لم بورل کانتلی، اهمیت و کاربردهای آن

مریم شریف دوست[۱] عین ا... پاشا[۲]

چکیده:

در این مقاله، ابتدا لم بورل کانتلی را معرفی می‌کنیم و سپس قضایای مهم و مثال‌هایی که با استفاده از این لم، اثبات می‌شوند مطرح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: لم بورل کانتلی، قانون ۱ − ۰، بورل، همگرایی در احتمال، همگرایی تقریباً مطمئن (a.s.)

۱ مقدمه

قانون ۱ − ۰ کولموگروف می‌گوید که اگر متغیرهای تصادفی مستقل با سیگما جبر T به صورت:

$$T = \bigcap_n F_n = \lim_{n\to\infty} \sigma\,(X_n, X_{n+۱}, ...)$$

وجود داشته باشند، آن‌گاه برای هر $A \in T$ داریم: $P(A) = ۰$ یا ۱ [۱]. از آنجایی که پیشامدهای زیر، همگی در T قرار دارند، احتمال آنها صفر یا ۱ است، اما قانون ۱ − ۰ کولموگروف، در مورد محاسبه‌ی احتمال این پیشامدها بحثی نمی‌کند.

$$A_۱ = \{\text{همگراست } \sum_n X_n\}$$

$$A_۲ = \{\text{موجود است } \lim_{n\to\infty} X_n\}$$

$$A_۳ = \left\{ \frac{\sum_n X_n}{n} \to ۰ \right\}$$

لم بورل کانتلی این امکان را می‌دهد که احتمال پیشامدها را به راحتی محاسبه کنیم.

این لم هر چند محتوا و اثباتی ساده دارد، اما هنوز پایه و اساس اثبات همگرایی تقریبا مطمئن است. این لم نیاز به شرط استقلال ندارد. اما در قانون ۱ − ۰ بورل، در بررسی همگرایی پیشامدها، فرض استقلال ضروری است.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲ تاریخچه‌ای از زندگی بورل و کانتلی بیان می‌گردد. سپس در بخش ۳ لم بورل کانتلی و قانون ۱ − ۰ بورل بهمراه اثبات آنها و تعدادی از قضایا که به نحوی معادل این لم می‌باشند را مطرح می‌کنیم. در بخش ۴، با قضایایی که با استفاده از این لم اثبات می‌شوند، آشنا می‌شویم و در انتها مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

۲ تاریخچه

امیل بورل[۳] در هفتم ژانویه ۱۸۷۱ در اویرون[۴] فرانسه به دنیا آمد و تحصیلات خود را در سن ۲۲ سالگی در دانشسرای عالی پاریس به پایان رساند و در همان سال به

[۱] دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر
[۲] دانشگاه تربیت معلم تهران
[۳] Emile Borel
[۴] Aveyron

ریاست گروه ریاضی دانشگاه لیل[۵] منصوب شد و در سن ۲۵ سالگی در همان دانش‌سرا استخدام گردید. در سال ۱۹۰۹ به عنوان مدیر نظریه‌ی تابعی که خودش آن را خلق کرده بود، در شهر سوربن منصوب شد و به درجه‌ی استادی رسید. در سال ۱۹۱۰ به مدت ۱۰ سال به عنوان رئیس دانشگاه اکل انتخاب شد و در سال ۱۹۱۸ جایزه ی کردیس[۶] را به خاطر فعالیت‌هایش در جنگ جهانی اول کسب کرد و در سال ۱۹۲۱ تا ۱۹۳۴ به عنوان رئیس انجمن علوم برگزیده شد.

اولین نظریه‌ی جالب بورل، اندازه‌ی مجموعه‌ی نقاط بود. این کار بهمراه دو ریاضیدان فرانسوی دیگر، رنه بایر[۷] و هنری لبگ[۸]، بعنوان آغازکنندگان نظریه‌ی جدید توابع یک متغیره‌ی حقیقی شناخته شد. هر چند بورل اولین کسی نبود که بحث مجموع سری‌های واگرا را معرفی کرد، اما اولین کسی بود که نظریه‌ی سیستماتیک سری‌های واگرا را در سال ۱۸۹۹ در سن ۲۸ سالگی توسعه داد. علاوه برآن در سالهای ۱۹۲۷ - ۱۹۲۱ مجموعه مقالاتی در مورد نظریه‌ی بازی‌ها منتشر کرد و اولین کسی بود که بازیهای استراتژیک را تعریف کرد. در طول این زمان وارد سیاست شد و مقالات سیاسی مهمی را به رشته تحریر درآورد. او شروع به تلاش در مورد اروپای واحد کرد و تا پایان عمرش خوش‌بینی محکمی در این مورد داشت. بورل به همین منظور به انجمن سوسیالیست جمهوری پیوست و به عنوان وکیل آویرن انتخاب شد. در سال ۱۹۲۴ در حالی که هنوز نماینده‌ی مجلس بود، به سمت وزیر نیروی دریایی (۱۹۴۰ - ۱۹۲۵) منصوب شد. پس از دستگیری وی در سال ۱۹۴۱ به علت فعالیتهای سیاسی و توقیف عقایدش در رژیم ویچی[۹] ، سخت مقاومت کرد و به همین دلیل مدال مقاومت را در سال ۱۹۴۵ دریافت نمود.

برای کارهای علمی‌اش، اولین مدال طلای مرکز ملی تحقیقات[۱۰] را در سال ۱۹۵۵ دریافت کرد. مهم ترین کار بورل در ریاضیات، مباحثی در احتمال، ریاضی و کاربرد آنها بود. و در سال ۱۹۴۶ در حالی که ۷۵ ساله بود، کتابی تحت عنوان پارادوکس‌های جالب منتشر کرد. وی در سال ۱۹۵۶ در سن ۸۵ سالگی در شهر پاریس درگذشت.

فرانچسکو پائولو کانتلی[۱۱] در سال ۱۸۷۵ در پالرمو سیسیل[۱۲] ایتالیا به دنیا آمد. او در رشته ی ریاضی محض در پالرمو تحصیل کرد و پایان نامه ای با عنوان مکانیک آسمانی نوشت. وی پایه‌گذار انستیتو دگلی[۱۳] برای کاربردهای ریاضی و احتمال در اقتصاد بود. کانتلی در بین سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۸ مدیر مجلات انستیتو بود. او در سال ۱۹۳۱ در دانشگاه رم به درجه استادی رسید. اولین مقالات کانتلی در مسائلی در مورد ستاره شناسی و مکانیک آسمانی بود و روش لاگرانژ را برای

[۵] Lille
[۶] Croix de Guerre
[۷] Rene Baire
[۸] Henri Lebesgue
[۹] Vichy
[۱۰] Richerche Scientifique
[۱۱] Francesco Paolo Cantelli
[۱۲] palermo , Sicily
[۱۳] degli Attuari

مطالعه‌ی اختلال سیارات معرفی کرد. کارهای بعدی کانتلی در احتمالات، توزیع فراوانی، علم آمارگری و کاربرد نظریه‌های آماری بود. او در ۲۱ جولای ۱۹۶۶ در سن ۹۱ سالگی در شهر رم ایتالیا درگذشت.

۳ لم بورل کانتلی

در این بخش لم مشهور بورل کانتلی را معرفی می‌کنیم و چند قضیه‌ی مهم را که سعی در تضعیف شرایط لم داشته‌اند، به همراه اثبات ارائه می‌دهیم. ابتدا به چند تعریف ضروری پرداخته می شود:

۱.۳ چند تعریف

تعریف ۱. اگر $P\left(\lim_n X_n = X\right) = ۱$ می‌گوئیم دنباله‌ی X_n تقریباً مطمئن به X همگراست و می‌نویسیم $X_n \xrightarrow{a.s} X$.[۱۴]

تعریف ۲. اگر $\{A_n\}_{x\geq ۱}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد، پیشامد $[A_n \quad i.o.]$[۱۵] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A_n \ \ i.o.] = \lim_n \sup A_n = \bigcap_{n\geq ۱} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

$[A_n \quad i.o.]$ پیشامد آن است که A_n ها بی‌نهایت بار رخ دهند. **تبصره** متمم پیشامد $[A_n \ i.o.]$ طبق قانون دمورگان به صورت زیر محاسبه می‌شود که با نماد $\lim_n \inf A_n^c$ نمایش می‌دهیم: به عبارت دیگر

$$\left(\lim_n \sup A_n\right)^C = \left(\bigcap_{n\geq ۱} \bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c$$

$$= \bigcup_{n\geq ۱} \bigcap_{k\geq n} A_k^c$$

$$= \lim_n \inf A_n^c$$

۲.۳ لم بورل کانتلی

فرض کنید $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد و $\sum_n P(A_n) < \infty$. آن‌گاه:

$$P(A_n \ \ i.o.) = P\left(\lim_n \sup \ \ \sup A_n\right) = ۰$$

برهان:

$$P(A_n \ \ i.o.) = P\left(\lim_n \sup \ \ A_n\right)$$

$$= P\left(\lim \ \ \bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

احتمال در پیشامدهای یکنوا پیوسته است، پس:

$$= \lim_{n\to\infty} \ P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

(خاصیت زیرجمعی احتمال)

$$\leq \ \lim_n \ \sup \ \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

پس اگر $\sum_n P(A_n) < \infty$ آن‌گاه $n \to \infty$ و در نتیجه $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = ۰$ و در نتیجه عبارت فوق برابر با صفر خواهد شد و

$$P(A_n \ \ i.o.) = ۰$$

قضیه‌ی زیر با افزایش فرض استقلال، شرط لازم و کافی برای احتمال ارائه می‌دهد.

[۱۴] almost surely
[۱۵] infinitely often

۳.۳ قانون ۱ − ۰ بورل

اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل باشد، آن‌گاه:

$$P(A_n \ i.o.) = \begin{cases} ۰ & \Leftrightarrow \quad \sum_n P(A_n) < \infty \\ ۱ & \Leftrightarrow \quad \sum_n P(A_n) = \infty \end{cases}$$

برهان: شرط کافی به راحتی از لم بورل کانتلی بدست می‌آید. برای اثبات شرط لازم نیز کافیست بدانیم:

$$۱-x \leq e^{-x} \qquad ۰ < x < ۱$$

از طرفی طبق قانون ۱ − ۰ کولموگروف، این احتمال تنها مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند. بدیهی است که در حالت $\sum_n P(A_n) = \infty$، احتمال همواره عدد یک خواهد شد.

در بسیاری موارد سعی شده است که شرط استقلال قانون ۱ − ۰، بورل را ضعیف‌تر نموده و همان نتایج را بدست آورد.

تبصره [۳] اگر $\sum_n P(E_n) = \infty$ و

$$\frac{\liminf_n \left\{\sum_{j=۱}^{n}\sum_{K=۱}^{n} P(E_j E_K)\right\}}{\left\{\sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right\}^۲} = ۱$$

باشد، آن‌گاه $P\left(\limsup_n E_n\right) = ۱$

برهان: $I_{E_n}(W)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{E_n}(W) = \begin{cases} ۱ & W \in E_n \\ ۰ & W \notin E_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(I_{E_n}) = P(E_n)$$

از نامساوی چبی‌چف نتیجه می‌گیریم:

$$P\left(\left|\sum_{K=۱}^{n} I_{E_K} - \sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right| \geq \varepsilon \sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right) \leq \frac{Var\left(\sum_{K=۱}^{n} I_{E_K}\right)}{\varepsilon^۲\left[\sum_{j=۱}^{n} P(E_j)\right]^۲}$$

از طرفی:

$$Var\left(\sum_{k=۱}^{n} I_{E_K}\right) = \sum_{j=۱}^{n}\sum_{K=۱}^{n} P(E_j E_K) - \left[\sum_{j=۱}^{n} P(E_j)\right]^۲ \Rightarrow \liminf_n$$

$$P\left[\left|\sum_{K=۱}^{n} I_{E_K} - \sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right| \geq \tfrac{۱}{۲}\sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right] = ۰$$

$$\Rightarrow \liminf_n P\left[\sum_{K=۱}^{n} I_{E_K} < \tfrac{۱}{۲}\sum_{K=۱}^{n} P(E_K)\right] = ۰$$

پس $\ldots > n_۱ < n_۲ <$ وجود دارند که:

$$\sum_{j=۱}^{\infty} P\left[\sum_{K=۱}^{n_j} I_{E_K} < \frac{۱}{۲}\sum_{K=۱}^{n_j} P(E_K)\right] < \infty$$

با توجه به لم بورل کانتلی خواهیم داشت:

$$P\left(\sum_{K=۱}^{n_j} I_{E_K} < \frac{۱}{۲}\sum_{K=۱}^{n_j} P(E_K) \quad i.o.\right) = ۰$$

و در نتیجه پیشامد

$$\left[\sum_{K=۱}^{n_j} I_{E_K} \geq \frac{۱}{۲}\sum_{K=۱}^{n_j} P(E_K) \quad i.o.\right]$$

برای همه حالت‌ها مگر برای تعداد متناهی برقرار است. از طرفی $\sum_{K=۱}^{\infty} P(E_K) = \infty$ پس $\sum_{K=۱}^{\infty} I_{E_K}$ با احتمال یک واگراست و در نتیجه $P\left(\limsup_n E_n\right) = ۱$.

نتیجه [۴] اگر دنباله $\{E_n\}_{n\geq ۱}$ دو بدو مستقل باشند و علاوه بر آن $\sum_{n=۱}^{\infty} P(E_n) = \infty$ آن‌گاه $P\left(\limsup_n E_n\right) = ۱$

برهان: می‌دانیم:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} P(E_j E_K)}{\left[\sum_{K=1}^{n} P(E_K)\right]^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} P(E_j)P(E_K)+\sum_{j=1}^{n} P(E_j)}{\left[\sum_{K=1}^{n} P(E_K)\right]^2}$$

از طرفی:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,[1-P(E_j)] \leq \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$$

و در نتیجه:

$$\lim_{n}\ \inf \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} P(E_j \bigcap E_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\right]^2} = 1$$

و طبق تبصره زیر بخش قبلی خواهیم داشت:

$$P\left(\limsup_{n} E_n\right) = 1$$

مثال نقض عکس لم بورل کانتلی بدون فرض استقلال برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: [۴] اگر $\Omega = [0,1)$ و P یک سیگما میدان از زیر مجموعه‌های Ω باشد و P را اندازه لبگ در نظر بگیریم و $E_n = (0, 1/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ باشند، واضح است که $\{E_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای نزولی است و به یکدیگر وابسته‌اند. در نتیجه:

$$\limsup_{n} E_n = \lim_{n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ولی

$$P(E_n\ i.o.) = 0$$

۴ کاربرد

در این بخش، سعی می‌کنیم قضایای مهمی را که با استفاده از این لم نتیجه می‌شود، مطرح کنیم. قضیه‌ی زیر در بسیاری موارد جهت اثبات همگرایی تقریباً مطمئن استفاده می‌شود.

قضیه: معیار اساسی همگرایی تقریباً مطمئن: [۲] اگر $\{X_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon\ \ i.o.) = 0$$

برهان: برای شرط کافی کافیست بدانیم

$$\{|X_n - X| \geq \varepsilon\ i.o.\} \subset$$

$$\left\{ w : \lim_{n} X_n(w) = X(w) \right\}^C$$

و در نتیجه:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon\ \ i.o.) \leq$$

$$1 - P\left(\lim_{n} X_n = X\right) = 0$$

برای شرط لازم نیز، N_K را آخرین اندیس n در نظر می‌گیریم که $|X_n - X| \geq \frac{1}{K}$ (اگر به ازای هر n داشته باشیم: $|X_n - X| \geq \frac{1}{K}$ آن‌گاه $N_K = \infty$).

$\varepsilon = \frac{1}{K}$ را در نظر می‌گیریم، پس $P(N_K < \infty) = 0$ و در نتیجه $P\left(\bigcup_{K\geq 1}\{N_K < \infty\}\right) = 0$ پس:

$$P(N_K = \infty\ \ \forall k \geq 1) = 1$$

و بنابراین:

$$P\left(\lim_{n} X_n = X\right) = 1$$

قضیه: [۵] اگر X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با تابع مشترک $F(x)$ باشد و به ازای هر x داشته باشیم $F(x) < ۱$ آن‌گاه:

$$M_n = Max\{X_۱ ... X_n\} \uparrow \infty \quad a.s.$$

برهان: می‌خواهیم ثابت کنیم N ی وجود دارد که $P(N) = ۰$ و به ازای هرw متعلق به N^c داریم:

$$\lim_n M_n(w) = \infty$$

و به طور معادل ثابت کنیم به ازای هر j ، $n_۰(w,j)$ ی وجود دارد که به ازای هر n بزرگتر یا مساوی $n_۰(w,j)$ داریم: $M_n(w) \geq j$.

می‌دانیم $F(j) < ۱$ پس:

$$\sum_n P(M_n \leq j) = \sum_n F^n(j) < \infty$$

پس طبق لم بورل کانتلی حکم برقرار می‌شود.

قضیه: [۵] هر دنباله‌ای که در احتمال، کشی باشد، در احتمال همگراست.

برهان: دنباله‌ی $\{X_n\}$ در احتمال، کشی است پس:

$$\forall \varepsilon \, \delta \, \exists n_۰(\delta,\varepsilon) \, \forall r < n_۰(\delta,\varepsilon) \, \forall s > n.$$

$$(\delta\varepsilon) \, P[|X_r - X_s| > \varepsilon] \leq \delta$$

حال دنباله‌ی n_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$n_۱ = ۱$$

$$n_j = \inf\{N \succ n_{j-۱} : P[|X_r - X_s| > ۲^{-j}] < ۲^{-j} \ \forall r,s \geq N\}$$

که در تعریف دنباله‌ی کشی تنها قرار داده‌ایم:

$$\varepsilon = \delta = ۲^{-j}$$

$\{n_j\}$ دنباله‌ای صعودی است و $n_j \to \infty$ و

$$P[|X_{n_{j+۱}} - X_{n_j}| > ۲^{-j}] < ۲^{-j}$$

چون $\sum_{j=۱}^{\infty} P[|X_{n_{j+۱}} - X_{n_j}| \succ ۲^{-j}] < \infty$ پس از لم بورل کانتلی نتیجه می‌شود:

$$P(N) = P\left(\lim_n \sup [|X_{n_{j+۱}} - X_{n_j}| > ۲^{-j}]\right) = ۰$$

و در نتیجه $P(N^c) = ۱$

پس اگر $w \varepsilon N^c$ آن‌گاه بازای هر j که $j \to \infty$ داریم

$$\left|X_{n_{j+۱}}(w) - X_{n_j}(w)\right| \leq ۲^{-j} \qquad (۱)$$

$\left\{X_{n_j}(w)\right\}$ یک دنباله‌ی کشی از اعداد حقیقی است و رابطه‌ی (۱) برای هر L بزرگ نتیجه می‌شود، پس خاصیت کشی برقرار است.

بنابراین:

$$\sum_{j \geq L} \left|X_{n_{j+۱}}(w) - X_{n_j}(w)\right| \leq \sum_{j \geq L} ۲^{-j} = ۲ \times ۲^{-L}$$

و در نتیجه $\lim_{j\to\infty} X_{n_j}(w)$ موجود است.

پس $\left\{X_{n_j}\right\}$ با احتمال یک همگراست که حد آن را X می‌نامیم.

$$p[|X_n - X| > \varepsilon] \leq$$

$$P[|X_n - X_{n_j}| > \tfrac{\varepsilon}{۲}] + P[|X_{n_j} - X| > \tfrac{\varepsilon}{۲}]$$

پس به ازای هر η، می‌توان nj و n ی انتخاب کرد بطوریکه

$$P\left[|X_n - X_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{۲}\right] < \frac{\eta}{۲}$$

و در نتیجه $X_{n_j} \xrightarrow{a.s.} X$ و خواهیم داشت: $X_{n_j} \xrightarrow{P} X$

و رابطه‌ی $P\left[\left| X_{n_j} - X \right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \frac{\eta}{2}$ برای n_j های بزرگ برقرار است.

در قضیه‌ی زیر از مفهوم هم‌ارز دمی استفاده می‌شود که اینک تعریف می‌کنیم.

تعریف: [۵] دو دنباله‌ی $\{X_n\}_{n\geq 1}$ و $\{X'_n\}_{n\geq 1}$ را هم ارز دمی می‌گوییم هرگاه: $\sum_n P\left(X_n \neq X'_n\right) < \infty$.

قضیه: [۵] اگر دو دنباله ی $\{X_n\}_{n\geq 1}$ و $\{X'_n\}_{n\geq 1}$ هم ارز دمی باشند، آن‌گاه $\sum_n \left(X_n - X'_n\right)$ به طور تقریباً مطمئن همگراست.

برهان:

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ و $\{X'_n\}_{n\geq 1}$ هم ارز دمی هستند و در نتیجه از لم بورل کانتلی داریم:

$$\sum_n P\left(X_n \neq X'_n\right) < \infty$$
$$\Rightarrow\ P\left(X_n \neq X'_n\ i.o.\right) = 0$$
$$\Rightarrow\ P\left(\liminf_n\ (X_n = X'_n)\right) = 1$$

پس N ی وجود دارد که به ازای هر n بزرگتر یا مساوی N خواهیم داشت: $X_n = X'_n$ و $X_n - X'_n = 0$

بنابراین $\sum_{n=N}^{\infty} X_n(w) = \sum_{n=N}^{\infty} X'_n(w)$

قضیه : [۵] اگر $\{X_n : n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid باشد و به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[|X_1| \geq \varepsilon n\right] < \infty$$

آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_n}{n}\right| = 0 \quad a.s.$$

برهان: $\varepsilon > 0$ و Xn ها هم توزیع هستند، پس :

$$\sum_n P\left[|X_1| \geq \varepsilon n\right] = \sum_n P\left[|X_n| \geq \varepsilon n\right] < \infty$$

آن‌گاه طبق لم بورل کانتلی خواهیم داشت:

$$P\left(\frac{|X_n|}{n} > \varepsilon\ i.o.\right) = 0$$

و یا به عبارتی:

$$\limsup_n \frac{|X_n|}{n} \leq \varepsilon \quad a.s.$$

چون $\limsup_n \frac{|X_n|}{n}$ یک پیشامد دمی است، پس به‌طور a.s. ثابت است که توسط ε محدود شده است و ε دلخواه است پس $\limsup_n \frac{|X_n|}{n} = 0$.

قضیه: [۵] دنباله $\{X_n\}$ از متغیرهای تصادفی را در نظر می‌گیریم که $X_n \xrightarrow{P} 0$ نشان می دهیم زیر دنباله‌ی $\{X_{n_k}\}$ وجود دارد که $X_{n_K} \xrightarrow{a.s} 0$ وقتی $k \longrightarrow \infty$.

برهان: ε را مثبت اختیار می‌کنیم پس $P\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) \to 0$. اعداد صحیح مثبت $n_k \longrightarrow \infty$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$P\left(|X_{n_k}| > 2^{-k}\right) \leq 2^{-k} \qquad \forall k \geq 1$$

و در نتیجه $\sum_{k=1}^{\infty} P\left(|X_{n_k}| \rangle\, 2^{-k}\right) < \infty$. دنباله E_k را به صورت $E_k = \{|X_{nk}| > 2^{-k}\}$ تعریف می‌کنیم و در نتیجه با توجه به قضیه ۴ - ۱ داریم:

$$X_{n_k} \xrightarrow{a.s} 0 \ \ (k \to \infty).$$

۵ چند مثال

در این بخش تعدادی مثال ارائه می‌گردد که لم بورل کانتلی در ارائه‌ی راه حل آنها، نقش اساسی ایفا می‌کند.

مثال (۱): [۲] اگر $\{X_n\}_{n\geq 1}$ متغیرهای تصادفی با $P(X_n = 1) = P_n = 1 - P(X_n = 0)$ باشند و $\sum_n P_n < \infty$ آن‌گاه $P\left(\lim_n \inf \ (X_n = 0)\right) = 1$.

حل:

$$\sum_n P_n = \sum_n P(X_n = 1) < \infty$$

با استفاده از لم بورل کانتلی می توان نتیجه گرفت که:

$$P(X_n = 1 \ \ i.o.) = 0$$

بنابراین $P\left(\lim_n \ \inf \ (X_n = 0)\right) = 1$ چون با احتمال ۱ تنها دو مقدار را می‌گیرد. پس X_n ها باید به صفر همگرا باشند.

مثال (۲) (ادامه‌ی مثال (۱)): اگر در مثال (۱) شرط استقلال را نیز اضافه شود، خواهیم داشت:

$$P(X_n \to 0) = 1 \ \ \Leftrightarrow \ \ \sum P_n \langle \infty$$

مثال (۳): [۵] دنباله‌ی $\{E_n\}_{n\geq 1}$ از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با توزیع نمایی با پارامتر یک را در نظر می‌گیریم. در این صورت:

$$P\left(\lim_n \sup \frac{E_n}{\log n} = 1\right) = 1$$

حل: پیشامد $\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n(w)}{\log n} = 1$ یعنی

الف) به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\frac{E_n(w)}{\log n} \leq 1 + \varepsilon$ برای هر n بزرگ رخ دهد.

ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$ پیشامد $\frac{E_n(w)}{\log n} > 1 - \varepsilon$ به تعداد بی‌نهایت n رخ دهد.

پس خواهیم داشت:

$$\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n}{\log n} = 1\right]$$

$$= \bigcap_k \left\{\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k\right]\right\}$$

$$= \bigcap \bigcap_k \left\{\left[\frac{E_n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k\right] i.o.\right\}$$

پس کافیست توجه کنیم :

$$\sum_n P\left[\frac{E_n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k\right] =$$

$$\sum_n P[E_n > (1 - \varepsilon_k)\log n] =$$

$$\sum_n \exp\{-(1 - \varepsilon_k)\log n\} = \sum_n \frac{1}{n^{1-\varepsilon_k}} = \infty$$

و طبق لم بورل کانتلی داریم:

$$P\left\{\left[\frac{\varepsilon n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k\right] i.o.\right\} = 1$$

به همین ترتیب:

$$\sum_n P\left[\frac{E_n}{\log n} > 1 + \varepsilon_k\right]$$

$$= \sum_n \exp\{-(1 + \varepsilon_k)\log n\} = \sum_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon_k}} < \infty$$

بنابراین:

$$P\left(\lim_n \sup \left[\frac{E_n}{\log n} > 1 + \varepsilon_k\right]\right) = 0$$

و نتیجه می‌شود:

$$P\left\{\lim_n \inf \left[\frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k\right]\right\} =$$

$$1 - P\left\{\lim_n \sup \left[\frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k\right]^c\right\} = 1 .$$

مثال فوق، نتیجه‌ای با اهمیت است. زیرا یک تفکر غلط در مورد دنباله‌ی متغیرهای تصادفی iid وجود دارد که این متغیرها ثابت هستند. پس تقسیم آنها بر $\log n$ به

صفر میل می‌کند. اما نتیجه‌ی این مثال می‌گوید که نرخ رشد E_n ها با نرخ رشد $\log n$ یکسان است.

مثال (۴): [۵] اگر $L_n(w)$ طول رشته‌ی صفر $d_i(w)$ باشد که با $d_n(w)=0$ شروع شود و رشته‌ای از اعداد صفر و یک باشد، آن‌گاه احکام زیر برقرار است:

الف) $P(L_n = 0 \quad i.o.) = 1$

ب) $P(L_{2n} = 1 \quad i.o.) = 1$.

حل: می‌دانیم:

$$L_n(w) = \begin{cases} K & d_n(w)=0,\dots,d_{n+k-1}(w)=0 \\ & ,d_{n+k}(w)=1 \\ 0 & d_n(w)=1 \end{cases}$$

پس با استفاده از تعریف $A_n=\{L_{2n}=0\}$ کافیست ثابت کنیم که An ها مستقلند و

$$P(L_n=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

مثال (۵): [۵] اگر $\{Xn : n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با $P(X_1=1)=P=1-P(X_1=0)$ باشند، احتمال آنکه مدل ۱ و ۰ و ۱ بی‌نهایت بار رخ دهد، برابر است با:

حل: A_k را به صورت:

$$A_k=\{X_k=1, X_{k+1}=0, X_{k+2}=1\}$$

تعریف کرده و دنباله‌ی $A_1, A_4, A_7, \dots$ را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} P^2(1-P)=\infty$$

A_{3k+1} ها مستقلند پس با توجه به قانون ۱ − ۰ بورل، احتمال آنکه مدل ۱ و ۰ و ۱ بی‌نهایت بار رخ دهد، برابر با عدد یک خواهد بود.

مثال (۶): [۵] دنباله‌ی $\{X_n : n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با $B(1,P)$ را در نظر می‌گیریم. اگر A_n پیشامد آن باشد که در بین 2^n و 2^{n+1} امین آزمایش، تعداد n بار ۱ متوالی رخ دهد و اگر $P \geq \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه با احتمال 1، A_n ها بی‌نهایت بار رخ می‌دهند.

حل:

$$P(A_n) \geq 1-(1-P^n)^{\frac{2^n}{2n}} > 1-\exp\{\frac{-(2P)^n}{2n}\}$$

پس $\sum_n P(A_n)=\infty$ و طبق قانون ۱ − ۰ بورل با احتمال ۱، A_nها بی نهایت بار رخ می دهند.

مثال (۷): [۱،۵] اگر $\{X_n : n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با تابع توزیع پیوسته باشند، آن‌گاه

$$P[(X_n = \max\{X_1, \dots X_n\}) \quad i.o.] = 1$$

حل :

$$P[X_n = \max\{X_1, \dots X_n\}]$$

$$= P(X_n \text{ یک رکورد باشد}) = \frac{1}{n}$$

از طرفی پیشامدهای [X_n یک رکورد باشد] مستقل هستند و چون $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$، طبق قانون ۱ − ۰ بورل، حکم ثابت می‌شود.

مثال (۸): [۵] اگر $\{X_n : n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند، می توان نشان داد:

برای بعضی مقادیر M، $\sum_n P(X_n > M) < \infty$ اگر و فقط اگر $P\left(\sup_n X_n < \infty\right) = 1$.

حل: با توجه به قانون ۱ − ۰ بورل برای دنباله‌های

مستقل کافیست $A_n = [X_n > M]$ را تعریف کنیم. در این صورت:

$$P\left(\sup_n X_n > \infty\right) = P\left[\exists M : \sup_n X_n < M\right]$$

$$= P\left[\bigcup_M \bigcap_n X_n < M\right] = ۱ - P\left[\bigcap_M \bigcup_n (X_n \rangle M)\right]$$

$$= ۱ - P(X_n > M \ \ i.o.)$$

مثال (۹): [۵] اگر A_n پیشامد شیر آمدن یک سکه سالم در پرتاب n ام و n+1 ام باشد، داریم: $P(\lim_n \sup A_n)$

حل: بدیهی است $P(A_n) = \frac{۱}{۴}$ ، بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} P(A_{۲n}) = \infty$ ، $\{A_{۲n}\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل است. پس $P(A) = ۱$ در صورتی که A پیشامد آن باشد که دو شیر متوالی بی‌نهایت بار رخ دهد.

مثال (۱۰): [۵] فرض کنید $\{A_n\}_{n \geq ۱}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل باشند، در آن صورت :

الف) اگر:

$$\sum_{n=k}^{\infty} P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=k}^{n-۱} A_i^c\right) = \infty$$

آن‌گاه:

$$P\left(\lim_n \sup A_n\right) = ۱$$

ب) برای هر A که $P(A) > ۰$ داریم:

$$P\left(\lim_n \sup A_n\right) = ۱ \Leftrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} P(AA_n) = \infty$$

حل: الف)

$$\infty = \sum_{n=k}^{\infty} p\left(A_n \middle| \bigcap_{i=k}^{n-۱} A_i^c\right)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=k}^{n-۱} A_i^c\right)\right)}{P\left(\bigcap_{i=k}^{n-۱} A_i^c\right)}$$

با توجه به استقلال A_n ها داریم:

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\prod_{i=k}^{n-۱} P(A_i^c)\, P(A_n)}{\prod_{i=۱}^{n-۱} P(A_i^c)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \ \langle \ \sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n)$$

پس $\sum P(A_n) = \infty$ و در نتیجه طبق لم بورل کانتلی $P(A_n \ \ i.o.) = ۱$.

ب) برای اثبات شرط لازم در

$$P\left(\lim_n \sup A_n\right) = ۱$$

کافیست از برهان خلف استفاده کنیم. یعنی:

$$\sum P(AA_n) \ \langle \ \infty \Rightarrow \sum P\left(A \bigcap A_n \ \ i.o.\right) = ۰$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_n \inf \left(A_n \bigcap A_n\right)^c\right) = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \left(A \bigcap A_k\right)^c\right) = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(A^c \bigcup \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n^c\right)\right) = ۱$$

$$\leq P(A^c) + \lim_n P\left(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\right)$$

$$\Rightarrow ۱ - P(A^c) \leq \lim_n P\left(\bigcap A_k^c\right)$$

$$\Rightarrow P(A) \leq \lim_n \prod_{k\geq n} (۱ - P(A_k^c))$$

$$\leq \lim_n \exp\left\{-\sum_{k\geq n} P(A_k)\right\}$$

$$\Rightarrow \sum P(A_k) < \infty$$

طبق لم بورل کانتلی داریم:

$$\Rightarrow P\left(\lim_n \sup A_n\right) = 0$$

که فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

برای اثبات شرط کافی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(AA_n) = \infty$$

$$\Rightarrow \infty = \sum p\left(A \bigcap A_n\right) \langle \sum P(A_n)$$

$$\Rightarrow \sum P(A_n) \langle \infty$$

$$\Rightarrow P(A_n \ i.o.) = 1 \quad \text{(لم بورل کانتلی)}$$

مثال (۱۱): [۵] اگر $P(A_n) \geq \varepsilon > 0$ آن‌گاه $P(A_n\, i.o.) \geq \varepsilon$.

حل:

$$P(A_n) \geq \varepsilon \rangle 0 \Rightarrow \varepsilon \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

با گرفتن حد از طرفین داریم :

$$\Rightarrow \varepsilon \leq \lim_n \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A_n \ i.o.)$$

مثال (۱۲): [۵] اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل با $P(A_n) < 1 \quad \forall n \geq 1$ باشد، آنگاه:

$$P(A_n\, i.o.) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

حل: اگر $P\left(\bigcup_n A_n\right) \cong 1$ آن‌گاه با توجه به پیوستگی تابع P داریم:

$$P(A_n \ i.o.) = P\left(\bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

و

$$P(A_n \ i.o.) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1$$

از طرفی $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq P\left(\bigcup_{i\geq n} A_i\right)$ پس:

$$1 \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i\geq n} A_i\right) = 1.$$

مثال (۱۳): [۵] اگر $\{X_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid باشد که تقریباً مطمئن ثابت نباشد، آن‌گاه:

$$P(\text{همگرا باشد } X_n) = 0$$

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. پس طبق قانون ۱ – ۰ کولموگروف در مورد متغیرهای تصادفی مستقل $P(\text{همگرا باشد } X_n) = 1$ از طرفی چون $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ها به طور مطمئن ثابت نیستند، پس مجموعه‌ی N ی وجود دارد که $P(N) = 0$ و $N = \{w : X_n(w) = \text{ثابت}\}$.
در مجموعه‌ی N , X_n ها ثابتند پس همگرا هستند ولی احتمال همگرایی آنها صفر است که خلاف فرض است.

مثال (۱۴): [۳] اگر $\{X_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع $\{F_n\}$ باشد، آن‌گاه:

$$P\left(\lim_n X_n = 0\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_n \{1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)\} < \infty$$

حل: با توجه به استقلال متغیرها، کافیست ثابت کنیم:

$$\sum_n \{1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)\} = \sum_n P\{|X_n| \rangle \varepsilon\} < \infty$$

مثال (۱۵): [۳] اگر $\sum_n P(|X_n|>n) < \infty$ آن‌گاه به طور تقریباً مطمئن خواهیم داشت:

$$\lim_n \sup \frac{|X_n|}{n} \le 1$$

حل: با توجه به لم بورل کانتلی داریم:

$$P\left(\lim_n \sup |X_n| > n\right) = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_n \sup \frac{|X_n|}{n} > 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_n \inf \frac{|X_n|}{n} \le 1\right) = 1$$

پس N_0 ی وجود دارد که برای تمام n های بزرگ‌تر از N_0، $\frac{|X_n|}{n} \le 1$ با احتمال یک رخ می‌دهند.

مثال (۱۶): [۴] برای هر دنباله از پیشامدهای $\{A_n\}_{n\ge1}$ که $P(A_n) \to 0$ وقتی $n \to \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n A^c_{n+1}\right) < \infty$ خواهیم داشت:

$$P(A_n\, i.o.) = 0$$

حل: با توجه به قضیه‌ی احتمال کل داریم:

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n P(A_n A_{n+1}) + \sum_n P\left(A_n A^c_{n+1}\right)$$

و چون (c عددی ثابت است):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\left(A_n \bigcap A^c_{n+1}\right)}{P\left(A_n \bigcap A_{n+1}\right)} = c$$

طبق آزمون مقایسه‌ی سری‌ها و فرض مسأله $\sum P(A_n A_{n+1}) < \infty$ پس $\sum_n P(A_n) < \infty$ و در نتیجه طبق لم بورل کانتلی $P(A_n\, i.o.) = 0$.

مراجع

[1] Billingsley P. 1995, *Probability and Measure, 3rd ed.*, John Wiley and Sons, New York.

[2] Bremaud, P., 1998, *Markov Chains*, Springer-Verlag, New York.

[3] Chung Kai Lai, 1974 *A Course in Probability Theory, 2nd ed.*, Academic Press inc.

[4] Laha R.G. and Rohatgi V.K., 1979, *Probability Theory*, John Wiley, New York.

[5] Resnick S.I., 1998, *A Probadility Path*, Birkhduser.

[6] Varadhan S.R.S., 2000, *Probability Theory.*