

## لم بورل کانتلی، اهمیت و کاربردهای آن

مریم شریف دوست<sup>۱</sup> عین... پاشا<sup>۲</sup>

چکیده:

در این مقاله، ابتدا لم بورل کانتلی را معرفی می‌کنیم و سپس قضایای مهم و مثال‌هایی که با استفاده از این لم، اثبات می‌شوند مطرح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: لم بورل کانتلی، قانون ۱ - ۰، بورل، همگرایی در احتمال، همگرایی تقریباً مطمئن (a.s.)

### ۱ مقدمه

قانون ۱ - ۰ کولموگروف می‌گوید که اگر متغیرهای تصادفی مستقل با سیگما جبر  $T$  به صورت:

$$T = \bigcap_n F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

وجود داشته باشند، آن‌گاه برای هر  $A \in T$  داریم:

۱ یا  $P(A) = 0$ . [۱] از آنجایی که پیشامدهای زیر،

همگی در  $T$  قرار دارند، احتمال آنها صفر یا ۱ است، اما

قانون ۱ - ۰ کولموگروف، در مورد محاسبه‌ی احتمال

این پیشامدها بحثی نمی‌کند.

$$A_1 = \left\{ \sum_n X_n \text{ همگراست} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ موجود است} \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \frac{\sum X_n}{n} \rightarrow 0 \right\}$$

لم بورل کانتلی این امکان را می‌دهد که احتمال

پیشامدها را به راحتی محاسبه کنیم.

این لم هر چند محتوا و اثباتی ساده دارد، اما هنوز پایه و اساس اثبات همگرایی تقریباً مطمئن است. این لم نیاز به شرط استقلال ندارد. اما در قانون ۱ - ۰ بورل، در بررسی همگرایی پیشامدها، فرض استقلال ضروری است.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲ تاریخچه‌ای از زندگی بورل و کانتلی بیان می‌گردد. سپس در بخش ۳ لم بورل کانتلی و قانون ۱ - ۰ بورل به همراه اثبات آنها و تعدادی از قضایا که به نحوی معادل این لم می‌باشند را مطرح می‌کنیم. در بخش ۴، با قضایایی که با استفاده از این لم اثبات می‌شوند، آشنا می‌شویم و در انتها مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

### ۲ تاریخچه

امیل بورل<sup>۳</sup> در هفتم ژانویه ۱۸۷۱ در اوپرون<sup>۴</sup> فرانسه به دنیا آمد و تحصیلات خود را در سن ۲۲ سالگی در دانشسرای عالی پاریس به پایان رساند و در همان سال به

<sup>۱</sup> دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

<sup>۲</sup> دانشگاه تربیت معلم تهران

<sup>۳</sup> Emile Borel

<sup>۴</sup> Aveyron

انجمن سوسیالیست جمهوری پیوست و به عنوان وکیل  
آویرن انتخاب شد. در سال ۱۹۲۴ در حالی که هنوز  
نماینده‌ی مجلس بود، به سمت وزیر نیروی دریایی  
(۱۹۴۰ - ۱۹۲۵) منصوب شد. پس از دستگیری وی در  
سال ۱۹۴۱ به علت فعالیت‌های سیاسی و توقیف عقایدش  
در رژیم ویچی<sup>۹</sup>، سخت مقاومت کرد و به همین دلیل  
مدال مقاومت را در سال ۱۹۴۵ دریافت نمود.

برای کارهای علمی‌اش، اولین مدال طلای مرکز ملی  
تحقیقات<sup>۱۰</sup> را در سال ۱۹۵۵ دریافت کرد. مهم‌ترین  
کار بورل در ریاضیات، مباحثی در احتمال، ریاضی و  
کاربرد آنها بود. و در سال ۱۹۴۶ در حالی که ۷۵ ساله  
بود، کتابی تحت عنوان پارادوکس‌های جالب منتشر کرد.  
وی در سال ۱۹۵۶ در سن ۸۵ سالگی در شهر پاریس  
درگذشت.

فرانچسکو پائولو کانتلی<sup>۱۱</sup> در سال ۱۸۷۵ در پالرمو  
سیسیل<sup>۱۲</sup> ایتالیا به دنیا آمد. او در رشته‌ی ریاضی  
محض در پالرمو تحصیل کرد و پایان‌نامه‌ی او با عنوان  
مکانیک آسمانی نوشت. وی پایه‌گذار انستیتو دگلی<sup>۱۳</sup>  
برای کاربردهای ریاضی و احتمال در اقتصاد بود. کانتلی  
در بین سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۸ مدیر مجلات انستیتو  
بود. او در سال ۱۹۳۱ در دانشگاه رم به درجه‌ی استادی  
رسید. اولین مقالات کانتلی در مسائلی در مورد ستاره  
شناسی و مکانیک آسمانی بود و روش لاگرانژ را برای

ریاست گروه ریاضی دانشگاه لیل<sup>۵</sup> منصوب شد و در سن  
۲۵ سالگی در همان دانش‌سرا استخدام گردید. در سال  
۱۹۰۹ به عنوان مدیر نظریه‌ی تابعی که خودش آن را  
خلق کرده بود، در شهر سوربن منصوب شد و به درجه‌ی  
استادی رسید. در سال ۱۹۱۰ به مدت ۱۰ سال به  
عنوان رئیس دانشگاه اکل انتخاب شد و در سال ۱۹۱۸  
جایزه‌ی کردیس<sup>۶</sup> را به خاطر فعالیت‌هایش در جنگ  
جهانی اول کسب کرد و در سال ۱۹۲۱ تا ۱۹۳۴ به  
عنوان رئیس انجمن علوم برگزیده شد.

اولین نظریه‌ی جالب بورل، اندازه‌ی مجموعه‌ی نقاط  
بود. این کار به همراه دو ریاضیدان فرانسوی دیگر، رنه  
بایر<sup>۷</sup> و هنری لِبگ<sup>۸</sup>، بعنوان آغازکنندگان نظریه‌ی جدید  
توابع یک متغیره‌ی حقیقی شناخته شد. هر چند بورل  
اولین کسی نبود که بحث مجموع سری‌های واگرا را  
معرفی کرد، اما اولین کسی بود که نظریه‌ی سیستماتیک  
سری‌های واگرا را در سال ۱۸۹۹ در سن ۲۸ سالگی  
توسعه داد. علاوه بر آن در سالهای ۱۹۲۷ - ۱۹۲۱  
مجموعه مقالاتی در مورد نظریه‌ی بازی‌ها منتشر کرد و  
اولین کسی بود که بازیهای استراتژیک را تعریف کرد.  
در طول این زمان وارد سیاست شد و مقالات سیاسی  
مهمی را به رشته تحریر درآورد. او شروع به تلاش در  
مورد اروپای واحد کرد و تا پایان عمرش خوش‌بینی  
محکمی در این مورد داشت. بورل به همین منظور به

Lille<sup>۵</sup>  
Croix de Guerre<sup>۶</sup>  
Rene Baire<sup>۷</sup>  
Henri Lebesgue<sup>۸</sup>  
Vichy<sup>۹</sup>  
Rcherche Scientifique<sup>۱۰</sup>  
Francesco Paolo Cantelli<sup>۱۱</sup>  
palermo , Sicily<sup>۱۲</sup>  
degli Attuari<sup>۱۳</sup>

$$= \liminf_n A_n^c$$

### ۲.۳ لم بورل کانتلی

فرض کنید  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از پیشامدها باشد و

$$\sum_n P(A_n) < \infty \text{ . آن گاه:}$$

$$P(A_n \text{ i.o.}) = P\left(\limsup_n \sup A_n\right) = 0$$

برهان:

$$P(A_n \text{ i.o.}) = P\left(\limsup_n A_n\right)$$

$$= P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

احتمال در پیشامدهای یکنوا پیوسته است، پس:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

(خاصیت زیرجمعی احتمال)

$$\leq \lim_n \sup \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

$$\sum_n P(A_n) < \infty \text{ پس اگر } n \rightarrow \infty \text{ آن گاه}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0 \text{ و در نتیجه عبارت فوق برابر با صفر خواهد شد و}$$

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 0$$

قضیه‌ی زیر با افزایش فرض استقلال، شرط لازم و کافی برای احتمال ارائه می‌دهد.

مطالعه‌ی اختلال سیارات معرفی کرد. کارهای بعدی کانتلی در احتمالات، توزیع فراوانی، علم آمارگری و کاربرد نظریه‌های آماری بود. او در ۲۱ جولای ۱۹۶۶ در سن ۹۱ سالگی در شهر رم ایتالیا درگذشت.

### ۳ لم بورل کانتلی

در این بخش لم مشهور بورل کانتلی را معرفی می‌کنیم و چند قضیه‌ی مهم را که سعی در تضعیف شرایط لم داشته‌اند، به همراه اثبات ارائه می‌دهیم. ابتدا به چند تعریف ضروری پرداخته می‌شود:

#### ۱.۳ چند تعریف

تعریف ۱. اگر  $P\left(\lim_n X_n = X\right) = 1$  می‌گوئیم دنباله‌ی  $X_n$  تقریباً مطمئن به  $X$  همگراست و می‌نویسیم  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  <sup>۱۴</sup>.

تعریف ۲. اگر  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از پیشامدها باشد، پیشامد  $[A_n \text{ i.o.}]$  <sup>۱۵</sup> را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A_n \text{ i.o.}] = \lim_n \sup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

$[A_n \text{ i.o.}]$  پیشامد آن است که  $A_n$  ها بی‌نهایت بار رخ دهند. تبصره متمم پیشامد  $[A_n \text{ i.o.}]$  طبق قانون دمورگان به صورت زیر محاسبه می‌شود که با نماد  $\lim_n \inf A_n^c$  نمایش می‌دهیم: به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} \left(\lim_n \sup A_n\right)^c &= \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right)^c \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k^c \end{aligned}$$

almost surely <sup>۱۴</sup>  
infinitely often <sup>۱۵</sup>

## ۳.۳ قانون ۱ - بورل

اگر  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل باشد،  
آن‌گاه:

$$P(A_n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \sum P(A_n) < \infty \\ 1 & \Leftrightarrow \sum P(A_n) = \infty \end{cases}$$

برهان: شرط کافی به راحتی از لم بورل کانتلی بدست می‌آید. برای اثبات شرط لازم نیز کفایت بدانیم:

$$1 - x \leq e^{-x} \quad 0 < x < 1$$

از طرفی طبق قانون ۱ - کولموگروف، این احتمال تنها مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند. بدیهی است که در حالت  $\sum P(A_n) = \infty$ ، احتمال همواره عدد یک خواهد شد. در بسیاری موارد سعی شده است که شرط استقلال قانون ۱ - ۰، بورل را ضعیف‌تر نموده و همان نتایج را بدست آورد.

تبصره [۳] اگر  $\sum P(E_n) = \infty$  و

$$\frac{\liminf_n \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n P(E_j E_K) \right\}}{\left\{ \sum_{K=1}^n P(E_K) \right\}^2} = 1$$

باشد، آن‌گاه  $P(\limsup_n E_n) = 1$

برهان:  $I_{E_n}(W)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{E_n}(W) = \begin{cases} 1 & W \in E_n \\ 0 & W \notin E_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(I_{E_n}) = P(E_n)$$

از نامساوی چنی‌بی چف نتیجه می‌گیریم:

$$P\left(\left|\sum_{K=1}^n I_{E_K} - \sum_{K=1}^n P(E_K)\right| \geq \varepsilon \sum_{K=1}^n P(E_K)\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\sum_{K=1}^n I_{E_K}\right)}{\varepsilon^2 \left[\sum_{j=1}^n P(E_j)\right]^2}$$

از طرفی:

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n I_{E_K}\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n P(E_j E_K) - \left[\sum_{j=1}^n P(E_j)\right]^2 \Rightarrow \liminf_n$$

$$P\left[\left|\sum_{K=1}^n I_{E_K} - \sum_{K=1}^n P(E_K)\right| \geq \frac{1}{4} \sum_{K=1}^n P(E_K)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \liminf_n P\left[\sum_{K=1}^n I_{E_K} < \frac{1}{4} \sum_{K=1}^n P(E_K)\right] = 0$$

پس  $n_1 < n_2 < \dots$  وجود دارند که:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\left[\sum_{K=1}^{n_j} I_{E_K} < \frac{1}{4} \sum_{K=1}^{n_j} P(E_K)\right] < \infty$$

با توجه به لم بورل کانتلی خواهیم داشت:

$$P\left(\sum_{K=1}^{n_j} I_{E_K} < \frac{1}{4} \sum_{K=1}^{n_j} P(E_K) \text{ i.o.}\right) = 0$$

و در نتیجه پیشامد

$$\left[\sum_{K=1}^{n_j} I_{E_K} \geq \frac{1}{4} \sum_{K=1}^{n_j} P(E_K) \text{ i.o.}\right]$$

برای همه حالت‌ها مگر برای تعداد منتهای برقرار است.

از طرفی  $\sum_{K=1}^{\infty} P(E_K) = \infty$  پس  $\sum_{K=1}^{\infty} I_{E_K}$  با احتمال

$$P(\limsup_n E_n) = 1$$

نتیجه [۴] اگر دنباله  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  دو بدو

مستقل باشند و علاوه بر آن  $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty$

$$P(\limsup_n E_n) = 1 \text{ آن‌گاه}$$

برهان: می دانیم:

$$\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n P(E_j E_K)}{\left[ \sum_{K=1}^n P(E_K) \right]^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n P(E_j)P(E_K) + \sum_{j=1}^n P(E_j)}{\left[ \sum_{K=1}^n P(E_K) \right]^2}$$

از طرفی:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n P(E_j) [1 - P(E_j)] \leq \sum_{j=1}^n P(E_j)$$

و در نتیجه:

$$\liminf_n \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n P(E_j \cap E_K)}{\left[ \sum_{j=1}^n P(E_j) \right]^2} = 1$$

و طبق تبصره زیر بخش قبلی خواهیم داشت:

$$P\left(\limsup_n E_n\right) = 1$$

مثال نقض عکس لم بورل کانتلی بدون فرض استقلال برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: [۴] اگر  $\Omega = [0, 1]$  و  $P$  یک سیگما میدان از زیر مجموعه های  $\Omega$  باشد و  $P$  را اندازه لبگ در نظر بگیریم و  $E_n = (0, 1/n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) باشد، واضح است که  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  دنباله ای نزولی است و به یکدیگر وابسته اند. در نتیجه:

$$\limsup_n E_n = \lim_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ولی

$$P(E_n \text{ i.o.}) = 0$$

## ۴ کاربرد

در این بخش، سعی می کنیم قضایای مهمی را که با استفاده از این لم نتیجه می شود، مطرح کنیم. قضیه ی زیر

در بسیاری موارد جهت اثبات همگرایی تقریباً مطمئن استفاده می شود.

قضیه: معیار اساسی همگرایی تقریباً مطمئن: [۲] اگر  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  دنباله ای از متغیرهای تصادفی حقیقی باشند، آن گاه:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0$$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.o.}) = 0$$

برهان: برای شرط کافی کفایت بدانیم

$$\{|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.o.}\}^C$$

$$\left\{ w : \lim_n X_n(w) = X(w) \right\}^C$$

و در نتیجه:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.o.}) \leq$$

$$1 - P\left(\lim_n X_n = X\right) = 0$$

برای شرط لازم نیز،  $N_K$  را آخرین اندیس  $n$  در نظر می گیریم که  $|X_n - X| \geq \frac{1}{K}$  (اگر به ازای هر  $n$  داشته باشیم:  $|X_n - X| \geq \frac{1}{K}$  آن گاه  $N_K = \infty$ ).

$\varepsilon = \frac{1}{K}$  را در نظر می گیریم، پس  $P(N_K < \infty) = 0$  و در نتیجه  $P\left(\bigcup_{K \geq 1} \{N_K < \infty\}\right) = 0$  پس:

$$P(N_K = \infty \forall k \geq 1) = 1$$

و بنابراین:

$$P\left(\lim_n X_n = X\right) = 1$$

$\{n_j\}$  دنباله‌ای صعودی است و  $n_j \rightarrow \infty$  و

$$P[|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}] < 2^{-j}$$

چون  $\sum_{j=1}^{\infty} P[|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}] < \infty$  پس از لم بورل کانتلی نتیجه می‌شود:

$$P(N) = P\left(\limsup_n [|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}]\right) = 0$$

و در نتیجه  $P(N^c) = 1$

پس اگر  $w \in N^c$  آن‌گاه برای هر  $z$  که  $z \rightarrow \infty$  داریم

$$|X_{n_{j+1}}(w) - X_{n_j}(w)| \leq 2^{-j} \quad (1)$$

$\{X_{n_j}(w)\}$  یک دنباله‌ی کشی از اعداد حقیقی است و رابطه‌ی (۱) برای هر  $L$  بزرگ نتیجه می‌شود، پس خاصیت کشی برقرار است.

بنابراین:

$$\sum_{j \geq L} |X_{n_{j+1}}(w) - X_{n_j}(w)| \leq \sum_{j \geq L} 2^{-j} = 2 \times 2^{-L}$$

و در نتیجه  $\lim_{j \rightarrow \infty} X_{n_j}(w)$  موجود است.

پس  $\{X_{n_j}\}$  با احتمال یک همگراست که حد آن را  $X$  می‌نامیم.

$$p[|X_n - X| > \varepsilon] \leq$$

$$P[|X_n - X_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{4}] + P[|X_{n_j} - X| > \frac{\varepsilon}{4}]$$

پس به ازای هر  $\eta$ ، می‌توان  $n_j$  و  $n$  ی انتخاب کرد بطوریکه

$$P[|X_n - X_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{4}] < \frac{\eta}{4}$$

قضیه: [۵] اگر  $X_n$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با تابع مشترک  $F(x)$  باشد و به ازای هر  $x$  داشته باشیم  $F(x) < 1$  آن‌گاه:

$$M_n = \text{Max}\{X_1, \dots, X_n\} \uparrow \infty \quad a.s.$$

برهان: می‌خواهیم ثابت کنیم  $N$  وجود دارد که  $P(N) = 0$  و به ازای هر  $w$  متعلق به  $N^c$  داریم:

$$\lim_n M_n(w) = \infty$$

و به طور معادل ثابت کنیم به ازای هر  $j$ ،  $n_0(w, j)$  وجود دارد که به ازای هر  $n$  بزرگتر یا مساوی  $n_0(w, j)$  داریم:  $M_n(w) \geq j$ . می‌دانیم  $F(j) < 1$  پس:

$$\sum_n P(M_n \leq j) = \sum_n F^n(j) < \infty$$

پس طبق لم بورل کانتلی حکم برقرار می‌شود.

قضیه: [۵] هر دنباله‌ای که در احتمال، کشی باشد، در احتمال همگراست.

برهان: دنباله‌ی  $\{X_n\}$  در احتمال، کشی است پس:

$$\forall \varepsilon \delta \exists n_0(\delta, \varepsilon) \forall r < n_0(\delta, \varepsilon) \forall s > n_0(\delta, \varepsilon)$$

$$(\delta \varepsilon) P[|X_r - X_s| > \varepsilon] \leq \delta$$

حال دنباله‌ی  $n_j$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$n_1 = 1$$

$$n_j = \inf\{N > n_{j-1} : P[|X_r - X_s| > 2^{-j}] <$$

$$2^{-j} \forall r, s \geq N\}$$

که در تعریف دنباله‌ی کشی تنها قرار داده‌ایم:

$$\varepsilon = \delta = 2^{-j}$$

آن‌گاه طبق لم بورل کانتلی خواهیم داشت:

$$P\left(\frac{|X_n|}{n} > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0$$

و یا به عبارتی:

$$\limsup_n \frac{|X_n|}{n} \leq \varepsilon \text{ a.s.}$$

چون  $\limsup_n \frac{|X_n|}{n}$  یک پیشامد دمی است، پس به طور a.s. ثابت است که توسط  $\varepsilon$  محدود شده است و دلخواه است پس  $\limsup_n \frac{|X_n|}{n} = 0$ .

قضیه: [۵] دنباله  $\{X_n\}$  از متغیرهای تصادفی را در نظر می‌گیریم که  $X_n \xrightarrow{P} 0$  نشان می‌دهیم زیر دنباله‌ی  $\{X_{n_k}\}$  وجود دارد که  $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0$  وقتی  $k \rightarrow \infty$ .

برهان:  $\varepsilon$  را مثبت اختیار می‌کنیم پس  $P(|X_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  اعداد صحیح مثبت  $n_k \rightarrow \infty$  را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$P(|X_{n_k}| > 2^{-k}) \leq 2^{-k} \quad \forall k \geq 1$$

و در نتیجه  $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k}| > 2^{-k}) < \infty$  دنباله  $E_k$  را به صورت  $E_k = \{|X_{n_k}| > 2^{-k}\}$  تعریف می‌کنیم و در نتیجه با توجه به قضیه ۴-۱ داریم:

$$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

## ۵ چند مثال

در این بخش تعدادی مثال ارائه می‌گردد که لم بورل کانتلی در ارائه‌ی راه حل آنها، نقش اساسی ایفا می‌کند.

و در نتیجه  $X_{n_j} \xrightarrow{a.s.} X$  و خواهیم داشت:  $X_{n_j} \xrightarrow{P} X$  و رابطه‌ی  $P[|X_{n_j} - X| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\eta}{2}$  برای  $n_j$  های بزرگ برقرار است.

در قضیه‌ی زیر از مفهوم هم‌ارزدمی استفاده می‌شود که اینک تعریف می‌کنیم.

تعریف: [۵] دو دنباله‌ی  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  و  $\{X'_n\}_{n \geq 1}$  را هم‌ارزدمی می‌گوییم هرگاه:  $\sum_n P(X_n \neq X'_n) < \infty$ .  
قضیه: [۵] اگر دو دنباله‌ی  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  و  $\{X'_n\}_{n \geq 1}$  هم‌ارزدمی باشند، آن‌گاه  $\sum_n (X_n - X'_n)$  به طور تقریباً مطمئن همگراست.

برهان:

$\{X_n\}_{n \geq 1}$  و  $\{X'_n\}_{n \geq 1}$  هم‌ارزدمی هستند و در نتیجه از لم بورل کانتلی داریم:

$$\begin{aligned} \sum_n P(X_n \neq X'_n) &< \infty \\ \Rightarrow P(X_n \neq X'_n \text{ i.o.}) &= 0 \\ \Rightarrow P\left(\liminf_n (X_n = X'_n)\right) &= 1 \end{aligned}$$

پس  $N$  ی وجود دارد که به ازای هر  $n$  بزرگتر یا مساوی  $N$

خواهیم داشت:  $X_n = X'_n$  و  $X_n - X'_n = 0$

$$\sum_{n=N}^{\infty} X_n(w) = \sum_{n=N}^{\infty} X'_n(w)$$

قضیه: [۵] اگر  $\{X_n : n \geq 1\}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid باشد و به ازای هر  $\varepsilon > 0$  داشته باشیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq \varepsilon n] < \infty$$

آن‌گاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X_n}{n} \right| = 0 \text{ a.s.}$$

برهان:  $\varepsilon > 0$  و  $X_n$  ها هم توزیع هستند، پس:

$$\sum_n P[|X_n| \geq \varepsilon n] = \sum_n P[|X_n| \geq \varepsilon n] < \infty$$

$$= \bigcap_k \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k \right] \right\}$$

$$= \bigcap_k \left\{ \left[ \frac{E_n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k \right] i.o. \right\}$$

پس کافیت توجه کنیم :

$$\sum_n P \left[ \frac{E_n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k \right] =$$

$$\sum_n P [E_n > (1 - \varepsilon_k) \log n] =$$

$$\sum_n \exp \{ -(1 - \varepsilon_k) \log n \} = \sum_n \frac{1}{n^{1 - \varepsilon_k}} = \infty$$

و طبق لم بورل کانتلی داریم:

$$P \left\{ \left[ \frac{E_n}{\log n} > 1 - \varepsilon_k \right] i.o. \right\} = 1$$

به همین ترتیب:

$$\sum_n P \left[ \frac{E_n}{\log n} > 1 + \varepsilon_k \right]$$

$$= \sum_n \exp \{ -(1 + \varepsilon_k) \log n \} = \sum_n \frac{1}{n^{1 + \varepsilon_k}} < \infty$$

بنابراین:

$$P \left( \limsup_n \left[ \frac{E_n}{\log n} > 1 + \varepsilon_k \right] \right) = 0$$

و نتیجه می شود:

$$P \left\{ \liminf_n \left[ \frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k \right] \right\} =$$

$$1 - P \left\{ \limsup_n \left[ \frac{E_n}{\log n} \leq 1 + \varepsilon_k \right] \right\} = 1.$$

مثال فوق، نتیجه ای با اهمیت است. زیرا یک تفکر غلط در مورد دنباله ی متغیرهای تصادفی iid وجود دارد که این متغیرها ثابت هستند. پس تقسیم آنها بر  $\log n$  به

مثال (۱): [۲] اگر  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  متغیرهای تصادفی با  $P(X_n = 1) = P_n = 1 - P(X_n = 0)$  باشند و  $\sum_n P_n < \infty$  آن گاه  $P(\liminf_n (X_n = 0)) = 1$  است.  
حل:

$$\sum_n P_n = \sum_n P(X_n = 1) < \infty$$

با استفاده از لم بورل کانتلی می توان نتیجه گرفت که:

$$P(X_n = 1 \text{ i.o.}) = 0$$

بنابراین  $P(\liminf_n (X_n = 0)) = 1$  چون با احتمال ۱ تنها دو مقدار را می گیرد. پس  $X_n$  ها باید به صفر همگرا باشند.

مثال (۲) (ادامه ی مثال (۱)): اگر در مثال (۱) شرط استقلال را نیز اضافه شود، خواهیم داشت:

$$P(X_n \rightarrow 0) = 1 \Leftrightarrow \sum_n P_n < \infty$$

مثال (۳): [۵] دنباله ی  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با توزیع نمایی با پارامتریک را در نظر می گیریم. در این صورت:

$$P \left( \limsup_n \frac{E_n}{\log n} = 1 \right) = 1$$

حل: پیشامد  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(w)}{\log n} = 1$  یعنی

الف) به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\frac{E_n(w)}{\log n} \leq 1 + \varepsilon$ ، برای هر  $n$  بزرگ رخ دهد.

ب) به ازای هر  $\varepsilon > 0$  پیشامد  $\frac{E_n(w)}{\log n} > 1 - \varepsilon$  به تعداد بی نهایت  $n$  رخ دهد.

پس خواهیم داشت:

$$\left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{\log n} = 1 \right]$$



مثال (۶): [۵] دنباله‌ی  $\{X_n : n \geq 1\}$  از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با  $B(1, P)$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $A_n$  پیشامد آن باشد که در بین  $2^n$  و  $2^{n+1}$  امین آزمایش، تعداد  $n$  بار ۱ متوالی رخ دهد و اگر  $P \geq \frac{1}{4}$  باشد، آن‌گاه با احتمال  $A_n, 1$  ها بی‌نهایت بار رخ می‌دهند.

حل:

$$P(A_n) \geq 1 - (1 - P^n)^{\frac{2^n}{2^n}} > 1 - \exp\left\{-\frac{(2P)^n}{2^n}\right\}$$

پس  $\sum_n P(A_n) = \infty$  و طبق قانون ۱ - بورل با احتمال ۱،  $A_n$  ها بی‌نهایت بار رخ می‌دهند.

مثال (۷): [۱، ۵] اگر  $\{X_n : n \geq 1\}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با تابع توزیع پیوسته باشند، آن‌گاه

$$P[(X_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}) \text{ i.o.}] = 1$$

حل:

$$P[X_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}]$$

$$= P(X_n \text{ یک رکورد باشد}) = \frac{1}{n}$$

از طرفی پیشامدهای  $\{X_n \text{ یک رکورد باشد}\}$  مستقل هستند و چون  $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$ ، طبق قانون ۱ - بورل، حکم ثابت می‌شود.

مثال (۸): [۵] اگر  $\{X_n : n \geq 1\}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند، می‌توان نشان داد:

$$\text{برای بعضی مقادیر } M, \infty \langle \sum_n P(X_n > M) \text{ اگر و فقط اگر } P\left(\sup_n X_n < \infty\right) = 1$$

حل: با توجه به قانون ۱ - بورل برای دنباله‌های

صفر میل می‌کند. اما نتیجه‌ی این مثال می‌گوید که نرخ رشد  $E_n$  ها با نرخ رشد  $\log n$  یکسان است.

مثال (۴): [۵] اگر  $L_n(w)$  طول رشته‌ی صفر  $d_i(w)$  باشد که با  $d_n(w) = 0$  شروع شود و رشته‌ای از اعداد صفر و یک باشد، آن‌گاه احکام زیر برقرار است:

$$P(L_n = 0 \text{ i.o.}) = 1 \quad (\text{الف})$$

$$P(L_{2n} = 1 \text{ i.o.}) = 1 \quad (\text{ب})$$

حل: می‌دانیم:

$$L_n(w) = \begin{cases} K & d_n(w) = 0, \dots, d_{n+k-1}(w) = 0 \\ & , d_{n+k}(w) = 1 \\ 0 & d_n(w) = 1 \end{cases}$$

پس با استفاده از تعریف  $A_n = \{L_{2n} = 0\}$  کفایت ثابت کنیم که  $A_n$  ها مستقلند و

$$P(L_n = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

مثال (۵): [۵] اگر  $\{X_n : n \geq 1\}$  دنباله‌ای از متغیرهای

تصادفی iid با  $P(X_1 = 1) = P = 1 - P(X_1 = 0)$  باشند، احتمال آنکه مدل ۱ و ۰ و ۱ بی‌نهایت بار رخ دهد، برابر است با:

حل:  $A_k$  را به صورت:

$$A_k = \{X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1\}$$

تعریف کرده و دنباله‌ی  $A_1, A_2, A_3, \dots$  را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} P^2(1 - P) = \infty$$

$A_{2k+1}$  ها مستقلند پس با توجه به قانون ۱ - بورل، احتمال آنکه مدل ۱ و ۰ و ۱ بی‌نهایت بار رخ دهد، برابر با عدد یک خواهد بود.

مستقل کافیت  $A_n = [X_n > M]$  را تعریف کنیم. در

این صورت:

$$\begin{aligned} P\left(\sup_n X_n > \infty\right) &= P\left[\exists M : \sup_n X_n < M\right] \\ &= P\left[\bigcup_n \bigcap_{M} X_n < M\right] = 1 - P\left[\bigcap_n \bigcup (X_n > M)\right] \\ &= 1 - P(X_n > M \text{ i.o.}) \end{aligned}$$

مثال (۹): [۵] اگر  $A_n$  پیشامد شیر آمدن یک سکه سالم

در پرتاب  $n$  ام و  $n+1$  ام باشد، داریم:  $P(\lim_n \sup A_n)$

حل: بدیهی است  $\frac{1}{4} = P(A_n)$ ، بنابراین

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ، دنباله‌ای از پیشامدهای

مستقل است. پس  $P(A) = 1$  در صورتی که  $A$  پیشامد

آن باشد که دو شیر متوالی بی‌نهایت بار رخ دهد.

مثال (۱۰): [۵] فرض کنید  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از

پیشامدهای مستقل باشند، در آن صورت:

الف) اگر:

$$\sum_{n=k}^{\infty} P\left(A_n \mid \bigcap_{i=k}^{n-1} A_i^c\right) = \infty$$

آن‌گاه:

$$P(\lim_n \sup A_n) = 1$$

ب) برای هر  $A$  که  $P(A) > 0$  داریم:

$$P(\lim_n \sup A_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(AA_n) = \infty$$

حل: الف)

$$\infty = \sum_{n=k}^{\infty} P\left(A_n \mid \bigcap_{i=k}^{n-1} A_i^c\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=k}^{n-1} A_i^c\right)\right)}{P\left(\bigcap_{i=k}^{n-1} A_i^c\right)} \end{aligned}$$

با توجه به استقلال  $A_n$  ها داریم:

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\prod_{i=k}^{n-1} P(A_i^c) P(A_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} P(A_i^c)}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \right\rangle$$

پس  $\sum P(A_n) = \infty$  و در نتیجه طبق لم بورل

کاتلی  $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$

ب) برای اثبات شرط لازم در

$$P(\lim_n \sup A_n) = 1$$

کافیت از برهان خلف استفاده کنیم. یعنی:

$$\sum P(AA_n) < \infty \Rightarrow \sum P(A \cap A_n \text{ i.o.}) = 0$$

$$\Rightarrow P(\lim_n \inf (A_n \cap A_n)^c) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} (A \cap A_k)^c\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(A^c \cup \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)\right) = 1$$

$$\leq P(A^c) + \lim_n P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right)$$

$$\Rightarrow 1 - P(A^c) \leq \lim_n P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right)$$

$$\Rightarrow P(A) \leq \lim_n \prod_{k \geq n} (1 - P(A_k^c))$$

حل: اگر  $1 \equiv P\left(\bigcup_n A_n\right)$ ؛ آن‌گاه با توجه به پیوستگی تابع  $P$  داریم:

$$P(A_n \text{ i.o.}) = P\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

و

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1$$

از طرفی  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq P\left(\bigcup_{i \geq n} A_i\right)$  پس:

$$1 \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i \geq n} A_i\right) = 1.$$

مثال (۱۳): [۵] اگر  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid باشد که تقریباً مطمئن ثابت نباشد، آن‌گاه:

$$P(X_n \text{ همگرا باشد}) = 0$$

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. پس طبق قانون

۱ - کولموگروف در مورد متغیرهای تصادفی مستقل

$1 = P(X_n \text{ همگرا باشد})$  از طرفی چون  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  ها

به طور مطمئن ثابت نیستند، پس مجموعه‌ی  $N$  ی

وجود دارد که  $P(N) = 0$  و  $\{w : X_n(w) = \text{ثابت}\}$

در مجموعه‌ی  $N$ ،  $X_n$  ها ثابتند پس همگرا هستند ولی

احتمال همگرایی آنها صفر است که خلاف فرض است.

مثال (۱۴): [۳] اگر  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از متغیرهای

تصادفی مستقل با تابع توزیع  $\{F_n\}$  باشد، آن‌گاه:

$$P\left(\lim_n X_n = 0\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_n \{1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)\} < \infty$$

حل: با توجه به استقلال متغیرها، کفایت ثابت کنیم:

$$\sum_n \{1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)\} = \sum_n P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < \infty$$

$$\leq \lim_n \exp\left\{-\sum_{k \geq n} P(A_k)\right\}$$

$$\Rightarrow \sum P(A_k) < \infty$$

طبق لم بورل کانتلی داریم:

$$\Rightarrow P\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

که فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

برای اثبات شرط کافی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(AA_n) = \infty$$

$$\Rightarrow \infty = \sum P(A \cap A_n) < \sum P(A_n)$$

$$\Rightarrow \sum P(A_n) < \infty$$

$$\Rightarrow P(A_n \text{ i.o.}) = 1 \text{ (لم بورل کانتلی)}$$

مثال (۱۱): [۵] اگر  $P(A_n) \geq \varepsilon > 0$  آن‌گاه

$$P(A_n \text{ i.o.}) \geq \varepsilon$$

حل:

$$P(A_n) \geq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

با گرفتن حد از طرفین داریم:

$$\Rightarrow \varepsilon \leq \lim_n \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A_n \text{ i.o.})$$

مثال (۱۲): [۵] اگر  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای از پیشامدهای

مستقل با  $P(A_n) < 1 \quad \forall n \geq 1$ ، آن‌گاه:

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

مثال (۱۵): [۳] اگر  $\sum_n P(|X_n| > n) < \infty$  آن گاه به  
 طور تقریباً مطمئن خواهیم داشت:

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 0$$

$$\limsup_n \frac{|X_n|}{n} \leq 1$$

حل: با توجه به قضیه‌ی احتمال کل داریم:

حل: با توجه به لم بورل کانتلی داریم:

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n P(A_n A_{n+1}) + \sum_n P(A_n A_{n+1}^c)$$

$$P\left(\limsup_n |X_n| > n\right) = 0$$

و چون  $c$  عددی ثابت است):

$$\Rightarrow P\left(\limsup_n \frac{|X_n|}{n} > 1\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(A_n \cap A_{n+1}^c)}{P(A_n \cap A_{n+1})} = c$$

$$\Rightarrow P\left(\liminf_n \frac{|X_n|}{n} \leq 1\right) = 1$$

طبق آزمون مقایسه‌ی سریها و فرض مسأله

پس  $N_0$  ی وجود دارد که برای تمام  $n$  های بزرگ‌تر از  
 $N_0$ ،  $\frac{|X_n|}{n} \leq 1$  با احتمال یک رخ می‌دهند.

$\sum_n P(A_n) < \infty$  پس  $\sum_n P(A_n A_{n+1}) < \infty$  و در

مثال (۱۶): [۴] برای هر دنباله از پیشامدهای

نتیجه طبق لم بورل کانتلی  $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$

که  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  و  $P(A_n) \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$

## مراجع

- [1] Billingsley P. 1995, *Probability and Measure, 3rd ed.*, John Wiley and Sons, New York.
- [2] Bremaud, P., 1998, *Markov Chains*, Springer-Verlag, New York.
- [3] Chung Kai Lai, 1974 *A Course in Probability Theory, 2nd ed.*, Academic Press inc.
- [4] Laha R.G. and Rohatgi V.K., 1979, *Probability Theory*, John Wiley, New York.
- [5] Resnick S.I., 1998, *A Probability Path*, Birkhduser.
- [6] Varadhan S.R.S., 2000, *Probability Theory*.