برآوردگر بیزی پارامتر توزیع پارتو

شبنم رضازاده موسوی [۱] حسن صادقی [۲]

چکیده:

در این مقاله هدف یافتن برآوردگرهای بیزی پارامتر توزیع پارتو برای توابع چگالی پیشین مختلف و تحت برخی توابع زیان متقارن و نامتقارن است. در مرجع [۵] برآوردگرهای بیزی توزیع برای توابع چگالی پیشین مزدوج و فاقد اطلاع تحت توابع زیان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله علاوه بر این بررسی، برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان درجه دوم وزنی برای توابع چگالی فوق و هم‌چنین برای تابع چگالی پیشین ناسره، تحت توابع زیان مختلف محاسبه شده اند.

واژه‌های کلیدی: توزیع پارتو، برآوردگر بیزی، تابع زیان، توزیع پیشین، پیشین مزدوج، پیشین فاقد اطلاع.

۱ مقدمه

توزیع پارتو توسط ویلفرد پارتو [۳] معرفی گردید. این توزیع که در مدل بندی درآمد یک جمعیت به کار می‌رود، اخیراً توجه زیادی به توزیع آماری کمیت‌های اقتصادی ـ اجتماعی مشخصی همانند درآمدهای شخصی، دارائی شرکت‌ها، ابعاد شهرها و تعداد شرکت‌ها در صنایع گوناگون شده است. برخی محققین معتقدند که توزیع پارتو در میان توزیع‌های انتخاب شده برای توصیف این نوع کمیت‌ها بیشترین وجه تمایز را دارد.

در این مقاله، برآوردگر بیزی پارامتر توزیع پارتو با تابع چگالی احتمال زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

$$f(x|\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)} & 1\leq x\leq\infty\ ,\quad \theta>0\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\qquad (1)$$

که در آن θ پارامتر توزیع می باشد.

کوانت [۴] پارامتر این توزیع را با استفاده از روش‌های کلاسیک معروفی همانند روش های کمترین مربعات، درستنمایی ماکزیمم و گشتاوری مطالعه کرد و نشان داد که همه این برآوردگرها سازگارند. هم‌چنین برآورد با آماره‌های ترتیبی توسط مالیک [۳] مطالعه شده است. در این مقاله پارامتر θ با استفاده از رهیافت بیزی برآورد می‌شود.

تفاوت اساسی بین فلسفه برآورد بیزی و کلاسیک این است که در برآورد بیزی پارامتر توزیع همانند یک متغیر تصادفی است، در حالی که در برآورد کلاسیک، پارامتر همانند یک نقطه ثابت در نظر گرفته می‌شود. هرگاه اطلاعات اضافی درباره پارامتر قابل دسترسی باشد رهیافت بیزی بهتر از روش کلاسیک برای نمونه با حجم کوچک می‌باشد. تا کنون برآوردگرهای بیزی بر اساس تابع زیان متقارن در نظر گرفته شده‌اند، اما در بعضی

---

[۱] دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد
[۲] دانشگاه فردوسی مشهد
[۳] Vilferdo Pareto

موقعیت‌های زندگی واقعی استفاده از توابع زیان متقارن ممکن است نامناسب باشد. هم‌چنین دربعضی موارد خطای مثبت داده شده ممکن است بسیار جدی تر از خطای منفی داده شده باشد و برعکس. در آن گونه موارد می‌توان از تابع زیان نامتقارن استفاده کرد.

۲ محاسبه برآوردگر بیزی

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ یک نمونه تصادفی با حجم n چگالی پارتو (۱) باشد. می‌خواهیم برآوردگرهای بیزی پارامتر توزیع پارتو را برای انواع مختلف چگالی پیشین تحت برخی توابع زیان متقارن و نامتقارن به دست آوریم.

توابع زیان مورد نظر عبارتند از:

A) تابع زیان مربع خطا: $L(\theta, d) = (d-\theta)^2$

B) تابع زیان درجه دوم: $L(\theta, d) = (\frac{d-\theta}{\theta})^2$

C) تابع زیان خطی نمایی:

$$L(\theta, d) = k[e^{c(d-\theta)} - c(d-\theta) - 1]$$

D) تابع زیان خطی تعمیم یافته:

$$L(\theta, d) = w[(\frac{d}{\theta})^c - c\ln(\frac{d}{\theta}) - 1],\ k > 0, c \neq 0$$

E) تابع زیان ۰ و ۱:

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \mid d-\theta \mid < \delta \\ 1 & \mid d-\theta \mid \geq \delta \end{cases}$$

و یا F):

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \delta_1 < d-\theta < \delta_2 \\ 1 & d-\theta \leq \delta_1 \\ 1 & d-\theta \geq \delta_2 \end{cases}$$

که در آن δ کمیتی مثبت و معلوم و δ_1 و δ_2 کمیت‌های کوچک، معلوم و مثبتی هستند.

توابع زیان (C)، (D) و (F) نامتقارن و (A)، (B) و (E) متقارن می‌باشند. منظور از تقارن این توابع، تقارن نسبت به پارامتر θ است. نتایج اصلی این مقاله در قضایای زیر آمده است:

فرض کنید در تمامی قضایای زیر $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$، n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی (۱) باشند. چون برهان قضایای زیر مشابه است، لذا فقط برهان قضیه (۱) و (۲) را با استفاده از [۷] بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. اگر θ یافته یک Θ باشد که دارای چگالی پیشین مزدوج گاما با پارامترهای α و β $(\alpha > 0, \beta > 0)$ است. آن‌گاه برآوردگر بیزی θ

الف — تحت تابع زیان (A) به صورت

$$d_b(x) = \left(\frac{n+\alpha}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right)$$

ب — تحت تابع زیان (B) با شرط $n+\alpha > 2$ به صورت

$$d_b(x) = \left(\frac{n+\alpha-2}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right)$$

پ — تحت تابع زیان (C) به صورت

$$d_b(x) = \left(\frac{n+\alpha}{c}\right) \ln\left(1 + (\frac{c}{\beta + \sum_i \ln X_i}\right)$$

می باشد، (که در آن $c > -(\beta + \sum_i \ln X_i)$).

ت — تحت تابع زیان (D) با شرط $c < n+\alpha$

$$d_b(x) = \frac{\left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha-c)}\right]^{\frac{1}{c}}}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

برهان الف — بنا به فرض، توزیع θ عبارتست از:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{(\alpha-1)} e^{-\beta\theta} \quad , \quad \theta > 0 \, , \, \alpha \, , \, \beta > 0$$

لذا توزیع پسین θ بر اساس نمونه تصادفی $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ برابر می‌شود با:

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{\left(\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^{(n+\alpha)}}{\Gamma(n+\alpha)} \times \theta^{(n+\alpha-1)} \exp\{-(\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i)\theta\}; \; \theta > 0$$

یعنی:

$$\Theta|x \sim \Gamma((n+\alpha), (\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i)) \qquad (۲)$$

تحت تابع زیان (A) فوق، برآوردگر بیزی θ عبارتست از میانگین توزیع پسین (۲). یعنی

$$E(\Theta|x) = \frac{n+\alpha}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i} \qquad (۳)$$

لازم به ذکر است که نمای توزیع این توزیع پسین عبارت است از:

$$M_0 = \frac{n+\alpha-1}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i} \qquad (۴)$$

و تابع مولد گشتاور آن برابر:

$$E(e^{t\theta}|x) = \left(1 - \frac{t}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}\right)^{-(n+\alpha)} \qquad (۵)$$

می‌باشد، مشروط بر اینکه $t < (\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i)$.

برهان ب — تحت تابع زیان (B)، برآوردگر بیزی θ برابر است با [۶]:

$$d_b(x) = \frac{E(\frac{1}{\theta} \mid X = x)}{E(\frac{1}{\theta^2} \mid X = x)} \qquad (۶)$$

که پس از جایگذاری مقادیر $E(\frac{1}{\theta} \mid X = x)$ و $E(\frac{1}{\theta^2} \mid X = x)$، (با شرط $n + \alpha > 2$) داریم:

$$\Longrightarrow d_b(x) = -\frac{n+\alpha-2}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

برهان پ — تحت تابع زیان (C) برآوردگر بیزی θ برابر است با:

$$d_b(x) = -\frac{1}{c} \ln\left(E(e^{-c\theta} \mid X = x)\right) \qquad (۷)$$

لذا با قرار دادن $t = c$– در رابطه (۵) داریم:

$$E(e^{-c\theta} \mid x) = \left(1 + \frac{c}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right)^{-(n+\alpha)}$$

و لذا با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۶) داریم:

$$d_b(x) = \frac{n+\alpha}{c} \ln\left(1 + \frac{c}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right)$$

که هرگاه $c > -(\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i)$ باشد، معتبر است.

برهان ت — تحت تابع زیان (D) برآوردگر بیزی θ برابر $d_b(x) = [E(\theta^{-c} \mid x)]^{-\frac{1}{c}}$ خواهد بود. اما با توجه به توزیع پسین (۲) و شرط $c < n + \alpha$ داریم:

$$\Longrightarrow E(\theta^{-c} \mid x) = \frac{\Gamma(n+\alpha-c)}{\Gamma(n+\alpha)} \left(\beta + \sum_{i}^{n} \ln x_i\right)^{c}$$

از این رو برآوردگر بیزی θ برابر است با:

$$\Longrightarrow d_b(x) = \frac{\left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha-c)}\right]^{\frac{1}{c}}}{\beta + \sum_{i=1}^{n} lnX_i}$$

قضیه ۲. اگر θ یافته Θ با مفروضات قضیه (۱) و چگالی پسین Θ در بازه I به طول 2δ تک نما و در این

بازه نسبت به میانه.بازه متقارن (تقارن موضعی) باشد، آنگاه برآوردگر بیزی θ

ج — تحت تابع زیان (E) با شرط $n+\alpha > ۱$

$$d_b(x) = \frac{n+\alpha-۱}{\beta+\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}$$

چ — تحت تابع زیان (F) با شرط $n+\alpha > ۱$

$$d_b(x) = \frac{n+\alpha-۱}{\beta+\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}$$

خواهد بود.

برهان ج ـ با توجه به نتیجه سوم قضیه ۱ در [۱ و ۲] که بیان می‌کند:

نتیجه — فرض کنید، Θ دارای تابع چگالی $\pi(\theta \mid x)$ و X یک متغیر تصادفی است با توزیع P_θ پیروی می‌کند. در این صورت تحت تابع زیان (E)، برآوردگر بیزی θ عبارتست از نقطه میانی بازه I ای به طول ۲δ، که ماکزیمم کننده $P(\Theta \in I)$ است.

در اینجا $I = (d-\delta, d+\delta)$ است. پس بنا به فرض قضیه، نمای توزیع پسین (۲) که مینیمم کننده تابع مخاطره زیر است:

$$\begin{aligned} r(x,d(x)) &= \int_{\circ}^{d(x)-\delta}\pi(\theta \mid x)d\theta \\ &+ \int_{d(x)+\delta}^{\infty}\pi(\theta \mid x)d\theta \\ &= ۱-\int_{d(x)-\delta}^{d(x)+\delta}\pi(\theta \mid x)d\theta \\ &= ۱-P(\Theta \in I) \end{aligned}$$

همان نقطه‌ای است که نقطه میانی بازه I بوده و ماکزیمم کننده $P(\Theta \in I)$ خواهد بود. طبق نتیجه فوق برآوردگر بیزی θ تحت تابع زیان (E) می‌باشد.

لذا با استفاده از رابطه (۴) نمای توزیع پسین عبارتست از:

$$d_b(x) = \frac{n+\alpha-۱}{\beta+\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}$$

که با شرط $(n+\alpha > ۱)$ برقرار خواهد بود.

برهان چ— برای اثبات قسمت «چ» کافی است که بازه I را در نتیجه فوق با شرط $(\delta_۱ > \delta_۲)$ به صورت $I = (d-\delta_۱, d+\delta_۲)$ در نظر بگیرید، در این صورت $۲\delta = \delta_۱ - \delta_۲$.

پس بر اساس فرض قضیه و نتیجه فوق، برآوردگر بیزی θ تحت تابع زیان (F)، نمای توزیع پسین (۲) به علاوه میانگین دو کمیت کوچک معلوم $\delta_۱$ و $\delta_۲$ است. در نتیجه با استفاده از رابطه (۴) برآوردگر بیزی θ با شرط $(n+\alpha) > ۱$ عبارتست از:

$$d_b(x) = \frac{n+\alpha-۱}{\beta+\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}$$

قضیه ۳. اگر θ دارای چگالی پیشین ناسره $(\pi(\theta) = \theta e^{\theta}; \theta > \circ)$ باشد. آن‌گاه برآوردگر بیزی θ

الف — تحت تابع زیان (A)

$$d_b(x) = \frac{n+۲}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i - ۱}$$

ب — تحت تابع زیان (B)

$$d_b(x) = \frac{n}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i - ۱}$$

پ– تحت تابع زیان (C)

$$d_b(x)=\frac{n+2}{c}\ln\left(1+\frac{c}{\sum_i \ln X_i - 1}\right)$$

هرگاه $c > -((\sum_i \ln x_i)+1)$.

ت – تحت تابع زیان (D) با شرط $c < n+2$

$$d_b(x)=\frac{\left[\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-c+2)}\right]^{\frac{1}{c}}}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - 1}$$

با توجه به (٦) در قضیه فوق و با شرط اضافی، تک نما بودن چگالی پسین در بازه I به طول 2δ و متقارن بودن در بازه مذکور (تقارن موضعی) نسبت به میانه این بازه داریم:

برآوردگر بیزی θ

ج – تحت تابع زیان (E) عبارتست از:

$$d_b(x)=\frac{n+1}{(\sum_{i=1}^{n} lnX_i)-1}$$

با شرط $((\sum_i \ln x_i) > 1)$.

چ – تحت تابع زیان (F) به صورت:

$$d_b(x)=\frac{n+1}{(\sum_{i=1}^{n} lnX_i)-1}+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$$

با شرط $(\sum_i lnx_i) > 1$، خواهد بود.

قضیه ۴. اگر θ دارای چگالی پیشین فاقد اطلاع $(\pi(\theta)\propto \frac{1}{\theta};\theta>0)$ باشد. آن‌گاه برآوردگر بیزی θ

الف – تحت تابع زیان (A) به صورت

$$d_b(x)=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

ب – تحت تابع زیان (B) با شرط $n > 2$ به صورت

$$d_b(x)=\frac{n-2}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

پ – تحت تابع زیان (C) به صورت

$$d_b(x)=\frac{n}{c}\ln\left(1+\frac{c}{\sum_i \ln X_i}\right)$$

(و هر گاه $c > -\sum_i ln\, x_i$ باشد.)

ت – تحت تابع زیان (D) با شرط $c < n$

$$d_b(x)=\frac{\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-c)}\right]^{\frac{1}{c}}}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

خواهد بود.

در قضیه فوق با شرط اضافی، تک نما بودن چگالی پسین در بازه I به طول 2δ و متقارن بودن در بازه مذکور (تقارن موضعی) نسبت به میانه این بازه داریم:

برآوردگر بیزی θ

ج – تحت تابع زیان (E) به صورت

$$d_b(x)=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

چ – تحت تابع زیان (F) به صورت

$$d_b(x)=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$$

خواهد بود.

۳ نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی برآوردگرهای بیزی توزیع پارتو تک پارامتری برای توزیع پیشین فاقد اطلاع، ناسره و مزدوج تحت توابع زیان مختلف پرداخته شده است. مهمترین مؤلفه روش بیزی تعیین تابع توزیع پیشین روی فضای پارامتر است.

یک چگالی پیشین مناسب برای مسأله تحت بررسی، توزیع پیشین مزدوج زیر است:

$$\pi(\theta) \propto e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-۱};\ \alpha,\beta \geq ۰,\theta \geq ۰$$

که عضوی از خانواده توزیع های گاما است. مزیت در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین، مزدوج در این است که تابع درستنمایی $L(\theta \mid x)$، چگالی پیشین $\pi(\theta)$ و چگالی پسین $\pi(\theta \mid x)$ همگی شکل تابعی مشابهی دارند و از این رو، انعطاف پذیری را تضمین می‌کنند. برای حالت خاص $\alpha = \beta = ۰$، زیر کلاسی از چگالی پیشین مفروض یعنی $\pi(\theta) \propto \frac{۱}{\theta}$ را داریم، که تابع چگالی یکنواخت است و این شکل خاص دقیقاً توزیع پیشین ارائه شده توسط جفریز[۸] می‌باشد و زمانی به کار می‌رود که هیچ اطلاعی در مورد θ نداشته باشیم. برای توزیع پارتو تک پارامتری (۱) و تحت چگالی‌های پیشین فاقد اطلاع، ناسره و مزدوج توزیع پسین از خانواده گاما می‌باشد و اگر به طور کلی داشته باشیم:

$$\theta \mid x \sim \Gamma(\nu,\gamma)$$

آن‌گاه برآوردگرهای بیزی توزیع پارتو فوق برای توابع زیان مختلف و تحت توزیع‌های پیشین فوق به صورت زیر می‌باشد:

۱– برای تابع زیان مربع خطا

$$L(\theta,d) = (d-\theta)^{۲}$$

برآوردگر بیزی θ عبارتست از «میانگین توزیع پسین» یعنی:

$$d_b(x) = \frac{\nu}{\gamma}$$

۲ – برای تابع زیان درجه دوم

$$L(\theta,d) = \left(\frac{d-\theta}{\theta}\right)^{۲}$$

برآوردگر بیزی θ عبارتست از:

$$d_b(x) = \frac{\nu-۲}{\gamma} \quad \nu > ۲$$

۳ – برای تابع زیان خطی نمایی

$$L(\theta,d) = k[e^{c(d-\theta)} - c(d-\theta) - ۱]; k > ۰, c \neq ۰$$

برآوردگر بیزی θ عبارتست از:

$$d_b(x) = \frac{\nu}{c}\ln(۱+\frac{c}{\gamma})$$

هرگاه $c > -\gamma$ باشد.

۴– برای تابع زیان خطی نمایی تعمیم یافته

$$L(\theta,d) = w\left[(\frac{d}{\theta})^{c} - c\ln(\frac{d}{\theta}) - ۱\right]; c \neq ۰, w > ۰$$

برآوردگر بیزی θ عبارتست از:

$$d_b(x) = \frac{\left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-c)}\right)^{\frac{۱}{c}}}{\gamma} \quad c < \nu$$

با توجه به (٦) و با شرط اضافی، تک نما بودن چگالی پسین در بازه به طول ۲δ و متقارن بودن در بازه مذکور (تقارن موضعی) نسبت به میانه این بازه داریم:

۵ — برای تابع زیان صفر — یک

$$L(\theta,d)=\begin{cases} \circ & |d-\theta|<\delta \\ \text{۱} & |d-\theta|\geq\delta \end{cases}$$

که در آن δ کمیتی کوچک مثبت و معلومی است.

برآوردگر بیزی θ عبارتست از «نمای توزیع پسین» یعنی:

$$d_b(x)=\frac{\nu-\text{۱}}{\gamma}$$

۶ — برای تابع زیان صفر — یک

$$L(\theta,d)=\begin{cases} \circ & \delta_{\text{۱}}<d-\theta<\delta_{\text{۲}} \\ \text{۱} & d-\theta\leq\delta_{\text{۱}} \\ \text{۱} & d-\theta\geq\delta_{\text{۲}} \end{cases}$$

که در آن $\delta_{\text{۱}}$ و $\delta_{\text{۲}}$ کمیت‌های کوچک معلوم مثبتی هستند.

برآوردگرهای بیزی θ عبارتست از:

نمای توزیع پسین به علاوه میانگین دو کمیت کوچک معلوم $\delta_{\text{۱}}$ و $\delta_{\text{۲}}$. یعنی:

$$d_b(x)=\frac{\nu-\text{۱}}{\gamma}+\frac{\delta_{\text{۱}}+\delta_{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

باید توجه کرد که برای توزیع پارتو (۱) برآوردگرهای بیزی به دست آمده تحت توزیع‌های پیشین ناسره، فاقد اطلاع و مزدوج برای توابع زیان QLF و MLINEX همان برآوردگر مینیماکس می‌باشند و برای دیگر توابع زیان فوق برآوردگر مینیماکس وجود ندارد.

مراجع

[1] Lehmann, E.L., 1983, *Theory of Point Estimation,* John Wiley & Sons, Inc, New York.

[2] Lehmann, E.L., Cassella, G., 1998, *Theory of point Estimation, 2ed.*, Springer - Verlag, Inc., New York.

[3] Malik, H.J., 1970, Estimation of the parameters of the Pareto distribution, *Metrika,* 15, 19-22

[4] Quandt, R.E., 1966. “Old and new methods of the estimation and the Pareto distribution” , Metrika, Vol.10, 55-82.

[5] Roy M.K. and Podder, C.K., 2000, Bayesian Estimation of the parameter of Pareto distribution,*Jahangirnagar University Journal of Science,* 22 & 23. 271-280.

[6] Zacks, S., 1971, *The Theory of Statistical Inference*, John Wiley & Sons Inc. , New York.

[7] Zellner, A., 1986, Bayesian estimation and prediction using asymetric loss functions,*J. Amer. Statist. Asso.,* 81, 446-451.

[8] Jeffreys, H. 1961, *Theorey of Probability, 3rd ed.*, Oxford University Press, London.