یک راه حل کلی برای یافتن UMVUE در خانواده توزیع‌های یکنواخت

عباس افتخاریان [۱]

چکیده:

در این مقاله یک راه حل کلی برای پیدا کردن برآورد نااریب با کمترین واریانس (UMVUE) برای توابعی از پارامترهای مجهول در توزیع یکنواخت بدست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: توزیع یکنواخت، تکیه گاه وابسته به پارامتر[۲]، آمارهٔ بسنده کامل[۳]، UMVUE.

۱ مقدمه

درآمار ریاضی مفاهیم بسندگی، کامل بودن و نااریبی از مهم‌ترین مباحثی هستند که در برآوردهای نقطه‌ای نقش بسزایی را ایفا می‌کنند. اگر تابع زیان را مربع خطا در نظر گیریم ، در این صورت، با فرض نااریب بودن برآوردگر، مینیمم کردن مخاطره معادل این است که واریانس برآوردگر مینیمم گردد [۱،۳]. اگر برآوردگر نااریب، به طور یکنواخت دارای کمترین واریانس باشد، آنگاه UMVUE است. برای به دست آوردن UMVUE چندین روش وجود دارد. یکی از این روش‌ها، استفاده از آماره بسنده کامل می باشد(لم لهمن — شفه [۱،۳]). در این روش به دنبال تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل هستیم که در صورت وجود، یک برآورد نااریب برای پارامتر مجهول را نتیجه دهد. در اینجا با استفاده از آماره بسنده کامل، یک روش کلی جهت به دست آوردن UMVUE برای توابعی از پارامترهای مجهول در توزیع یکنواخت ارائه می‌کنیم. باید توجه داشت که اگر تابع زیان محدب باشد، UMVUE در صورت وجود، یکتا است.

قضیه: فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت $U\left(a(\theta_1), b\ (\theta_2)\right)$ باشند که در آن $a(\theta_1)$ و $b\ (\theta_2)$ به ترتیب نقاط انتهایی پایینی و بالایی توزیع یکنواخت می‌باشند و فرض کنید $a(\theta_1)$ و $b\ (\theta_2)$ توابعی یکنوا باشند که مشتق مرتبه اول آنها پیوسته باشد. آنگاه، اگر $\alpha(\theta_1, \theta_2)$ تابعی برآورد پذیر از θ_1 و θ_2 بوده و نسبت به θ_1 و θ_2 دارای مشتق مرتبه دوم باشد، UMVUE برای α بصورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
& g(Y_1, Y_n) = \alpha\big(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_1)\big) \\
+ \quad & \frac{1}{(n-1)b'(b^{-1}(Y_n))} \\
\times \quad & (Y_n - Y_1)\left(\frac{\partial}{\partial b^{-1}(Y_n)}\ \alpha\big(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n)\big)\right) \\
- \quad & \frac{1}{(n-1)a'(a^{-1}(Y_1))}(Y_n - Y_1) \\
\times \quad & \left(\frac{\partial}{\partial a^{-1}(Y_1)}\ \alpha\big(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n)\big)\right) \\
- \quad & \frac{1}{n(n-1)a'\big(a^{-1}(Y_1)\big)b'\big(b^{-1}(Y_n)\big)}(Y_n - Y_1)^2 \\
\times \quad & \left(\frac{\partial^2}{\partial b^{-1}(Y_n)\partial a^{-1}(Y_1)}\ \alpha\big(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n)\big)\right)
\end{aligned}
$$

Email address : ab2005eftekharian@gmail.com

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] Parameter dependent support

[۳] Complete sufficient statistic

که در آن

$Y_1 = \min(X_1, ..., X_n)$ و $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

اثبات: با توجه به فرض، آماره $g(Y_1, Y_n)$ وجود دارد به طوری که $E_\theta[\ g(Y_1, Y_n)\ ] = \alpha(\theta_1, \theta_2)$. از طرف دیگر (Y_1, Y_n) یک آماره بسنده کامل برای $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ می‌باشد [۲]. بنابراین برای پیدا کردن UMVUE برای α می‌توان نوشت:

$$\int\int g(y_1, y_n) f(y_1, y_n) dy_1 dy_n = \alpha(\theta_1, \theta_2) \quad (1)$$

که در آن

$$f_{Y_1, Y_n}(y_1, y_n) = \frac{n(n-1)}{[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n} [y_n - y_1]^{n-2} \quad (2)$$
$$a(\theta_1) \le y_1 \le y_n \le b(\theta_2)$$

تابع چگالی توام (Y_1, Y_n) می‌باشد، از بازنویسی رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\int_{a(\theta_1)}^{b(\theta_2)} \int_{a(\theta_1)}^{y_n} g(y_1, y_n)\, n(n-1) \frac{[y_n - y_1]^{n-2}}{[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n} dy_1 dy_n = \alpha(\theta_1, \theta_2)$$

یا

$$\int_{a(\theta_1)}^{b(\theta_2)} \int_{a(\theta_1)}^{y_n} n(n-1)\, g(y_1, y_n)\, [y_n - y_1]^{n-2} dy_1 dy_n = \alpha(\theta_1, \theta_2)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n$$

با مشتق گیری از طرفین تساوی فوق نسبت به θ_2، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2} \left(\int_{a(\theta_1)}^{b(\theta_2)} \int_{a(\theta_1)}^{y_n} n(n-1) g(y_1, y_n) [y_n - y_1]^{n-2} dy_1 dy_n \right) = \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\alpha(\theta_1, \theta_2)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n \right)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & n(n-1) b'(\theta_2) \\ \times\ & \int_{a(\theta_1)}^{b(\theta_2)} g(y_1, b(\theta_2))\ [b(\theta_2) - y_1]^{n-2} dy_1 \\ =\ & \left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\alpha(\theta_1, \theta_2)\right)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n \\ +\ & n b'(\theta_2)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-1}\alpha(\theta_1, \theta_2) \end{aligned}$$

حال با مشتق گیری نسبت به θ_1 تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta_1}\Bigg[n(n-1) b'(\theta_2) \\ \times\ & \int_{a(\theta_1)}^{b(\theta_2)} g(y_1, b(\theta_2))\ [\ b(\theta_2) - y_1]^{n-2} dy_1 \Bigg] \\ =\ & \frac{\partial}{\partial\theta_1}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\alpha(\theta_1, \theta_2)\right)[\ b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n \\ +\ & n b'(\theta_2)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-1}\alpha(\theta_1, \theta_2) \Bigg] \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} -\ & n(n-1) \\ \times\ & \left\{ a'(\theta_1) b'(\theta_2) g\big(a(\theta_1), b(\theta_2)\big) \left[b(\theta_2) - a(\theta_1)\right]^{n-2} \right\} \\ =\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1}\alpha(\theta_1, \theta_2)\right)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^n \\ -\ & n a'(\theta_1)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\alpha(\theta_1, \theta_2)\right) \\ +\ & n b'(\theta_2)[b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\alpha(\theta_1, \theta_2)\right) \\ -\ & n(n-1) a'(\theta_1) b'(\theta_2)\ [b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-2}\alpha(\theta_1, \theta_2) \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین تساوی بر

$$-n(n-1) a'(\theta_1) b'(\theta_2)\ [b(\theta_2) - a(\theta_1)]^{n-2}$$

و ساده کردن، داریم:

$$g\big(a(\theta_1), b(\theta_2)\big) = \alpha(\theta_1, \theta_2) \quad (3)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{[b(\theta_2)-a(\theta_1)]}{(n-1)b'(\theta_2)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\,\alpha(\theta_1,\theta_2)\right)\\
&- \frac{[b(\theta_2)-a(\theta_1)]}{(n-1)a'(\theta_1)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\,\alpha(\theta_1,\theta_2)\right)\\
&- \frac{[b(\theta_2)-a(\theta_1)]^2}{n(n-1)a'(\theta_1)b'(\theta_2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1}\,\alpha(\theta_1,\theta_2)\right)
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
g(Y_1,Y_n) &= \alpha(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n)) \\
&+ \frac{1}{(n-1)b'(b^{-1}(Y_n))}(Y_n-Y_1)\\
&\quad \left(\frac{\partial}{\partial b^{-1}(Y_n)}\alpha(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n))\right)\\
&- \frac{1}{(n-1)a'(a^{-1}(Y_1))}(Y_n-Y_1)\\
&\quad \left(\frac{\partial}{\partial a^{-1}(Y_1)}\alpha(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n))\right)\\
&- \frac{1}{n(n-1)a'(a^{-1}(Y_1))b'(b^{-1}(Y_n))}\\
&(Y_n-Y_1)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial b^{-1}(Y_n)\partial a^{-1}(Y_1)}\,\alpha(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n))\right)
\end{aligned} \tag{۴}
$$

مثال ۱: فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت $U(\theta_1,\theta_2)$، با $\theta_1<\theta_2$ باشند، آنگاه UMVUE برای پارامتر $\alpha(\theta_1,\theta_2)=\theta_1\theta_2$ بر اساس رابطه (۴)، برابر است با:

$$
g(Y_1,Y_n)=Y_1Y_n-\frac{n+1}{n(n-1)}[Y_n-Y_1]^2
$$

مثال ۲: فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$، $0<\theta_1<\theta_2$ باشند. برای بدست آوردن UMVUE پارامتر $\frac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2}$، با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
g(\theta_1,\theta_2) &= \frac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2}\\
&+ \frac{1}{n-1}(\theta_2-\theta_1)\left[\frac{-\frac{1}{\theta_2}\ln\theta_1}{(\ln\theta_2)^2}\right]\\
&- \frac{1}{n-1}(\theta_2-\theta_1)\left[\frac{1}{\theta_1\ln\theta_2}\right]\\
&+ \frac{1}{n(n-1)}(\theta_2-\theta_1)^2\left[\frac{1}{\theta_1\theta_2(\ln\theta_2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

بنابراین UMVUE پارامتر $\frac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2}$ عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
g(Y_1,Y_n) &= \frac{\ln Y_1}{\ln Y_n}\\
&+ \frac{1}{(n-1)}(Y_n-Y_1)\left[\frac{-\frac{1}{Y_n}\ln Y_1}{(\ln Y_n)^2}\right]\\
&- \frac{1}{(n-1)Y_1}(Y_n-Y_1)\left(\frac{1}{\ln Y_n}\right)\\
&+ \frac{1}{n(n-1)Y_1Y_n}(Y_n-Y_1)^2\left(\frac{1}{(\ln Y_n)^2}\right)
\end{aligned}
$$

تقدیر و تشکر: نویسنده مقاله از جناب آقای دکتر ارقامی به خاطر تصحیح و راهنمایی‌های ارزشمندشان کمال تشکر و قدردانی را دارد.

مراجع

[۱] پارسیان، احمد، ۱۳۷۸، مبانی آمار ریاضی، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.

[2] Lehmann, E. L., and Casella, G. ,1998, *Theory of Point Estimation.* 2nd ed. Springer-Verlag, New York.

[3] Mood, A.C., Graybill, F.A. and Boes, 1974, *An Introduction to Theory of Statistics,* McGraw-Hill, New York.