را با استفاده از قاعده امیدریاضی مکرر، قابل محاسبه است. برای محاسبه متوسط طول یک دوره (غیر شرطی) با توجه به (۳) داریم

$$(۶) \quad \begin{aligned} T_L(t,.) &= E(\text{طول یک دوره}) = E\{\text{طول یک دوره} \mid \text{زمان تعمیر واقعی} = t\} \\ &= \mu_f + \frac{\mu_y}{d} + L + \int_{-\infty}^{\infty} (t - L)H(t, |t)dG(t). \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $V_L(t,., d)$ متوسط سود یک دوره (غیر شرطی) باشد، آنگاه با توجه به (۵) داریم

$$(۷) \quad \begin{aligned} V_L(t,., d) &= E\{E(\text{سود یک دوره} \mid \text{زمان تعمیر واقعی} = t)\} \\ &= e. \left(\mu_f + \frac{\mu_y}{d} \right) - e_r \left(\frac{\mu_f}{d} + \frac{\mu_y}{d^r} \right) \\ &- (kL + c) \int_{-\infty}^{\infty} \{(e_1 + k)t - (kL + c)\}H(t, |t)dG(t). \end{aligned}$$

با استفاده از (۶) و (۷) میانگین بلند مدت سود در هر واحد زمان به صورت

$$(۸) \quad TP_L(t,., d) = \frac{V_L(t,., d)}{T_L(t,., d)},$$

داده می‌شود. مسئله، یافتن آستانه زمان- تعمیر بهینه و طول دوره تعمیر پیشگیرانه بهینه است که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$TP_L(t^*_L, d^*) = \max_{t \leq t^*, d \leq d^*} TP_L(t, d). \quad (9)$$

بنابراین در صورت در نظر گرفتن میانگین سود بلند مدت، برای یافتن آستانه زمان- تعمیر بهینه و همچنین طول دوره تعمیر پیشگیرانه بهینه، می‌بایست رابطه‌ی فوق را در نظر گرفته و t^*_L و d^* را بیابیم.

۴ مثال

می‌توان فرض کرد $T_e|t \sim N(t, \sigma_e^2)$. همچنین زمان تعمیر واقعی، T_a ، از توزیع نرمال با میانگین μ_a و واریانس σ_a^2 پیروی می‌کند. با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) از کیم و یون (۲۰۱۰) و انجام محاسبات جبری نتایج زیر را داریم

$$T_L(t, d) = \mu_f + \frac{\mu_y}{d} + L + (\mu_a - L)\Phi\left(\frac{t - \mu_a}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\right) - \frac{\sigma_a^2}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\phi\left(\frac{t - \mu_a}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\right). \quad (10)$$

و

$$V_L(t, d) = e_1(\mu_f + \frac{\mu_y}{d}) - e_2(\frac{\mu_f}{d} + \frac{\mu_y}{d^2}) + L + (kL + c - (e_1 + k)\mu_a)\Phi\left(\frac{t - \mu_a}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\right) + \frac{(e_1 + k)\sigma_a^2}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\phi\left(\frac{t - \mu_a}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\right). \quad (11)$$

با جایگذاری روابط فوق در (۹) آستانه زمان- تعمیر بهینه و طول دوره‌های تعمیر پیشگیرانه بهینه بدست می‌آیند. فرض کنید $\sigma_a^2 = 1$ و $\mu_a = 2$ به علاوه $e_1 = 10$, $e_2 = 2$, $\sigma_e^2 = 1$, $e_3 = 50$, $\mu_f = 2$, $\mu_y = 10$, $L = 10$, متوسط دوره و سود یک دوره‌ی جایگذاری را محاسبه می‌کنیم در نهایت آستانه زمان- تعمیر بهینه و طول دوره تعمیر پیشگیرانه را با استفاده از ماکزیمم کردن نرخ میانگین سود بلندمدت محاسبه می‌کنیم. در این مثال برای آستانه زمان- تعمیر بهینه و طول دوره تعمیرات پیشگیرانه بهینه به ترتیب مقادیر $75/88$ و $20/78$ بدست آمده‌اند.

مراجع

- [1] Aven, T. and Castro, I.T (2008). A Minimal Repair Replacement Model with Two Types of Failure and a Safety Constraint. *European Journal of Operational Research*, **188**, 506-515.
- [2] Dohi, T., Kaio, N. (2005). Repair-Limit Replacement Program in Industrial Maintenance- Renewal Reward Process Modeling. In: Tokimasa, T., Hiraki, S., Kaio, N. eds *Applied Economic Information and Systems Sciences*, Fukuoka: Kyushu University Press.
- [3] Kim, H. G. and Yun, W. Y. (2010). A Repair-Time Limit Replacement Policy With Estimation Error. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 2365-2378.
- [4] Nakagawa, T. (2005). *Maintenance Theory of Reliability*, Springer-Verlag, London.
- [5] Nakagawa, T. (2007). *Shok and Damage Model in Reliability Theory*, Springer-Verlag, London.



برآورد فاصله ای تعمیم یافته برای توزیع بیرنهام-ساندرز

طوسیان، و^۱ عبدالله نژاد، ک^۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گلستان

چکیده

در این مقاله توزیع بیرنهام-ساندرز را معرفی کرده و فاصله اطمینان تعمیم یافته برای پارامتر شکل و برخی مقادیر مهم مانند میانگین، چندک ها و تابع قابلیت اعتماد را به دست می آوریم. در پایان برای مثالی عددی به وسیله شبیه سازی مونت-کارلو فاصله اطمینان تعمیم یافته برای مقادیر مورد نظر را محاسبه می کنیم.

کلمات کلیدی: توزیع بیرنهام-ساندرز، فاصله اطمینان تعمیم یافته، شبیه سازی مونت-کارلو

۱ مقدمه

توزیع های طول عمر، مدل های احتمالی مرتبط با یک متغیر طول عمر می باشد. خود متغیر طول عمر، متغیر تصادفی پیوسته و مثبتی است که زمان سپری شده تا وقوع پیشامد مورد نظر را نشان می دهد. توزیع دو پارامتری بیرنهام-ساندرز (B-S) [۱] متعلق به خانواده توزیعهای طول عمر می باشد و یکی از مهمترین توزیعهای خانواده شکلی - مقیاسی است، برای داده هایی که زمان شکست ناشی از گسترش ترک را نشان می دهد، مورد استفاده قرار می گیرد. در مواردی که پارامتر مورد علاقه در یک استنباط آماری صورت پیچیده ای دارد و کمیت محوری کلاسیک برای آن وجود ندارد، می توان با استفاده از مفهوم کمیت محوری تعمیم یافته برای پارامتر مورد نظر فاصله اطمینان تعمیم یافته بدست آورد.

تعریف ۱. گویم متغیر تصادفی X دارای توزیع بیرنهام-ساندرز با پارامترهای α و β است که با نماد $X \sim BS(\alpha, \beta)$ نشان داده می شود، اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد:

$$F(x) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right] \quad x > 0 \quad (1)$$

در این معادله α پارامتر شکل و β پارامتر مقیاس هستند.

^۱tousiyan.v@gmail.com

^۲kamel_abdollahnezhad@yahoo.com

تعریف ۲. فرض کنید $R = R(X; x, \theta, \delta)$ یک تابعی از X و x و θ و δ باشد بنابراین R یک کمیت محوری تعمیم یافته گفته می شود اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. برای یک x داده شده، توزیع احتمال R وابسته به پارامترهای مجهول نباشد.

۲. محور مشاهده شده $r_{obs} = R(X; x, \theta, \delta)$ به پارامتر مزاحم وابسته نباشد.

۲ برآورد فاصله ای پارامتر α و برخی کمیت های مهم دیگر

فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه از توزیع بیرننام-ساندرز (۱.۱) با اندازه نمونه n باشد، بنابراین

$$Y_i = \sqrt{\frac{X_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{X_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

یک نمونه از توزیع نرمال $N(0, \alpha^2)$ با اندازه نمونه n می باشد. داریم

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

بنابراین $\bar{Y}$ و S^2 از هم مستقلند، و

$$\bar{Y} \sim N\left(0, \frac{\alpha^2}{n}\right), \quad \frac{(n-1)S^2}{\alpha^2} \sim \chi^2(n-1)$$

و از آنجایی که

$$T(\beta) = \frac{\sqrt{n}\bar{Y}}{S} \sim t(n-1)$$

سان [۱۱] نشان داد که $T(\beta)$ یک تابع اکیدا نزولی از پارامتر β است و بر اساس کمیت محوری $T(\beta)$ ، یک فاصله اطمینان دقیق برای پارامتر مقیاس β با استفاده از قضیه زیر بدست آورد.

قضیه ۱. فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه از توزیع $B-S$ با اندازه n باشد. بنابراین برای هر $0 < \gamma < 1$ ، یک فاصله اطمینان دقیق $100(1-\gamma)\%$ برای β ، $[\beta_L, \beta_U]$ می باشد، که $\beta_L = \min(\beta_1, \beta_2)$ و $\beta_U = \max(\beta_1, \beta_2)$ و β_1 و β_2 دو جواب از حل معادله ی زیر می باشند

$$[(n-1)B^2 - Dt_{\frac{\gamma}{2}}^2]\beta^2 - 2[(n-1)AB - (1-AB)t_{\frac{\gamma}{2}}^2]\beta + (n-1)A^2 - Ct_{\frac{\gamma}{2}}^2 = 0, \quad (2)$$

با

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}, B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{X_i}}, C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sqrt{X_i} - A)^2, D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{X_i}} - B\right)^2$$

و t_{γ} نیز، γ درصد بالایی توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

حال فاصله اطمینان تعمیم یافته برای پارامتر α و در توزیع $B-S$ را بدست می آوریم. چون $T(\beta)$ یک تابع اکیدا نزولی از β است، پس جواب منحصر به فرد $g(T, X)$ از حل معادله (۱.۲) با جایگزینی $T(\beta) = T$ برابر است با

$$g(T, X) = \begin{cases} \max\{\beta_1, \beta_2\} & \text{if } T \leq 0 \\ \min\{\beta_1, \beta_2\} & \text{if } T > 0 \end{cases}$$

که β_1 و β_2 دو جواب معادله زیر می باشد

$$[(n-1)B^2 - DT^2]\beta^2 - 2[(n-1)AB - (1-AB)T^2]\beta + (n-1)A^2 - CT^2 = 0,$$

فرض کنید

$$U = \frac{\frac{n\bar{Y}^r}{\alpha^r}}{\frac{n\bar{Y}^r}{\alpha^r} + \frac{(n-1)S^r}{\alpha^r}} = \frac{n\bar{Y}^r}{\sum_{i=1}^n Y_i^r},$$

و

$$V = \frac{n\bar{Y}^r}{\alpha^r} + \frac{(n-1)S^r}{\alpha^r} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^r}{\alpha^r}. \quad (3)$$

U و V از هم مستقلند و $U \sim Beta(\frac{1}{r}, \frac{(n-1)}{r})$ و $V \sim \chi^r(n)$. توجه کنید که $U = \frac{[T(\beta)]^r}{[T(\beta)]^r + n - 1}$ ، بنابراین $T(\beta)$ و V از هم مستقلند. از معادله (۲.۲) داریم

$$\alpha = \left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^r}{V} \right]^{\frac{1}{r}} = \frac{S_r \beta^r - r n \beta + S_1}{\beta \cdot V}$$

که

$$S_1 = \sum_{i=1}^n X_i, S_r = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}.$$

طبق روش جایگشتی ویرهاندی [۱۲]، $g(T, X)$ را جایگزین β می نماییم و کمیت محوری تعمیم یافته برای پارامتر α برابر است با

$$W_1 = \left\{ \frac{s_r [g(T, x)]^r - r n g(T, x) + s_1}{g(T, x) V} \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (4)$$

$$= \alpha \left\{ \frac{g(T, X) (s_r [g(T, x)]^r - r n g(T, x) + s_1)}{g(T, x) (S_r [g(T, X)]^r - r n g(T, X) + S_1)} \right\}^{\frac{1}{r}}$$

که s_1 و s_r و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ به ترتیب مقادیر مشاهده شده ی S_1 و S_r و $X = (X_1, \dots, X_n)$ می باشند. میانگین و چندک P -ام و تابع قابلیت اعتماد توزیع بیرنهام-ساندرز به ترتیب برابر است با

$$\mu = \beta \left(1 + \frac{\alpha^r}{r} \right), \quad \chi_p = \frac{\beta}{r} \{ r + Z^r + Z \sqrt{Z^r + 4} \}$$

$$R(x, \cdot) = 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x \cdot}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x \cdot}} \right) \right]; \quad Z = \alpha \Phi^{-1}(p).$$

W_r, W_r و W_4 به ترتیب کمیت محوری تعمیم یافته میانگین، چندک P -ام و تابع قابلیت اعتماد می باشند که برابرند با

$$W_r = g(T, x) \left(1 + \frac{W_1^r}{r} \right) \quad (5)$$

$$W_r = \frac{g(T, x)}{r} \left\{ r + [W_1 \Phi^{-1}(p)]^r + W_1 \Phi^{-1}(p) \sqrt{[W_1 \Phi^{-1}(p)]^r + 4} \right\}, \quad (6)$$

$$W_4 = 1 - \Phi \left[\frac{1}{W_1} \left(\sqrt{\frac{\chi \cdot}{g(T, x)}} - \sqrt{\frac{g(T, x)}{x \cdot}} \right) \right]. \quad (7)$$

مثال ۱. داده های فرسودگی ورق های آلومینیومی که به وسیله بیرنهام و ساندرز ارائه شده، که شامل $n = 101$ مشاهده است که تحت بیشترین میزان استرس یعنی 3100 psi در 18 سیکل نوسانی به دست آمده است. طبق قضیه (۱.۲) فاصله اطمینان 90% و 95% پارامتر مقیاس β به ترتیب $[128/1882, 135/6226]$ و $[127/4858, 136/3706]$ می باشد. و بر اساس کمیت های محوری تعمیم یافته (۳.۲)، (۴.۲)، (۵.۲) و (۶.۲) با استفاده از شبیه سازی مونت-کارلو و تکرار $m = 10000$ مرتبه فاصله اطمینان تعمیم یافته (GCI) برای پارامتر α ، میانگین، چندک 10% و تابع قابلیت اعتماد $R(100)$ در جدول شماره (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱: فاصله اطمینان تعمیم یافته برای $\alpha, \mu, \chi_{\alpha/1}$ و $R(100)$ در مثال ۱

	α	μ	$\chi_{\alpha/1}$	$R(100)$
۹۰٪GCI	[۰.۱۵۳۵، ۰.۱۹۳۸]	[۱۳۰.۱۱۱۶، ۱۳۷.۶۹۴۰]	[۱۰۱.۶۰۰۶، ۱۰۹.۶۸۸۴]	[۰.۹۱۴۲، ۰.۹۶۹۲]
۹۵٪GCI	[۰.۱۵۰۴، ۰.۱۹۸۴]	[۱۲۹.۴۱۷۶، ۱۳۸.۵۱۰۶]	[۱۰۰.۷۵۴۰، ۱۱۰.۳۶۷۳]	[۰.۹۰۶۸، ۰.۹۷۲۴]

مراجع

- [1] Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C., 1969a. A new family of life distributions. J. Appl. Probab. 6, 319–327.
- [2] Sun, Z.L., 2009. The confidence intervals for the scale parameter of the Birnbaum–Saunders fatigue life distribution. Acta Armamentarii 30, 1558–1561(in Chinese).
- [3] Weerahandi, S., 1993. Generalized confidence intervals. J. Amer. Statist. Assoc. 88, 899–905.
- [4] Weerahandi, S., 2004. Generalized Inference in Repeated Measures: Exact Methods in MANOVA and Mixed Models. Wiley, New Jersey.
- [5] Wang BX. Generalized interval estimation for the Birnbaum–Saunders distribution. Comput Stat Data Anal. 2012;56:4320–4326.



بهبود قابلیت دسترسی سیستم‌های سری - موازی تعمیرپذیر تحت فرض غیر ثابت بودن نرخ شکست اجزاء

عبادی، ر^۱ زینل همدانی، ع^۲

دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

قابلیت دسترسی سیستم‌های تعمیرپذیر از جمله شاخص‌های مهمی است که افزایش آن یکی از اهداف پژوهشگران در بحث قابلیت اعتماد می‌باشد. در نظریه قابلیت اعتماد، روشهای متعددی برای این منظور ارائه گردیده که سه روش مهم مطرح شده در زمینه بالا بردن قابلیت دسترسی سیستم‌های سری - موازی تعمیرپذیر عبارتند از: (۱) روش کاهش نرخ شکست (۲) روش افزایش نرخ تعمیر (۳) روش افزایش اجزای ذخیره. در همه مطالعات صورت گرفته، نرخ شکست و نرخ تعمیر اجزای زیرسیستم‌ها ثابت در نظر گرفته شده‌اند. در این مقاله تاثیر دو روش کاهش و افزایش را با فرض غیرثابت بودن نرخ شکست اجزای زیرسیستم‌ها بررسی نموده و تاثیر آن با مطالعات قبلی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: قابلیت دسترسی، سیستم‌های سری - موازی تعمیرپذیر، کاهش نرخ شکست، افزایش نرخ تعمیر

۱ مقدمه

قابلیت دسترسی سیستم یک اندازه با اهمیت برای هر سیستم محسوب شده و دستیابی به یک سطح بالا و قابل قبول از قابلیت دسترسی ضروری می‌باشد. در عمل سه روش عمده برای بهبود طراحی یک سیستم تعمیرپذیر وجود دارد: (۱) روش کاهش نرخ شکست اجزاء که آن را روش کاهش می‌نامیم. (۲) روش افزایش اجزای ذخیره (۳) روش افزایش نرخ تعمیر اجزاء که آن را روش افزایش می‌نامیم. در روش کاهش فرض بر این است که طراحی سیستم را می‌توان با کاهش نرخ شکست مجموعه‌ای از اجزای آن بهبود بخشید [۱]. در روش افزایش اجزای ذخیره، قابلیت دسترسی سیستم را با در نظر گرفتن اجزای ذخیره hot،

^۱roohangiz.ebadi@in.iut.ac.ir

^۲hamadani@cc.iut.ac.ir

warm و cold برای برخی از اجزای آن افزایش می‌دهند. [۲-۱۱] برای یک سیستم تعمیرپذیر، طراحی سیستم را می‌توان با روش‌های کاهش و یا افزایش اجزای ذخیره و همچنین با اضافه نمودن منابع تعمیر اجزای آن بهبود بخشید. [۱۲] Hu و همکاران این روش را روش افزایش نامیدند [۱۳]. در روش افزایش قابلیت دسترسی سیستم را با افزایش نرخ تعمیر برخی از اجزای آن، افزایش می‌دهیم. در تمامی مطالعاتی که در زمینه روش کاهش نرخ‌های شکست و افزایش نرخ تعمیر اجزای سیستم‌های سری-موازی تعمیرپذیر صورت گرفته است، نرخ شکست و نرخ تعمیر اجزای زیرسیستم‌ها ثابت در نظر گرفته شده‌اند. اما در عمل اجزای یک سیستم لزوماً دارای نرخ شکست ثابت نیستند. در این مقاله روش کاهش و افزایش را برای سیستم‌های سری-موازی تعمیرپذیر در شرایطی مورد بررسی قرار می‌دهیم که نرخ شکست اجزای زیرسیستم‌ها ثابت نباشد.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

یک سیستم سری-موازی با n زیرسیستم در نظر می‌گیریم، به طوری که زیرسیستم i شامل m_i عضو باشد. حال فرض می‌کنیم همه اجزای زیرسیستم i مستقل و یکسان باشند. همچنین فرض می‌کنیم زمان تعمیر اجزای زیرسیستم‌ها نمایی با نرخ تعمیر μ_i و طول عمر اجزاء دارای توزیع ویبال دوپارامتری با پارامترهای η و β باشد. در این صورت قابلیت دسترسی سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A_s = \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_i}) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{m_i} \right] \quad (1)$$

در ادامه بهبود قابلیت دسترسی سیستم سری-موازی معرفی شده را به دو روش کاهش و افزایش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۰۰۲ روش کاهش

در این روش فرض می‌کنیم که سیستم را می‌توان با کاهش نرخ‌های شکست یک مجموعه r عضوی مانند A از اجزای سیستم با فاکتور ρ که $0 < \rho < 1$ ، بهبود بخشید. حال با توجه به این که طول عمر اجزای سیستم از توزیع ویبال پیروی می‌کند، دو حالت در نظر می‌گیریم.

در حالت اول فرض می‌کنیم نرخ شکست r_i جزء از زیرسیستم i را از طریق کاهش پارامتر η با فاکتور ρ کاهش دهیم. در نتیجه قابلیت دسترسی سیستمی که با روش کاهش و از طریق کاهش ضریب η بهبود یافته است برابر خواهد بود با:

$$A_s = \prod_{i=1}^n A_{i,\rho} = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\rho \eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_i}) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{r_i} \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_i}) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{m_i - r_i} \right] \quad (2)$$

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که ضریب β را با فاکتور ρ کاهش دهیم. در این حالت قابلیت دسترسی سیستمی که با روش کاهش و از طریق کاهش ضریب η بهبود یافته است برابر خواهد بود با:

$$A_s = \prod_{i=1}^n A_{i,\rho} = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\rho \beta_i}) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{r_i} \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_i}) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{m_i - r_i} \right] \quad (3)$$

۲۰۰۲ روش افزایش

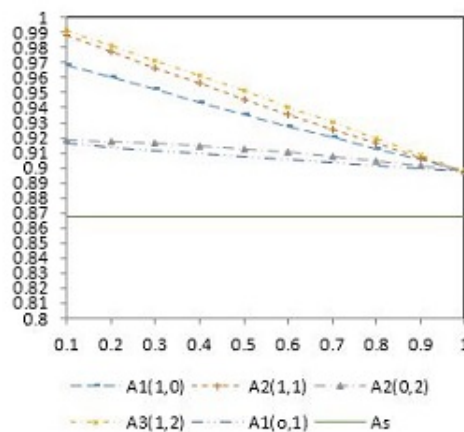
فرض می‌کنیم مجموعه اجزایی از سیستم باشد که نرخ تعمیر آنها با فاکتور σ که $\sigma > 1$ ، افزایش یافته است. به طوری که r_i جزء از زیرسیستم i متعلق به مجموعه S باشد. در این صورت قابلیت دسترسی سیستم بهبود یافته بر اساس روش افزایش از رابطه

زیر به دست می‌آید:

$$A_s = \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma} = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{\sigma\mu_i}}{\eta_i\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right) + \frac{1}{\sigma\mu_i}} \right)^{s_i} \left(\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\eta_i\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right) + \frac{1}{\mu_i}} \right)^{m_i - s_i} \right] \quad (4)$$

در مثال زیر نتیجه روابط بدست آمده در بخش‌های قبل ارائه می‌شود.

مثال ۱. یک سیستم سری-موازی با $n = 2$ زیرسیستم و $M = 3$ جزء در نظر می‌گیریم به طوری که $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$. مقادیر پارامتر η برای زیرسیستم‌ها به ترتیب برابر ۱۰ و ۶ و پارامتر β برابر ۲ و ۲ و پارامتر μ به ترتیب برابر ۱ و ۱.۲ می‌باشد. هدف این است که به جای افزایش تعداد اجزاء، سیستم را با بهبود کارایی برخی از اجزای آن بهبود بخشیم. شکل ۱ و ۲ به ترتیب قابلیت دسترسی سیستم بهبود یافته بر اساس روش کاهش پارامتر η و روش افزایش را نشان می‌دهد. همان طور که در این دو شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش مقدار ρ برای هر مجموعه A، مقدار $A_{r,\rho}$ کاهش یافته و برای هر مجموعه S، با افزایش σ مقدار $A_{s,\sigma}$ افزایش پیدا می‌کند. همچنین بهبود یک جزء از زیرسیستم ۱ که تعداد اجزای کمتری نسبت به زیرسیستم ۲ دارد، به هر دو روش کاهش و افزایش، سیستم اصلاح شده با قابلیت دسترسی بالاتری را نتیجه می‌دهد. در حالت کاهش پارامتر β نیز نتایج مشابه کاهش η می‌باشد. با قرار دادن مقدار β_1 و β_2 برابر ۱، نتایج با حالتی که نرخ‌های شکست اجزای زیرسیستم‌ها ثابت باشند یکسان خواهد بود.



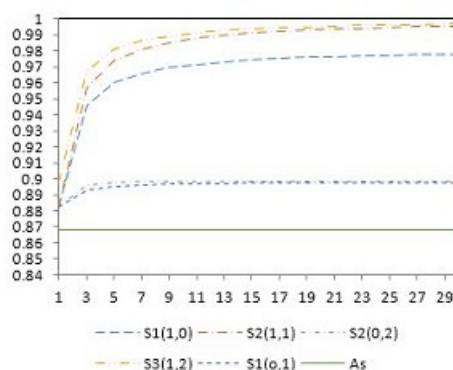
شکل ۱: قابلیت دسترسی سیستم تحت کاهش پارامتر η

نتیجه‌گیری:

همان طور که ملاحظه کردیم، با افزایش مقدار ρ برای هر مجموعه A، مقدار $A_{r,\rho}$ کاهش یافته و برای هر مجموعه S، با افزایش σ مقدار $A_{s,\sigma}$ افزایش پیدا می‌کند. همچنین در هر دو روش کاهش و افزایش، بهبود اجزایی از زیرسیستم‌های مختلف نسبت به حالتی که همه اجزای بهبود یافته فقط از یک زیرسیستم انتخاب شوند سیستم بهتری را بدست می‌دهد. علاوه بر این بهبود همه اجزای سیستم در هر دو روش، بهترین سیستم را نتیجه می‌دهد.

مراجع

- [1] Sarhan, A. M. (2009), *Reliability equivalence factors of a general series-parallel system*, Reliability of Engineering and System Safety, vol. 94, no. 2, pp. 229-236.



شکل ۲: قابلیت دسترسی سیستم تحت روش افزایش

- [2] Rade, L. (1993), *Reliability equivalence*, Microelectronics Reliab ,33:323-5.
- [3] Rade, L. (1993), *Reliability survival equivalence*, Microelectronics Reliab ,33: 881-94.
- [4] Sarhan, A. M. (2000), *Reliability equivalence of independent and nonidentical components series systems*, . Reliab Eng Syst Saf ,67:293-300.
- [5] Sarhan, A.M. (2002), *Reliability equivalence with a basic series/parallel system*, Appl Math Comput ,132:115-33.
- [6] Sarhan, A.M. (2004), *Reliability equivalence factors of a bridge network system*, Int J Reliab Appl, 2:81-103.
- [7] Sarhan, A.M. (2005), *Reliability equivalence factors of a parallel system*, Reliab Eng Syst Saf ,87:405-11.
- [8] Sarhan, A.M. and Al-Ruzaiza, A.S. and Alwasel, I.A. and ElGohary A. (2004), *Reliability equivalence of a series parallel system*, Appl Math Comput, 154:257-77.
- [9] Xia, Y. and Zhang, G. (2007), *Reliability equivalence factors in gamma distribution*, Appl Math Comput, 187:567-73.
- [10] Xie, M. and Shen, K. (1990), *On the increase of the expected system yield due to component improvement*, Reliab Eng Syst Saf, 28:111-20.
- [11] Tian, Z. G. and Levitin, G. and Zuo, M. J. (2009), *A joint reliability-redundancy optimization approach for multistate series-parallel systems*, Reliability Engineering and System Safety, vol. 94, no. 10, pp. 1568-1576.
- [12] Hu, L. and Yue, D. and Zhao, D. (2012), *Availability Equivalence analysis of a repairable series- parallel system*, Mathematical Problem in Engineering, vol. 2012.



کاربرد ترتیب‌های تصادفی وابسته در قابلیت اعتماد

محتشمی، و^۱ امینی، م^۲ احمدی، ج^۳

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله کاربردی از ترتیب تصادفی زبرجمعی و ترتیب تصادفی چندگانه بالایی در قابلیت اعتماد بیان شده است.

کلمات کلیدی: ترتیب تصادفی زبرجمعی، ترتیب تصادفی چندگانه بالایی، مدل شوک

۱ مقدمه

بسیاری از مواردی که ما در زندگی روزمره با آن‌ها سر و کار داریم متغیرهای تصادفی هستند، که نمی‌توانیم آن‌ها را بصورت معمول با هم مقایسه کنیم. یکی از روش‌های مقایسه استفاده از ترتیب‌های تصادفی است. قابلیت اعتماد، فرایندهای تصادفی، بیمه، اقتصاد از جمله زمینه‌هایی هستند که کاربردهای ترتیب تصادفی برای آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. پژوهش‌گران با مقایسه توزیع‌های دو متغیره که توزیع حاشیه‌ای آن‌ها در دسترس است مفاهیم مختلفی از ترتیب‌های تصادفی مثبت را معرفی کردند. این ترتیب‌ها برای مقایسه شدت وابستگی مثبت بین دو توزیع دو متغیره تعریف شده است مولر (۱۹۹۷)، بارلو (۱۹۹۷)، مولر و اسکارسینی (۲۰۰۰)، دنویت و همکاران (۲۰۰۶) در این زمینه مطالعاتی انجام داده‌اند. در بخش دوم کاربرد ترتیب تصادفی زبرجمعی در قابلیت اعتماد بیان شده است. برخی از کاربرد ترتیب تصادفی چندگانه بالایی در قابلیت اعتماد در بخش سوم آمده است. در سر تا سر این مقاله $(X_1, \dots, X_n)$ یک بردار تصادفی n -متغیره متعلق به رده فرشه است.

^۱ vmb1369@yahoo.com

^۲ m-amini@um.ac.ir

^۳ ahmadi-j@um.ac.ir

۲ ترتیب تصادفی زبرجمعی

ترتیب تصادفی زبرجمعی را بر پایه توابع زبرجمعی تعریف می کنند. یک ترتیب تصادفی وابستگی چندمتغیره مثبت است.

تعریف ۱. برای $\underline{x} \in \mathbb{R}$ ، $1 \leq i \leq j \leq n$ تابع $g(\cdot)$ را زبرجمعی گویند هرگاه:

$$\frac{\partial^2 g(\underline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0.$$

تعریف ۲. بردار تصادفی $\underline{X}$ را از $\underline{Y}$ در ترتیب تصادفی زبرجمعی کوچکتر گویند و می نویسند $\underline{X} \leq_{sm} \underline{Y}$ هرگاه به ازای تمام توابع زبرجمعی $g(\cdot)$ ، $Eg(\underline{X}) \leq Eg(\underline{Y})$ ، به شرط اینکه امیدریاضی ها موجود باشند.

قضیه زیر مدل شوک را بیان می کند.

قضیه ۱ (مدل شوک). فرض کنید $\{X_j, j \geq 1\}$ دنباله ای از بردارهای تصادفی نامنفی m -بعدی باشد و $\underline{M} = (M_1, \dots, M_m)$ ، $\underline{N} = (N_1, \dots, N_m)$ بردارهای تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی و $\underline{M}$ ، $\underline{N}$ از X_j ها مستقل باشند. اگر $\underline{M} \leq_{sm} \underline{N}$ آنگاه:

$$\left(\sum_{j=1}^{M_1} X_{1j}, \sum_{j=1}^{M_2} X_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{M_m} X_{mj} \right) \leq_{sm} \left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} X_{mj} \right) \quad (1)$$

برای برهان قضیه فوق به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) فصل ۹ مراجعه شود.

مثال ۱. دو سیستم قابلیت اعتماد A و B را در نظر بگیرید بطوریکه سیستم A دارای m عضو $A_i, i = 1, \dots, m$ و سیستم B دارای m عضو $B_i, i = 1, \dots, m$ است تعریف کنید:

M_i تعداد شک های وارد به عضو i -ام $A_i, i = 1, \dots, m$

N_i تعداد شک های وارد به عضو i -ام $B_i, i = 1, \dots, m$

X_{ij} میزان خرابی که j -امین شک به مولفه i -ام وارد می کند

فرض کنید X_{ij} از M_i و N_i مستقل است و $(M_1, \dots, M_m) \leq_{sm} (N_1, \dots, N_m)$ آنگاه بنا به قضیه ۱ داریم:

$$\left(\sum_{j=1}^{M_1} X_{1j}, \sum_{j=1}^{M_2} X_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{M_m} X_{mj} \right) \leq_{sm} \left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} X_{mj} \right) \quad (2)$$

یعنی بردار زمان خرابی سیستم A تحت ترتیب تصادفی زبرجمعی از بردار زمان خرابی سیستم B کوچکتر است به عبارتی سیستم A از سیستم B زودتر خراب می شود.

۳ ترتیب تصادفی چندگانه بالایی

ترتیب تصادفی چندگانه بالایی براساس تابع بقا چندمتغیره تعریف می شود و تعمیمی از ترتیب تصادفی ساده می باشد.

تعریف ۳. $\underline{X}$ را از $\underline{Y}$ در ترتیب تصادفی چندگانه بالایی کوچکتر گویند $(\underline{X} \leq_{uo} \underline{Y})$ هرگاه:

$$\bar{F}_{\underline{X}}(\underline{x}) \leq \bar{F}_{\underline{Y}}(\underline{x}); \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}$$

یک سیستم قابلیت اعتماد با n عضو را در نظر بگیرید بطوریکه ممکن است هر n عضو این سیستم بطور همزمان خراب شوند. فرض کنید $T_i, i = 1, \dots, n$ طول عمر طبیعی i -امین عضو سیستم باشد و Z طول عمر سیستم زمانی که همه اعضا بطور همزمان خراب شوند بنابراین طول عمر i -امین عضو سیستم را می توان به صورت $L_i = \min\{T_i, Z\}$ بیان نمود.

فرض کنید $r_{T_i}(t), i = 1, \dots, n$ نرخ خرابی i -امین عضو سیستم در مدت زمان t بوده و $r_Z(t)$ نرخ خرابی همه اعضای سیستم بطور همزمان در مدت زمان t باشد در اینصورت تابع بقا $Z, T_i, i = 1, \dots, n$ بصورت زیر است

$$\bar{F}_{T_i}(t) = 1 - F_{T_i}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r_{T_i}(u)du\right\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\bar{F}_Z(t) = 1 - F_Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t r_Z(u)du\right\}.$$

بنابراین با توجه به استقلال Z و T_i داریم

$$\bar{F}_{L_i}(t) = \bar{F}_{T_i}(t)\bar{F}_Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t (r_{T_i}(u) + r_Z(u))du\right\} \quad i = 1, \dots, n$$

و

$$r_{L_i}(t) = r_{T_i}(t) + r_Z(t) \quad i = 1, \dots, n$$

اگر $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$ آنگاه تابع بقا توام سیستم، عبارتست از

$$P[L_1 > t_1, \dots, L_n > t_n] = \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{i=j}^k r_{L_i}(u) - r_Z(u)\right)du\right) \right] \\ \left[\exp\left(-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_{L_k}(u)du\right) \right] \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(\int_0^{t_j} r_Z(u)du\right) \right]$$

قضیه زیر بیان می کند که در این مدل با افزایش $r_Z(t)$ و کاهش $r_{T_i}(t)$ بطوریکه $r_{T_i}(t) + r_Z(t)$ مقداری ثابت باشد می توان وابستگی بین اعضای سیستم را افزایش داد.

قضیه ۲. دو بردار تصادفی طول عمر $(L_1, \dots, L_n)$ ، $(L'_1, \dots, L'_n)$ و دو متغیر تصادفی طول عمر Y, Z را در نظر بگیرید بطوریکه $L'_i = \min\{S_i, Y\}, L_i = \min\{T_i, Z\}$ ، $i = 1, \dots, n$ و برای $u \geq 0$ ، $r_Z(u) \leq r_Y(u)$ آنگاه برای $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ داریم

$$P[L_1 > t_1, \dots, L_n > t_n] \leq P[L'_1 > t_1, \dots, L'_n > t_n]$$

برهان. با توجه به اینکه $L'_i \stackrel{d}{=} L_i, i = 1, \dots, n$ بنابراین برای $t \geq 0$ داریم

$$r_{L_i}(t) = r_{T_i}(t) + r_Z(t) = r_{L'_i}(t) = r_{S_i}(t) + r_Y(t)$$

فرض کنید $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ آنگاه:

$$P[L_1 > t_1, \dots, L_n > t_n] = \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{i=j}^k r_{L_i}(u) - r_Z(u)\right)du\right) \right] \\ \left[\exp\left(-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_{L_k}(u)du\right) \right] \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(\int_0^{t_j} r_Z(u)du\right) \right] \\ \leq \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{i=j}^k r_{L_i}(u) - r_Y(u)\right)du\right) \right] \\ \left[\exp\left(-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_{L_k}(u)du\right) \right] \left[\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(\int_0^{t_j} r_Y(u)du\right) \right] \\ = P[L'_1 > t_1, \dots, L'_n > t_n]$$

□

مثال ۲. دو سیستم A و B با n مولفه وابسته که طول عمر آن‌ها را به ترتیب با $(L_1, \dots, L_n)$ و $(L'_1, \dots, L'_n)$ باشد، را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط قضیه ۲ برای این دو بردار برقرار است، بعلاوه Z متغیر تصادفی پارتو با تابع نرخ خطر $r_Z(u) = \frac{\alpha}{x}$ ، Y یک متغیر تصادفی وایبل با تابع نرخ خطر $r_Y(u) = \alpha \lambda x^{\alpha-1}$ باشد آنگاه $r_Z(u) \leq r_Y(u)$ بنابراین بنا به قضیه ۲ می‌توان نتیجه گرفت

$$P[L_1 > t_1, \dots, L_n > t_n] \leq P[M_1 > t_1, \dots, M_n > t_n]$$

یعنی طول عمر سیستم A از B کمتر است.

مراجع

- [1] Denuit, M., Frostig, E., Levikson, B. (2006), *Shifts in interest rate and common shock model for coupled lives*, Belgian actuarial bulletin
- [2] Shaked, M., shantikumar, G. (2007), *Stochastic orders*, Springer
- [3] Bauerle, N., (1997), *Inequalities for stochastic models via supermodular ordering*, Communications in Statistics Stochastic Models 13, 181-201.
- [4] Muller, A., (1997), *Stoploss order for portfolios of dependent risks*, Insurance Mathematics and Economics 21, 219-223.
- [5] Muller, A., Scarsini, M. (2000), *Some remarks on the supermodular order*, Journal of Multivariate Analysis 73, 107-119.



کاربرد مدل شکنندگی وایبل- گاما در داده‌های پزشکی

محمدی، م^۱ بزرگ، م^۲ امینی، م^۳

^۱ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زابل
^{۲،۳} گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

مدل شکنندگی وایبل- گاما که از آمیخته (ترکیب) یک توزیع وایبل با اثرات تصادفی گاما یا توزیع پیشین ساخته می‌شود، توزیع لگ لجستیک را نتیجه می‌دهد. این مدل شکنندگی اغلب در تحلیل بقا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله گشتاورها و توزیع حاشیه‌ای این مدل را محاسبه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که در همه‌ی حالت‌ها تعداد محدودی از گشتاورها وجود دارند. علاوه بر این، تحلیل داده‌های بقا با استفاده از این مدل شکنندگی از نتایج دیگر این مقاله می‌باشد.

کلمات کلیدی: مدل شکنندگی، وایبل، گاما، لگ-لجستیک تعمیم‌یافته، لجستیک تعمیم‌یافته

۱ مقدمه

توزیع کوشی اغلب به عنوان مثالی از یک توزیع بدون گشتاورهای متناهی بیان می‌شود، که خصوصاً میانگین و واریانس این توزیع وجود ندارد. در حالی که در توزیع لگ-لجستیک تعداد محدودی از گشتاورها متناهی می‌باشند. از طرفی مدل شکنندگی وایبل- گاما که از ترکیب یک توزیع وایبل با اثرات تصادفی گاما یا توزیع پیشین ساخته می‌شود، توزیع لگ لجستیک را نتیجه می‌دهد. سپس نشان خواهیم داد که تعداد محدودی از گشتاورهای این توزیع وجود دارند. در ادامه خانواده لگ-لجستیک تعمیم‌یافته را از مدل وایبل- گاما تولید و گشتاورهایش را محاسبه می‌نماییم. در پایان، با استفاده از نتایج به دست آمده، داده‌های بقای بیماران بستری شده در بخش مراقبت‌های ویژه (ICU)^۱ مطالعه و تحلیل می‌شود.

^۱ mo.mohammadi@uoz.ac.ir

^۲ masoomehbozorg@gmail.com

^۳ m-amini@um.ac.ir

^۱ Intensive Care Unit

۲ مدل شکنندگی وایبل - گامای حاشیه‌ای

فرض کنید متغیر X از یک توزیع وایبل به صورت زیر پیروی می‌کند،

$$f(x|z) = \varphi z \rho x^{\rho-1} e^{-\varphi z x^\rho}, \quad (1)$$

که در آن اثر تصادفی Z (شکنندگی)، دارای توزیع گاما با چگالی زیر است:

$$f_Z(z) = \frac{z^{\alpha-1} e^{-z/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (2)$$

در رابطه (۱)، ρ پارامتر شکل توزیع وایبل (که $\rho = 1$ متناظر با توزیع نمایی است) و φ پارامتر مکان می‌باشد. معمولاً هنگامی که متغیرهای کمکی حضور دارند، قرار می‌دهیم،

$$\varphi = e^k,$$

که k یک پیش‌گوکننده خطی است و بر حسب جملاتی از متغیرهای کمکی بیان می‌شود. با یک انتگرال‌گیری ساده، توزیع حاشیه‌ای X عبارت‌است از:

$$f(x) = \frac{\varphi \rho x^{\rho-1} \alpha \beta}{(1 + \varphi \beta x^\rho)^{\alpha+1}}. \quad (3)$$

ملاحظه می‌کنیم که توزیع حاشیه‌ای X یک توزیع لگ-لجستیک تعمیم‌یافته است. اکنون حالت $\alpha\beta = 1$ را در نظر می‌گیریم. این حالت معمولاً در زمینه شکنندگی گاما در نظر گرفته می‌شود [۴]. در این حالت، رابطه (۲) را اینگونه بازنویسی می‌کنیم:

$$f_Z(z) = \frac{1}{(\frac{1}{\alpha})^\alpha \Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\alpha z}. \quad (4)$$

بنابراین،

$$f(x) = \frac{\varphi \rho x^{\rho-1} \alpha^{\alpha+1}}{(\alpha + \varphi x^\rho)^{\alpha+1}}. \quad (5)$$

$$E(X^k) = \frac{1}{(\beta\varphi)^{k/\rho}} \cdot \frac{k}{\rho} \cdot \frac{\Gamma(\alpha - k/\rho) \Gamma(k/\rho)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (6)$$

که در آن $B(\cdot, \cdot)$ و $\Gamma(\cdot)$ به ترتیب توابع بتا و گاما می‌باشند. در حالت $\alpha\beta = 1$ رابطه (۶) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$E(X^k) = \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{k/\rho} \frac{k}{\rho} B(\alpha - k/\rho, k/\rho). \quad (7)$$

با محاسبات ساده، تابع توزیع تجمعی لگ-لجستیک تعمیم‌یافته عبارت‌است از:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1 + \varphi \beta x^\rho)^\alpha}. \quad (8)$$

۳ گسترش تکیه‌گاه

یک روش ساده برای دستیابی به توزیعی روی سراسر خط حقیقی، قراردادن $x = e^y$ در رابطه (۳) می‌باشد، که با بکارگیری قضیه تبدیل داریم،

$$f(y) = \frac{\rho \varphi \alpha \beta e^{\rho y}}{(1 + \varphi \beta e^{\rho y})^{\alpha+1}}. \quad (9)$$

ملاحظه می‌کنیم تابع توزیع تجمعی متناظر آن به سادگی محاسبه می‌گردد:

$$F(y) = 1 - \frac{1}{(1 + \varphi \beta e^{\rho y})^\alpha}. \quad (10)$$

و تابع مولد گشتاور برای شکل استاندارد این توزیع به صورت زیر است:

$$E[e^{tY}] = \left(\frac{\delta}{\varphi}\right)^{t/\rho} B\left(1 - \frac{t}{\rho}, \frac{t}{\rho} + 1\right).$$

در نتیجه مشاهده می‌کنیم که تابع مولد گشتاور، به ازای تمام مقادیر t وجود دارد. به عنوان یک نتیجه می‌توان گفت در حالی که تعداد محدودی از گشتاورهای توزیع لگ-لجستیک (تعمیم یافته) وجود دارند، در تبدیل طبیعی آن روی خط حقیقی یعنی توزیع لجستیک (تعمیم یافته)، تمام گشتاورها وجود دارند.

۴ کاربرد در پزشکی

توانایی محاسبه خطر مرگ در محیط‌های بحرانی مانند بخش‌های مراقبت ویژه جهت ارزیابی درمان‌های جدید، کنترل مصرف منابع و بهبود کنترل کیفی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مطالعه مقطعی، تعداد ۱۵۰ نفر از بیماران بستری در بخش‌های ICU بیمارستان‌های هاشمی نژاد و امام رضا (ع) مشهد در سال ۱۳۹۲ به صورت تصادفی انتخاب شدند و مورد مطالعه قرار گرفتند.

فرض کنید مدل‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته (۵) و لجستیک تعمیم یافته (۹) با $\alpha\beta = 1$ را برازش دهیم. در این دو مدل قرار می‌دهیم،

$$\varphi = \exp[\beta_1 I(T_i = 1) + \beta_2 I(T_i = 2) + \beta_3 I(T_i = 3)], \quad (11)$$

که در آن i ، اندیس مربوط به هر بیمار و T_i نشان‌دهنده مکان پذیرش بیمار است که به ترتیب مقادیر ۱، ۲ و ۳ بیانگر اورژانس، اتاق عمل و بخش هستند. در مدل کوشی تعمیم یافته، γ را برابر تابع پیشین φ در نظر می‌گیریم. در جدول ۱، برآورد پارامترها (خطاهای استاندارد) برای مدل‌های معرفی شده گزارش شده است. اکنون به بیان چند نکته می‌پردازیم.

(۱) پارامترهای لگ-لجستیک و لجستیک تعمیم یافته مشابه می‌باشند. در واقع بین این دو خانواده به واسطه تبدیل لگاریتمی، رابطه‌ی یک به یکی برقرار است.

(۲) چون $\rho\alpha = 2.945 < 3$ دو گشتاور اول متناهی در مدل لگ-لجستیک تعمیم یافته وجود دارد. در حالی که در لجستیک تعمیم یافته همه گشتاورها متناهی‌اند.

سؤال اصلی مربوط به اختلاف بقای بیماران است که از مکان‌های مختلف پذیرش شده‌اند. فرضیه $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ را می‌توان از طریق مقایسه میانگین‌های زمان‌های بقا به کمک آماره $F_{2,150}$ آزمون کرد. برای توزیع‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته و لجستیک تعمیم یافته، $F = 1.86$ ($p = 0.158$) را به دست آورده‌ایم. این اعداد نشان می‌دهند که با توجه به مدل‌های برازش داده‌شده که متناظر با یک مدل شکنندگی و ایبل-گاما می‌باشند، اختلاف معنی‌داری در سطح خطای پنج درصد بین زمان‌های بقای بیماران پذیرش شده از مکان‌های مختلف وجود ندارد. در جدول ۱ مقادیر AIC جهت مقایسه دو مدل گزارش شده است. همانطور که نتایج نشان می‌دهد در مدل لجستیک تعمیم یافته مقادیر این آماره کوچکترند که دلیل بر برازش بهتر این مدل نسبت به مدل لگ-لجستیک تعمیم یافته است.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله با شروع از مدل شکنندگی و ایبل-گاما، به یک توزیع لگ-لجستیک تعمیم یافته رسیدیم که به طور خاص، این توزیع نقش حاشیه‌ای را در مدل و ایبل-گاما دارد. بنابراین توجه به این موضوع که اعضای آن تنها دارای تعداد محدودی از

جدول ۱: برآورد پارامتر برای مدل‌های برازش داده شده به داده‌های بقای بیماران ICU

اثر	پارامتر	لگ-لجستیک تعمیم یافته	لجستیک تعمیم یافته
اورژانس	β_1	$-4/9622^*(0/5007)$	$-4/9622^*(0/5007)$
اتاقی عمل	β_2	$-4/5104^*(0/4847)$	$-4/5104^*(0/4847)$
بخش	β_3	$-5/3465^*(0/6097)$	$-5/3465^*(0/6097)$
پارامتر وایبل	ρ	$2/3767^*(0/2651)$	$2/3767^*(0/2651)$
پارامتر گاما	α	$1/2393^*(0/3713)$	$1/2393^*(0/3713)$
تعداد گشتاورهای متناهی	k	۲	همه
AIC		۹۳۳/۹	۳۲۹/۵

گشتاورهای متناهی است، اهمیت ویژه‌ای دارد. تبدیل لگ-لجستیک تعمیم یافته با تکیه‌گاه کل اعداد حقیقی، تعمیمی از توزیع لجستیک را نتیجه می‌دهد که تمام گشتاورهایش متناهی‌اند.

مراجع

- [۱] م. بزرگ، ویژگی‌هایی از مدل‌های شکنندگی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۱.
- [۲] ز. مشمول، بررسی ارزش دو شاخص *APACHE IV* و *SAPS II* در تعیین شدت بیماری و پیش‌بینی مرگ و میر بیماران بستری در ICU، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه علوم بهزیستی و توانبخشی، ۱۳۹۲.
- [3] Bennett, S. (1983). *Log-logistic regression models for survival data.*, Applied Statistics 32, 165–171.
- [4] Duchateau, L. and Janssen, P. (2007). *The Frailty Model*. Springer, NewYork.
- [5] Molenberghs, G., Verbeke, G. (2011). *On the Weibull-Gamma frailty model, its infinite moments, and its connection to generalized log-logistic, Logistic, Cauchy, and extreme-value distributions* J. Statist. Plann. Inference, 141, 861–868.



مقایسه‌ی تصادفی G سیستم‌های k از n با مولفه‌ی آماده بکار سرد

میمندی، ا. م.^۱ احمدی، ج.^۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

یکی از راه‌های افزایش قابلیت اعتماد و کارایی سیستم‌ها، اضافه شدن مولفه آماده بکار به سیستم می‌باشد. در این مقاله G سیستم‌های k از n با مولفه آماده بکار سرد را در نظر گرفته و به مقایسه تصادفی با یک مولفه آماده بکار متفاوت می‌پردازیم. این مقایسه بر اساس ترتیب‌های تصادفی معمولی، نسبت درستی، نرخ خطر و نرخ خطر معکوس انجام شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های منسجم، سیستم‌های آماده بکار، ترتیب‌های تصادفی

۱ مقدمه

سیستم‌های آماده بکار k از n بخاطر کاربرد آنها در مهندسی مورد توجه علاقه‌مندان به مباحث قابلیت اعتماد قرار گرفته‌اند. یکی از رایج‌ترین شیوه‌های افزایش قابلیت اعتماد و یا کارایی سیستم‌ها، اضافه کردن مولفه آماده بکار می‌باشد. که به سه صورت مولفه آماده بکار داغ، گرم و سرد انجام می‌شود. توجه داشته باشیم در حالت آماده بکار، مولفه‌های آماده بکار سرد، غیرفعال هستند و احتمال خرابی آنها صفر در نظر گرفته می‌شود.

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشان دهنده طول عمر مولفه‌ها باشند با این فرض که X_i ها مستقل از هم و هم توزیع از F باشند و $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر باشند آنگاه طول عمر G سیستم k از n بدون مولفه آماده بکار سرد متناظر با $X_{n-k+1:n}$ می‌باشد. در G سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد وقتی که سیستم خراب می‌شود یعنی زمانی که $(n-k+1)$ امین خرابی رخ می‌دهد، مولفه آماده بکار با طول عمر Z و با تابع توزیع H و مستقل از مولفه‌های فعال سیستم، وارد سیستم می‌شود. بنابراین طول عمر G سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد را می‌توان بصورت زیر نشان داد

$$T = X_{n-k+1:n} + \min\{X_{n-k+2:n} - X_{n-k+1:n}, Z\}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

^۱ amir_meymandi@yahoo.com

^۲ ahmadi-j@um.ac.ir

و با استفاده از روش‌های ارائه شده در اریلماز [۲] می‌توان نشان داد تابع توزیع G سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد

$$F_T(x) = \int_0^t H(t-x) dF_{n-k+1:n}(x), \quad (2)$$

می‌باشد.

در بخش دوم مقایسه طول عمر دو سیستم G از n با استفاده از ترتیب تصادفی معمولی یادآوری می‌شود. در بخش‌های سوم، چهارم و پنجم مقایسه طول عمر سیستم‌ها را به ترتیب با ترتیب‌های تصادفی نسبت درستنمایی، نرخ خطر و نرخ خطر معکوس مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای مطالعه ترتیب‌های تصادفی معمولی، نسبت درستنمایی، نرخ خطر و نرخ خطر معکوس به فصل اول شیکید و شانیکومار [۳] مراجعه کنید.

۲ ترتیب تصادفی معمولی

در این بخش نتایجی از ترتیب تصادفی معمولی برای طول عمر دو سیستم G از n با یک مولفه آماده بکار سرد ارائه شده است. فرض کنید یک سیستم G از n با مولفه‌های با طول عمر $X_1, X_2, \dots, X_n$ که مستقل و هم توزیع با تابع توزیع پیوسته مشترک F_X و دو مولفه آماده بکار با طول عمرهای Z_1 و Z_2 که به ترتیب دارای تابع توزیع پیوسته H_1 و H_2 و تابع چگالی h_1 و h_2 می‌باشند، در اختیار داریم. بنابراین طول عمر دو سیستم G از n با مولفه آماده بکار سرد متفاوت بصورت زیر خواهد بود

$$T_i = X_{n-k+1:n} + \min\{X_{n-k+2:n} - X_{n-k+1:n}, Z_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

تحت مدل (۳) اگر $Z_1 \leq_{st} Z_2$ آنگاه اریلماز [۲] موارد زیر را ثابت کرده است:

الف) $T_1 \leq_{st} T_2$

ب) $E(T_1 - t | X_{n-k+1:n} > t) \leq_{st} E(T_2 - t | X_{n-k+1:n} > t)$

ج) $E(T_1 - t | X_{1:n} > t) \leq_{st} E(T_2 - t | X_{1:n} > t)$

در ادامه شرایط برقراری برخی دیگر از ترتیب‌های تصادفی را بررسی می‌کنیم.

۳ ترتیب درستنمایی

در این بخش به بررسی ترتیب درستنمایی برای طول عمر دو سیستم G از n با مولفه آماده بکار سرد می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا به نکاتی درباره ترتیب‌های تصادفی اشاره می‌شود.

تعریف ۱. تابع حقیقی $k(x, y)$ بر فضای تعریف شده $\chi \times \Psi$ را تابع منظم معکوس از مرتبه $2(RR_2)$ در x و y گویند، اگر $k(x, y) > 0$ و برای هر $x \leq x' \in \chi$ و $y \leq y' \in \Psi$ داشته باشیم

$$k(x, y)k(x', y') \leq k(x', y)k(x, y').$$

نامساوی اخیر معادل با این است که نسبت $\frac{k(t, y')}{k(t, y)}$ تابعی نزولی از t باشد.

فرض کنید متغیر تصادفی X به ترتیب دارای تابع چگالی، تابع بقا، تابع توزیع f ، $\bar{F}$ و F باشد. اگر f ، $\bar{F}$ و F لگ-محدب باشند آنگاه می‌توان نشان داد که $f(x-t)$ ، $\bar{F}(x-t)$ و $F(x-t)$ دارای خاصیت RR_2 در (x, t) است.

لم ۱. فرض کنید $q_i(t, x)$ ، $i = 1, 2$ تابعی با مقادیر مثبت بر فضای $\mathbb{R} \times \chi$ باشد که $\chi \subseteq \mathbb{R}$ است و

$$S_i(t) = \int_{\chi} q_i(t, x) f(x) dx,$$

الف) اگر نسبت $\frac{q_2(t, x)}{q_1(t, x)}$ بر حسب t نزولی و بر حسب x صعودی باشد.

ب) اگر تابع $q_1(t, x)$ یا $q_2(t, x)$ دارای خاصیت RR_2 در (x, t) باشد. آنگاه برای $x, y \in \mathbb{R}$ نامساوی زیر را داریم

$$S_1(x \wedge y)S_2(x \vee y) \leq S_2(y)S_1(x),$$

که در آن $x \vee y = \max\{x, y\}$ و $x \wedge y = \min\{x, y\}$ می‌باشند.

برای مطالعه جزئیات اثبات لم ۳.۳ به امینی سرشت و خالدی [۱] مراجعه شود.

لم ۲. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی به ترتیب با تابع توزیع F_X و F_Y و Z متغیر تصادفی با تابع توزیع مطلقاً پیوسته $G(z)$ باشند و $T_i, i = 1, 2$ متغیر تصادفی با تابع بقا $\bar{F}_{T_i}$ که در زیر به آن اشاره شده است. همچنین فرض کنید $x \leq y$ باشد و داریم

$$\bar{F}_{T_i}(x) = 1 - \int_0^x G_i(t-x) dF_{W_{i,n-k+1:n}}(x), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

که در آن $F_{W_{1,r:n}} = F_{X_{r:n}}$ و $F_{W_{2,r:n}} = F_{Y_{r:n}}$ می‌باشند.

الف) اگر $\frac{g_2(t-x)}{g_1(t-x)}$ نسبت به x صعودی، $Z_1 + x \geq_{lr} Z_2 + x$ ، $Z + x \geq_{lr} Z + y$ و اگر $X \leq_{lr} Y$ آنگاه $T_1 \geq_{lr} T_2$.

ب) اگر $\frac{G_2(t-x)}{G_1(t-x)}$ نسبت به x صعودی، $Z_1 + x \geq_{rh} Z_2 + x$ ، $Z + x \geq_{rh} Z + y$ و اگر $X \leq_{rh} Y$ آنگاه $T_1 \geq_{rh} T_2$.

ب) اگر $\frac{\bar{G}_2(t-x)}{\bar{G}_1(t-x)}$ نسبت به x صعودی، $Z_1 + x \geq_{hr} Z_2 + x$ ، $Z + x \geq_{hr} Z + y$ و اگر $X \leq_{hr} Y$ آنگاه $T_1 \geq_{hr} T_2$.

برهان لم ۴.۳ با تغییرات جزئی در قضایای ۴.۳ و ۴.۴ امینی سرشت و خالدی [۱] نتیجه می‌شود.

دو سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد با طول عمر (۳) را در نظر بگیرید، می‌توان نشان داد که تابع چگالی احتمال آنها بصورت

$$f_{T_i}(x) = \int_0^x h_i(t-x) dF_{n-k+1:n}(x), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

داده می‌شود. در ادامه شرایط برقراری ترتیب درست‌نمایی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید دو سیستم k از n با مولفه های آماده بکار سرد متفاوت Z_1 و Z_2 به ترتیب با تابع چگالی احتمال h_1 و h_2 داشته باشیم، اگر h_1 یا h_2 لگ-محدب باشند و $Z_2 \leq_{lr} Z_1$ آنگاه $T_2 \leq_{lr} T_1$.

برهان. برای اثبات از لم ۳.۳ استفاده می‌کنیم. بدون کاسته شدن از کلیات مسئله در لم ۳.۳ تابع $q_i(t, x)$ را با $h_i(t-x)$ جایگزین می‌کنیم. فرض اینکه $Z_2 \leq_{lr} Z_1$ معادل است با $Z_2 + x \leq_{lr} Z_1 + x$ بنابراین عبارت $\frac{h_2(t-x)}{h_1(t-x)}$ نسبت به t نزولی و نسبت به x صعودی است. با فرض اینکه h_1 لگ-محدب باشد آنگاه می‌توان نشان داد که $h_1(t-x)$ دارای خاصیت RR_2 در (x, t) است. با استفاده از این نتایج و با استفاده از لم ۴.۳ اثبات قضیه برقرار است. $\square$

۴ ترتیب نرخ خطر

در این بخش به بررسی ترتیب نرخ خطر برای طول عمر دو سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد می‌پردازیم. دو سیستم k از n با مولفه آماده بکار سرد با طول عمر (۱.۲) را در نظر بگیرید، تابع بقا برای این دو سیستم عبارتست از

$$\bar{F}_{T_i}(x) = 1 - \int_0^x H_i(t-x) dF_{n-k+1:n}(x), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

قضیه ۲. فرض کنید مفروضات قضیه ۵.۳ برقرار باشد بعلاوه Z_1 و Z_2 به ترتیب دارای تابع بقای $\bar{H}_1$ و $\bar{H}_2$ باشند، اگر $\bar{H}_2$ یا $\bar{H}_1$ لگ-محدب باشند و $Z_2 \leq_{hr} Z_1$ آنگاه $T_2 \leq_{hr} T_1$.

برهان. مشابه اثبات قضیه ۵.۳ با استفاده از لم ۳.۳ و با توجه به فرضیات قضیه و بنا بر لم ۴.۳ نتیجه مربوط حاصل می شود. (در مقاله کامل جزئیات اثبات آمده است.) $\square$

۵ ترتیب نرخ خطر معکوس

در این بخش به بررسی ترتیب نرخ خطر معکوس برای طول عمر دو سیستم G از k از n با مولفه آماده بکار سرد می پردازیم. دو سیستم G از k از n با مولفه آماده بکار سرد با طول عمر (1.2) را در نظر بگیرید، تابع توزیع برای این دو سیستم عبارتست از

$$F_{T_i}(x) = \int_0^t H_i(t-x) dF_{n-k+1:n}(x), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

قضیه ۳. فرض کنید مفروضات قضیه ۱.۴ برقرار باشد، اگر H_1 یا H_2 لگ-محدب باشند و $Z_2 \leq_{rh} Z_1$ آنگاه $T_2 \leq_{rh} T_1$. **برهان.** در اینجا نیز مشابه اثبات قضیه ۵.۳، با استفاده از لم ۳.۳ و ادامه روند اثبات در قضیه ۵.۳، نتیجه بدست می آید. (در مقاله کامل جزئیات اثبات آمده است.) $\square$

مراجع

- [1] Amini-Seresht, E. and Khaledi, B. (2015), *Multivariate stochastic comparisons of mixture models*, Metrika, DOI: 10.1007/s00184-015-0538-8.
- [2] Eryilmaz, S. (2012), *On the mean residual life of a k-out-of-n:G system with a single cold standby component*, European J. Oper. Res 222, 273-277.
- [3] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G., (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.