اندازه و انتساب نمونه در نمونه‌گیریهای طبقه‌بندی شده با بیش از یک متغیر کمکی

عباس گرامی [۱]

چکیده:

نمونه‌گیری طبقه‌بندی شده یکی از روش‌های پایه‌ای در آمارگیری‌های کاربردی است. در این روش نمونه‌گیری وقتی یک متغیر طبقه‌بندی کننده وجود داشته باشد، اندازه نمونه براساس ملاحظاتی نظیر واریانس متغیر، دقت مورد نظر، حد هزینه قابل تخصیص و اطمینان مورد دلخواه برآورد می‌شود. در صورتی که بیش از یک متغیر کمکی وجود داشته باشد، برآورد اندازه نمونه به مراتب مشکل‌تر می‌شود. هم‌چنین انتساب نمونه‌ها به طبقات در صورت وجود یک متغیر طبقه‌بندی کننده صورت‌های ساده‌ای دارد. اما با وجود بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده، استفاده از این صورت‌های ساده یا ممکن نیست و اگر ممکن هم باشد لزوماً طبقه‌بندی های کارآیی ارایه نمی‌کنند. در این مقاله در شرایط وجود بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده، ابتدا تعداد نمونه مورد نیاز بررسی شده و سپس به نحوه انتساب نمونه‌ها به طبقات پرداخته شده است. در نهایت روش‌های مختلف مورد مقایسه قرار گرفته و نتیجه‌گیری شده است که برخی روش‌های انتساب از دیدگاه معیار انتخاب شده همیشه بهتر از برخی دیگر هستند.

۱ مقدمه

از ارکان مهم روش نمونه‌گیری طبقه‌بندی شده، تعداد طبقات، مرز طبقات، اندازه نمونه و انتساب نمونه به طبقات است. ساده‌ترین حالت زمانی است که تنها یک متغیر طبقه‌بندی کننده برای تعیین این ارکان وجود دارد. در عمده منابع کلاسیک توصیه‌ها و پیشنهادات محدود به این حالت خاص است (به عنوان مثال ککران [٦] را ببینید). اما در بسیاری از موارد در عمل بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده وجود دارد که می‌توان از آنها استفاده کرد که در این صورت این امر موجب افزایش کارآیی طرح در مقایسه با استفاده از تنها یک متغیر کمکی می شود.

گرامی و همکاران [۲] نحوه تعیین تعداد و مرز طبقات در نمونه‌گیری‌های طبقه‌بندی شده شامل چند متغیر طبقه‌بندی کننده را بر اساس ادبیات موجود مورد بحث و بررسی قرار داده و دشواری‌ها و مشکلات آن را در مقایسه با حالت یک متغیره بیان کرده‌اند. دراین نمونه‌گیری‌ها تعداد نمونه و انتساب آن به طبقات نیز مشکلات خاص خود را دارد. مقاله حاضر براساس ادبیات موجود و ارائه چند پیشنهاد جدید به دو مقوله اخیر می‌پردازد.

[۱] دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

۲ اندازه نمونه

در نمونه‌گیری‌های طبقه‌بندی شده با یک متغیر طبقه‌بندی کننده با توجه به امکانات و انتظارات محقق، اندازه نمونه به طریق ساده برآورد می‌شود (به عنوان مثال ککران [٦] را ببینید). متأسفانه نحوه تعیین اندازه نمونه در نمونه‌گیری‌های طبقه‌بندی شده با وجود بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده به سادگی حالت یک متغیره نیست. به این دلیل که در حالت بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده، معیار دقت توافق شده برای تعیین اندازه نمونه وجود ندارد. پیشنهادات ارائه شده در این خصوص به دو بخش بکارگیری یک یا بیش از یک متغیر از بین متغیرهای طبقه‌بندی کننده تقسیم می شود.

۱.۲ استفاده از یک متغیر

در صورتی که چندین متغیر طبقه‌بندی کننده وجود داشته باشد، با توجه به ملاحظات زیر می‌توان از بین آنها تنها یکی را انتخاب کرده و بوسیله آن به روش های مناسب طبقات را ساخت (به‌عنوان مثال به گرامی و همکاران، [۲] مراجعه شود).

۱) مهمترین متغیر با توجه به اهداف آمارگیری.

۲) متغیر با بیشترین تغییرات مطلق (واریانس) یا نسبی (ضریب تغییرات).

۳) نخستین مولفه اصلی متغیرهای طبقه‌بندی کننده.

۲.۲ استفاده از چند متغیر

گرایش بر این است که استفاده از چند متغیر طبقه‌بندی کننده موجب افزایش کارآیی طرح نمونه‌گیری و افزایش دقت برآوردها می‌شود. در زیر به چند روش استفاده از چند متغیر طبقه‌بندی کننده پرداخته می‌شود.

۱) محاسبه تعداد نمونه براساس هریک از متغیرهای طبقه‌بندی کننده براساس فرمول‌های متعارف و کلاسیک و انتخاب بیشترین تعداد نمونه از بین تعداد نمونه‌های انتخاب شده. یعنی اگر m_i اندازه نمونه محاسبه شده براساس متغیر طبقه‌بندی کننده i ام باشد و متغیر طبقه‌بندی کننده وجود داشته باشد اندازه نمونه، n، برابر است با:

$$n = \max_{1 \le i \le p} m_i$$

استفاده از اندازه نمونه بدست آمده بر اساس این پیشنهاد، یک حداقل از دقت مورد نظر برای برآورد پارامترها تامین می‌گردد.

۲) محاسبه اندازه نمونه براساس متوسط m_i های محاسبه شده در بند بالا. یعنی

$$n = \bar{m} = \frac{1}{p} \sum_{1}^{p} m_i$$

براساس این پیشنهاد، سطح متوسطی از دقت‌های مورد نظر تأمین می‌شود اما میزان دقیق آن قابل محاسبه نیست.

۳) محاسبه تعداد نمونه براساس حداقل دو مؤلفه اصلی مهم از متغیرهای طبقه‌بندی کننده و بکارگیری پیشنهاد بند ۱ یا ۲ فوق.

در این پیشنهاد نمی‌توان سطح مشخصی از دقت را تضمین کرد.

۳ نحوه انتساب نمونه به طبقات

بر اساس یک اندازه نمونه مشخص، n، نحوه انتساب آن به طبقات را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت اول وقتی است که تنها یک متغیر طبقه‌بندی کننده وجود داشته باشد. حالت دوم معطوف به شرایطی است که بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده وجود داشته باشد.

۱.۳ نحوه انتساب با یک متغیر طبقه‌بندی کننده

در این حالت سه پیشنهاد وجود دارد که در زیر معرفی می‌شوند.

۱.۱.۳ انتساب متناسب

این طریقه انتساب، یکی از ساده‌ترین انواع انتساب بوده و پس از تعیین اندازه کل نمونه، اندازه نمونه طبقه h ام، n_h، از رابطه $n_h = n.N_h/N$ بدست می‌آید که در آن N_h تعداد افراد جامعه در طبقه h ام و $N = \sum_1^H N_h$ تعداد کل افراد جامعه است.

در شرایطی که واریانس طبقات با هم مساوی باشند این نوع انتساب نمونه از ویژگی بهینه برخورداراست.

۲.۱.۳ انتساب مساوی

در این روش انتساب اندازه کل نمونه به طور مساوی بین طبقات تقسیم می شود، یعنی $n_h = n/H$. که H تعداد طبقات می‌باشد.

مزیت این روش ساده بودن آن است. در صورتی که واریانس طبقات با هم برابر باشند و اندازه طبقات نیز با یکدیگر برابر باشند این انتساب از ویژگی بهینه برخوردار است. در غیر این صورت به جز ساده بودن آن و نیاز نداشتن به اطلاعات طبقات، از خواص مطلوب دیگری برخوردار نیست.

۳.۱.۳ انتساب بهینه

این نحوه انتساب که موجب حداقل شدن واریانس برآوردگرهای مربوط به میانگین یا جمع کل صفت مورد بررسی می‌شود به انتساب بهینه معروف است. فرمول این انتساب به صورت زیر است:

$$n_h = n \times \frac{N_h S_h/\sqrt{c_h}}{\sum_i N_i S_i/\sqrt{c_i}}$$

که در آن c_i و s_i به ترتیب هزینه نمونه‌گیری هر واحد و جذر واریانس صفت مورد بررسی برای طبقه i ام است. بدیهی است در صورتی که c_i برای همه طبقات مساوی باشد این فرمول شکل ساده‌تری پیدا می‌کند.

۲.۳ نحوه انتساب با بیش از یک متغیر طبقه‌بندی کننده

از بین روش های انتساب ذکر شده در فوق دو انتساب مساوی و متناسب به نوع و تعداد متغیرهای طبقه‌بندی کننده بستگی نداشتند. بنابراین، دو طریق انتساب در این حالت نیز قابل طرح هستند. اما بجز سادگی، ویژگی بارزی برای آن ها قابل ذکر نیست. از طرفی انتساب بهینه از لحاظ یک متغیر طبقه‌بندی کننده، درحالت کلی بهترین نوع انتساب برای سایر متغیرهای طبقه‌بندی کننده نمی‌باشد. بنابراین در این قبیل آمارگیری‌ها باید از یک توافق استفاده کرد. دراین راستا اولین قدم آن است که از بین کلیه متغیرهای کمکی تنها تعداد کمی متغیر که مهم به حساب می‌آیند انتخاب شوند. در صورتی که داده‌های خوبی از قبل در اختیار باشد، بر اساس هر یک از این

متغیرهای کمکی مهم، انتساب بهینه به صورت جداگانه انجام می‌شود و بررسی می‌گردد که چقدر نتایج در توافق با یکدیگرند. در آمارگیری‌های تخصصی، معمولاً بین این متغیرها همبستگی قابل توجهی وجود دارد و در انتساب براساس متغیرهای مختلف ممکن است تفاوت اندکی وجود داشته باشد. در شرایطی که انتساب نمونه براساس هر یک از این متغیرها بسیار متفاوت از دیگری باشند رسیدن به یک توافق دشوار خواهد بود.

نیمن [۱۳]، پیتر و بوچر [۱۴]، گری [۹]، دالینیوس [۷]، ککران [۶]، گوش [۱۰]، یتس [۱۶]، فولکز و آنتل [۸]، چترجی [۴]، کوکان و خان [۱۲]، چرمی [۵]، اسچیتکوفسکی [۱۵]، بتل [۳] و خان و همکاران [۱۱] از جمله افرادی بوده‌اند که این مورد را بررسی کرده و برخی روش‌های جدید ارائه داده‌اند که در ذیل برخی از این روش‌ها توضیح داده شده و مورد مقایسه قرار می‌گیرند. علاقمندان می‌توانند برای جزئیات بیشتر در مورد این روش ها به عرفانی [۱] مراجعه کنند.

۱.۲.۳ روش انتساب چترجی

چترجی [۴] دو روش را برای انتساب اندازه نمونه به طبقات مورد توجه قرار می‌دهد. یکی از این روش‌ها با فرض یکسان بودن هزینه آمارگیری برای واحدهای کلیه طبقات و دیگری با در نظر گرفتن هزینه متفاوت آمارگیری برای واحدهای از طبقات متفاوت می‌باشد.

چترجی برای حالتی که انتساب غیر بهینه با هزینه ثابت بکار می‌رود، انتساب توافقی به طبقات را به روش می‌نیمم کردن مجموع افزایش نسبی E_j ها در واریانس برآوردهای $\bar{y}_j$ برای $\bar{Y}_j$ پیشنهاد می‌کند که $\bar{y}_j$ برآورد میانگین حاصل از طبقه‌بندی برحسب متغیر j ام است و $\bar{Y}_j$ میانگین واقعی متغیر j ام می‌باشد. فرمول E_j به قرار زیر است:

$$E_j = \frac{1}{C}\sum_{h=1}^{H}\frac{c_h\left(n^*_{hj}-n_h\right)^2}{n_h}$$

در رابطه فوق، c_h هزینه آمارگیری از هر واحد در طبقه h ام و n^*_{hj} نشان دهنده تعداد نمونه در انتساب بهینه معمول براساس متغیرکمکی j ام در طبقه h ام با هزینه کل ثابت C است. در واقع چترجی [۴] مسئله را به شکل می‌نیمم کردن $E = \sum_{j=1}^{p} E_j$ نسبت به هزینه کل ثابت $C = \sum_{h=1}^{H} c_h n_h$ مطرح می‌کند، که در آن p تعداد متغیرهایی است که برای هر واحد نمونه اندازه‌گیری می‌شود.

بدین منظور ضرایب غیر معین لاگرانژ برای بدست آوردن جواب بکار برده می‌شود. در صورتی که جوابهای بدست آمده برای تعداد نمونه در داخل هر طبقه یک عدد صحیح نباشد جواب ها به نزدیکترین اعداد صحیح گرد می‌شوند.

انتساب نمونه به طبقات از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$n_h = \frac{C\sqrt{\sum_j n^{*2}_{hj}}}{\sum_i c_i\sqrt{\sum_j n^{*2}_{ij}}}$$

۲.۲.۳ روش انتساب ککران

روشی که ککران [۶] ارائه می‌دهد بر مبنای متوسط انتساب‌های حاصل از p متغیر کمکی و سپس گرد کردن آن استوار است. بر پایه این روش ابتدا تعداد نمونه در

طبقه h ام نسبت به متغیر j ام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n^*_{hj} = \frac{nW_hS_{hj}/\sqrt{c_h}}{\sum_{i=1}^{H} W_iS_{ij}/\sqrt{c_i}}$$

سپس متوسط نمونه حاصل از p متغیر در هر طبقه به عنوان نمونه آن طبقه معرفی می‌شود (پس از گرد کردن).

$$n_h = \frac{1}{p}\sum_{1}^{p} n^*_{hj}$$

در فرمول فوق $W_i = N_i/N$ وزن طبقه i ام و S_{ij} جذر واریانس متغیر طبقه کننده j ام در طبقه i ام است.

افزایش واریانس حاصل از بکارگیری انتساب‌های توافقی بالا درحالتی که تفاوت زیادی با انتساب بهینه منفرد در هر یک از متغیرها نداشته باشد، چندان زیاد نخواهد بود.

اگر اندازه کل در برخی طبقات (N_h) به حد کافی بزرگ نباشد، روش ککران ممکن است منجر به حالت $n_h \geq N_h$ شود. همچنین برای اطلاع داشتن در هر طبقه حداقل $n_h \geq 2$ و در کل نیاز به n_h های صحیح داریم تا درعمل بتوان از همه طبقات نمونه گرفت.

وقتی n_i ها مقید به صحیح بودن و مساوی بودن هزینه در داخل طبقات باشند، با روش فوق ممکن است انحراف زیادی از جواب بهینه حاصل شود یا اصلاً جوابی بدست نیاید. برای پرهیز از این مشکل، باید محدودیت مساوی بودن هزینه در طبقات برداشته شود، که این امر از طریق برنامه نویسی غیر خطی عددی قابل اعمال است. در چنین مواقعی از برنامه نویسی عددی غیر خطی استفاده می‌شود که در آن تابع هدف :

$$\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{p}\sum_{h=1}^{H}\frac{c_h\left(n^*_{hj}-n_h\right)^2}{n_h}$$

با محدودیت $\sum_h c_hn_h \leq C, \quad 1 < n_h < N_h; \quad h = 1, 2, \cdots, H$ حداقل شود.

۳.۲.۳ روش انتساب خان،جهان و احسان

این روش مبتنی بر آنالیز عددی غیر خطی پویا بوده و تابع هدف بالا را با لحاظ کردن محدودیت‌های مشخص شده حداقل می‌کند و بنابراین عیب روش انتساب ککران [۶] را نخواهد داشت.

۳.۳ مقایسه روش‌های انتساب

در این بخش دو مثال عددی برای نشان دادن کارآیی روش انتساب خان، جهان و احسان [۱۱] تشریح می‌شود. این مثال‌ها نشان می‌دهد که این روش در انتساب نمونه کل به طبقات بخوبی عمل می‌کند، در حالی که روش‌های چترجی [۴] و ککران [۶] برای انتساب چندان مناسب عمل نمی‌کنند.

مثال ۱: در طبقه‌بندی با دو متغیر کمکی، مقادیر N_i، W_i، S_{i1}، S_{i2} و c_i در جدول ۱ داده شده است.

اگر هزینه کل C برابر ۱۰۰ واحد باشد، مقادیر بهینه انتساب برحسب هر متغیر با استفاده از روش ککران به شکل زیر خواهد بود.

$$((n^*_{ij})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

طبق انتساب ککران مقادیر (گرد شده) زیر بدست می‌آیند:

$$n_1 = 2 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 16$$

که با توجه به برقرار نبودن $n_3 \leq N_3$ و $\sum_{i=1}^{3} c_in_i \leq C$ کاربرد عملی ندارد.

وقتی روش انتساب چترجی (گرد شده) نیز بکار برده شود همان مقادیر بالا برای اندازه نمونه طبقات بدست می‌آید که کاربرد عملی ندارد.

با بکارگیری روش انتساب خان، جهان و احسان [۱۱] مقادیر زیر بدست می‌آیند:

$n_۱ = ۲ \quad n_۲ = ٦ \quad n_۳ = ۱۴$

مقادیر فوق دو شرط $n_i \leq N_i (i = ۱,۲,۳)$ و $\sum_{i=۱}^{۳} c_i n_i \leq C$ را برقرار می‌کنند و کاربرد عملی نیز دارد. اما این مقادیر در مقایسه با انتساب بهینه افزایش واریانسی برابر ۰/۱۷۸۸۱۰ را نیز به همراه دارد.

جدول ۱: داده‌های دو متغیره با سه طبقه

i	N_i	W_i	$S_{i۱}$	$S_{i۲}$	c_i
۱	۱۸	۰/۳	۲	۱/۵	۳
۲	۲۷	۰/۴۵	۴	۲	۴
۳	۱۵	۰/۲۵	۲۰	۳۵	۵

مثال ۲: داده‌های جدول ۲ مربوط به گزارشی از بررسی نمونه‌ای مزارع با سه متغیر:

تعداد گاوهای شیرده، تولید شیر روزانه و مجموع درآمد ناخالص روزانه از بابت فروش تولیدات است. تعداد کل مزارع $N =$ ۲۰۰۷۷۰ بوده است.

اگر هزینه نمونه‌گیری هر واحد در طبقات مختلف به صورت زیر باشد:

$c_۱ = ۳ \quad c_۲ = ۴ \quad c_۳ = ۵$

$c_۴ = ٦ \quad c_۵ = ۷$

و هزینه کل نمونه‌گیری برابربا $C =$ ۵۰۰۰ واحد باشد، مقادیر بهینه انتساب بر حسب هر متغیر با استفاده از روش ککران به صورت زیر خواهد بود.

$$((n^*_{ij})) = \begin{pmatrix} ۳۳٦ & ۴۳۱ & ۳۱۴ \\ ۲۰۹ & ۲۴۰ & ۲۸۳ \\ ۲۰۸ & ۱۷٦ & ۲۰۰ \\ ۱۳۵ & ۱۲۵ & ۱۰۸ \\ ۱۸۷ & ۱۹۸ & ۱۸۲ \end{pmatrix}$$

و متوسط انتساب (گرد شده) ککران عبارت خواهد بود از:

$n_۱ = ۳۳۰ \quad n_۲ = ۲۴۴ \quad n_۳ = ۱۹۵$

$n_۴ = ۱۲۳ \quad n_۵ = ۱۸۹ \quad \sum c_i n_i = ۵۰۰۲$

با استفاده از روش چترجی مقادیر زیر بدست می‌آیند:

$n_۱ = ۳۳۰ \quad n_۲ = ۲۴۵ \quad n_۳ = ۱۹۵$

$n_۴ = ۱۲۳ \quad n_۵ = ۱۸۹ \quad \sum c_i n_i = ۵۰۰٦$

هر دو روش به دلیل برقرار نبودن $\sum c_i n_i \leq C$ کاربرد عملی ندارند.

با بکارگیری روش انتساب خان، جهان و احسان [۱۱] جواب‌های زیر بدست می‌آیند:

$n_۱ = ۳۳۱ \quad n_۲ = ۲۴٦$

$n_۳ = ۱۹۵ \quad n_۴ = ۱۲۳ \quad n_۵ = ۱۸۷$

که در مقایسه با انتساب بهینه افزایش واریانسی برابر با ۰/۰۱۷۳۵۰ را در بر دارد اما شرایط عملی را تأمین می‌کند.

جدول ۲: داده‌های سه متغیره با پنج طبقه

i	N_i	W_i	$S_{i۱}$	$S_{i۲}$	$S_{i۳}$
۱	۳/۹۵۲	۰/۱۹۷	۴/۶	۱۱/۷	۳۳۲
۲	۳۸/۳۴۷	۰/۱۹۱	۳/۴	۹/۸	۳۵۷
۳	۴۳/۹۶۹	۰/۲۱۹	۳/۳	۷/۰	۲۲۶
۴	۳۶/۹۴۲	۰/۱۸۲	۲/۸	۶/۵	۱۷۳
۵	۴۱/۷۶۰	۰/۲۰۸	۳/۷	۹/۸	۲۷۹

۴.۳ نتیجه‌گیری

نتایج مقایسه انتساب‌های معرفی شده با سایر روش‌های انتساب بر اساس داده‌های مثال ۲ در جدول ۳ آمده است. انتساب‌های مقایسه شده عبارتند از:

الف: انتساب متناسب

ب: انتساب بر مبنای می‌نیمم کردن مجموع عناصر روی قطر ماتریس واریانس کواریانس حاصل از:

$$n_h = \frac{CW_h\sqrt{\sum_j S_{hj}^2/c_h}}{\sum_{i=1}^{H} W_i\sqrt{c_i\sum_j S_{ij}^2}}$$

که در آن S_{ij}^2 واریانس متغیر طبقه کننده j ام در طبقه i ام است.

ج: انتساب بر مبنای متوسط انتساب‌های بهینه بدست آمده برحسب هر متغیر

د: انتساب بر مبنای می‌نیمم کردن مجموع افزایش حاصل در واریانس ها

ه: انتساب بر مبنای می‌نیمم کردن مجموع افزایش حاصل در واریانس ها با درنظر گرفتن محدودیت‌های عددی.

نتایج این محاسبات عددی در جدول ۳ آمده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، استفاده از انتساب متناسب در مقایسه با سایر روش‌های انتساب موجب بیشترین مقدار در افزایش واریانس نسبت به انتساب بهینه شده است. در درجه بعدی، بیشترین مقدار در افزایش واریانس نسبت به انتساب بهینه، مربوط به انتساب بر اساس حداقل اثر است. در بین سایر روش‌ها که دارای کمترین مقدار در افزایش واریانس را دارند اختلافی ملاحظه نمی‌شود.

جدول ۳: مجموع افزایش حاصل در واریانس‌ها در حالت بکلوگیری انتساب‌های غیربهینه

انتسابهای مختلف	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	$TRIV_{(n)}$
متناسب	۱۹۷	۱۹۱	۲۱۹	۱۸۴	۲۰۸	۰/۳۰۵۴
می‌نیمم tr	۳۱۴	۲۸۳	۲۰۰	۱۰۸	۱۸۲	۰/۰۳۹۷
متوسط	۳۳۰	۲۴۴	۱۹۵	۱۲۳	۱۸۹	۰/۰۱۷۳
چترجی	۳۳۰	۲۴۵	۱۹۵	۱۲۳	۱۸۹	۰/۰۱۷۳
خان جهان احسان	۳۳۱	۲۴۶	۱۹۵	۱۲۳	۱۸۷	۰/۰۱۷۳

مقادیر $TRIV_{(n)}$ که در ستون هفتم جدول بالا آمده است بیانگر مجموع افزایش حاصل در واریانس برآورد میانگین جامعه است که توسط تابع هدف برای $n = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ در حالتهای مختلف انتساب محاسبه شده است.

مراجع

[۱] عرفانی، ج (۱۳۷۸). روشهای بهینه در آمارگیری‌های نمونه‌ای با طبقه‌بندی چند متغیره. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار دانشکده علوم پایه. دانشگاه تربیت مدرس.

[۲] گرامی، ع. سخاوت، م.ب. و حقیقی انارکی، م.ب. (۱۳۸۲). تعین طبقات در نمونه‌گیریهای چندمنظوره با طبقه‌بندی شده. اندیشه آماری، سال هستم شماره دوم صفحات ۳۹—۳۱.

[3] Bethel, J., 1989, Sample allocation in multivariate surveys, *Survey Methodology,* 15, 47-57.

[4] Chaterjee, S., 1968, Multivariate stratified survey. *J. Amer. Statist. Assoc.* 63, 530-534.

[5] Chromy, J., 1987, Design optimization with multiple objectives. Proceedings of the Section on Survey Methods Research, 194-199.

[6] Cochran, W.G., 1977, *Sampling Techniques, 3rd Edition,* Wiley International, New York.

[7] Dalenius, T., 1953, The Multivariate sampling problem. Skandinavisk Aktuarietidskrift 36, 92-102.

[8] Folks, J.L. and Antle, C.E., (1965). Optimum Allocation of Sampling Units of the Strata When There Are R Responses of Interest. J. of the Amer. Statist. Assoc. 60, pp 225-233.

[9] Geary, R.C., 1949., Sampling Methods Applied to Irish Agricultural Statistics. *Technical Series*. Sept. 1949.

[10] Ghosh, S.P., 1963, Optimum stratification with two characters, *Ann. Math. Stat.* 34, 866-872.

[11] Khan, M.G.M., Ahsan, M.J. and Jahan, N., 1997, Compromise allocation in multivariate stratified sampling, *Naval Research Logistics*, 44 (1), 69-76.

[12] Kokan, A.R. and Khan, S. 1967, Optimum Allocation in Multivariate Surveys: An Analytical Solution, *J. Roy. Statist. Soci., Ser. B,* 29, 115-125.

[13] Neyman. J. 1934, On the Two Different Aspects of Representative Method: The Method of Stratified Sampling and Method of Purposive Selection *J. Roy. Statist. Soci.* 97, 558-606.

[14] Peter, J.H. and Bucher, The 1940 Section Sample Survey of Crop Aggregates in Indiana and Iowa. U. S., Dept. of Agriculture.

[15] Schittkowski, K., 1985, NLPQL; A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems, *Annals of Operations Research,* 5, 485-500.

[16] Yates, F., 1960, Sampling Methods for Censuses and Surveys. 2nd Edition, Charles Griffin and Co. Ltd. London.