

تشخیص مشاهدات مؤثر در معادلات همزمان

صفر پارسی^۱ مجتبی گنجعلی^۲ عبدالرحیم شهلایی^۳

چکیده

تشخیص نقاط غیر عادی که تأثیر بسزائی در برازش معادلات همزمان^۴ دارند از اهمیت زیادی برخوردار است. هر چند روشهای تشخیص در رگرسیون خطی تک معادله ای توسعه یافته اند، چنین تکنیکهایی برای معادلات همزمان، تعمیم نیافته اند. یک روش کاربردی برای تحلیل روشهای تشخیص در رگرسیون خطی، حذف یک آزمودنی خاص و ملاحظه تأثیر یا نفوذ این آزمودنی توسط اختلاف برآورد پارامترها قبل و بعد از حذف آن است. در این مقاله، مباحث تشخیصی مشاهدات مؤثر برای مدلهای همزمان که اخیراً معرفی شده اند، مرور می شود. سپس دو رهیافت دیگر را که اولی بر اساس روش جانپی^۵ و دیگری بر اساس استفاده از الگوریتم^۶ EM است، معرفی می کنیم. کاربرد روشهای ذکر شده در مثالی اقتصادی بکار گرفته خواهد شد.

واژه کلیدی: مباحث تشخیصی، مشاهدات مؤثر، الگوریتم EM.

۱. مقدمه

مدل بندی معادلات همزمان در اقتصاد روشی بسیار کارا در بررسی وابستگی متغیرها است. این وابستگی بین متغیرها نمی تواند توسط مدلهای تک معادله ای مورد ارزیابی قرار گیرد. در این گونه مدل بندی ها، اغلب علاقه مند به تعیین مشاهدات مؤثر که تأثیر اساسی در برازش مدل اعمال می کنند، هستیم. هدف این مقاله معرفی روشهایی برای تشخیص و ارزیابی مشاهداتی است که نحوه برازش مدلهای معادلات همزمان را تحت تأثیر خود قرار می دهند.

در بخش ۲ نمادهای مربوط به معادلات همزمان را معرفی می کنیم. در بخش ۳ ابتدا روشهای ارائه شده توسط زائو و لی^۷ [۹]، را مرور می کنیم و سپس به ارائه دو رهیافت جدید که اولی بر اساس روش جانپی و دومی بر اساس استفاده از الگوریتم EM (دمپستر و دیگران^۸ [۲]) است، می پردازیم. در بخش ۴ داده های مربوط به «برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه معادلات همزمان» (جهان رائینی^{۱۰} [۱۰])، را معرفی کرده و مباحث نظری را روی این داده ها پیاده می کنیم.

۲. معادلات همزمان

معمولاً در معادلات همزمان برای t امین آزمودنی G پاسخ وابسته اندازه گیری می شود و مدل مناسب برای این پاسخ ها به صورت زیر (برای اطلاعات بیشتر در مورد معادلات همزمان می توانید به جانستون^۹، [۵] یا کمنتا،^{۱۰} [۷] و یا گجراتی،^{۱۱} [۳] مراجعه کنید).

$$YB = X\Gamma + U \quad (1)$$

و یا

$$B'y_t = \Gamma'x_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

که در آنها

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1G} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NG} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix}$$

Zhao & Lee - ۷

Dempster - ۸

Jonston - ۹

Kmenta - ۱۰

Gujarati - ۱۱

۱- عضو هیئت علمی دانشگاه محقق اردبیلی

۲- عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

۳- عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

۴- Simultaneous Equations

۵- Imputation

۶- EM Algorithm

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1G} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NG} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix}$$

ماتریس Σ به ماتریس واریانس - کوواریانس اختلالات ساختاری معروف است. بنابر این لگاریتم تابع درستنمایی را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$L(B, \Gamma, \Sigma) = \frac{-NG}{2} \log \pi + N \log |\det B'| + \frac{N}{2} \log |\Sigma|^{-1} + \frac{N}{2} \text{tr} \left\{ \frac{1}{N} \Sigma^{-1} (YB - X\Gamma)' (YB - X\Gamma) \right\} \quad (4)$$

بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می کنیم که عناصر قطر اصلی B برابر با یک هستند و همچنین، بعضی از عناصر خاص B و Γ می توانند صفر باشند.

برای یافتن معادله گام همه آزمودنی ها به فرم ماتریسی، فرض کنید که y_g ، g امین ستون Y باشد و $\beta_{(g)}$ بردار ستونی شامل آن عناصری از g امین ستون B باشد که با صفر با یک مشخص نشده و همچنین $\gamma_{(g)}$ شامل آن عناصری از ستون Γ باشد که با صفر مشخص نشده باشند و نیز $X_{(g)}$ و $Y_{(g)}$ را زیر مجموعه ای از ستونهای X و Y در نظر گیرید که به طور متناظر با $\beta_{(g)}$ و $\gamma_{(g)}$ پس ضرب شده اند. بنابر این g امین معادله ساختاری برای همه آزمودنی ها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y_g = Y_{(g)} \beta_{(g)} + X_{(g)} \gamma_{(g)} + u_g \quad (5)$$

و یا به طور مشابه، به صورت زیر نوشت:

$$y_g = Z_{(g)} \vartheta_{(g)} + u_g \quad (6)$$

که در آن:

$$Z_g = \begin{bmatrix} Y_{(g)} & X_{(g)} \end{bmatrix}, \quad \vartheta_g = \begin{bmatrix} \beta_{(g)} \\ \gamma_{(g)} \end{bmatrix}$$

با ترکیب G معادله، فرمول کلی معادلات همزمان را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y = Z\theta + u \quad (7)$$

که در آن:

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \\ \vdots \\ y_{tG} \end{bmatrix}, \quad x_t = \begin{bmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ \vdots \\ x_{tG} \end{bmatrix}, \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \\ \vdots \\ u_{tG} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{G1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{G2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1G} & \beta_{2G} & \cdots & \beta_{GG} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{G1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{G2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1K} & \gamma_{2K} & \cdots & \gamma_{GK} \end{bmatrix}$$

که در آن برای t امین آزمودنی $y_{t1}, \dots, y_{tG}$ ، متغیرهای درون زا $x_{t1}, \dots, x_{tK}$ متغیرهای از قبیل تعیین شده (برای در نظر گرفتن جزء عرض از مبدأ می توان یکی از این متغیرهای x را در هر معادله، مساوی یک در نظر گرفت)، و $u_{t1}, \dots, u_{tG}$ اجزاء اختلال تصادفی هستند. در مدل (۲) β_{ij} ها در B ضرایب متغیرهای درون زا، γ_{ij} ها در Γ ضرایب متغیرهای از قبیل تعیین شده و N تعداد آزمودنی ها است. واضح است که برای هر آزمودنی حضور همه متغیرها در تمام معادلات، ضروری نیست.

در مورد اختلال های تصادفی تأکید می شود که هر کدام از اختلال ها، فرض های اساسی مدل رگرسیون خطی نرمال کلاسیک را برآورده می کنند یعنی:

$$u_{tg} \sim N(0, \sigma_{gg}) \quad g = 1, 2, \dots, G$$

$$E(u_{tg} u_{sg}) = 0 \quad t, s = 1, 2, \dots, N, \quad t \neq s$$

اما، امکان این را که اختلالاتی مابین معادلات همبسته باشند، یعنی:

$$E(u_{tg} u_{th}) = \sigma_{gh} \quad g, h = 1, 2, \dots, G, \quad g \neq h$$

نفی نمی کنند. در واقعی برآورد این همبستگی ها در معادلات همزمان از اهمیت اساسی برخوردار است. در قالب نمادهای ماتریسی، فرضهای مزبور به صورت زیر در می آید:

$$u_t \sim N(0, \Sigma) \quad E(u_t u_s') = 0 \quad (3)$$

داده ها مهمتر است، زیرا ممکن است بسیاری از ویژگی های کلیدی مدل را کنترل کند.

یک رهیافت سودمند برای تحلیل تأثیر و نفوذ یک آزمودنی خاص، شامل حذف آن آزمودنی می باشد. اثر یا تأثیر یک آزمودنی به وسیله تفاوت حاصل از برآورد پارامترها در قبل و بعد از حذف آزمودنی، اندازه گیری می شود (کوک و ویسبرگ^۴ [۱]).

زائو و لی [۹] رهیافت فوق را که در رگرسیون خطی برای تشخیص مشاهدات مؤثر به کار می رود و به معیار فاصله کوک معروف است، به صورت زیر به مدل معادلات همزمان بسط داده اند:

$$D_{1t} = (\hat{\theta}_{(t)} - \hat{\theta})' [\hat{V} ar(\hat{\theta})]^{-1} (\hat{\theta}_{(t)} - \hat{\theta}) \quad (10)$$

که در آن $\hat{\theta}_{(t)}$ بر برآوردهای پارامتر بدون آزمودنی t ام دلالت می کند و $\hat{V} ar(\hat{\theta})$ برآورد سازگار $V ar(\hat{\theta})$ است. مشاهدات مؤثر با توجه به مقادیر بزرگ فاصله کوک مشخص می شوند.

معمولاً در مدل معادلات همزمان، متغیرهای با تأخیر ظاهر می شوند، بنابر این اگر فرض کنیم در مسأله ای، متغیری با تأخیر ۱ ظاهر شده باشد آنگاه حذف کردن مشاهده t ام به معنی حذف کردن همزمان موارد $T = \{t, t+1\}$ خواهد بود، لذا در موقع محاسبه فاصله کوک برای مشاهده t ام، باید هر دو مورد t و $t+1$ به طور همزمان حذف شوند. فرض کنید $\hat{\theta}_T$ برآورد به دست آمده پارامترها بعد از حذف موارد شامل مشاهدات، موقعیت t ام باشد لذا فاصله اصلاح شده کوک را برای حالتی که متغیر با تأخیر در مدل وجود دارد به صورت زیر مطرح می کنیم:

$$D_{2t} = (\hat{\theta}_{(T)} - \hat{\theta})' [\hat{V} ar(\hat{\theta})]^{-1} (\hat{\theta}_{(T)} - \hat{\theta}) \quad (11)$$

به طور کلی معیارهای حذفی برای مدل معادلات همزمان، که دارای متغیرهای با تأخیر باشد، مناسب نیستند زیرا اگر کسی D_{1t} را برای حذف یک آزمودنی بکار برد، ممکن است کافی نباشد و در صورتی که D_{2t} به کار برده شود، ممکن است حذفهای متناظر، افراطی باشند. به علاوه، در این حالت یک آزمودنی با تأثیر بالا، ممکن است با آزمودنی مجاورش و یا با دیگر مشاهدات با تأثیر کمتر، اشتباه شود. این اثرهای اشتباه در مدلهای معادلات همزمان با متغیرهای با تأخیر، ممکن است به وقوع به پیوندند. این مشکل را می توان با استفاده از مباحث مربوط به داده های گمشده به طور مؤثر حل کرد. برای پیش بینی مقادیر گمشده، می توان از روش جانهای که به صورت زیر است، استفاده کرد: (برای اطلاعات بیشتر در مورد روش جانهای، به لیتل و روبین^۵ [۸]، مراجعه کنید.)

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_G \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_G \end{bmatrix}, u_t = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_G \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{(1)} & \mathbf{0}_{(2)} & \cdots & \mathbf{0}_{(G)} \\ \mathbf{0}_{(1)} & Z_{(2)} & \cdots & \mathbf{0}_{(G)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{(1)} & \mathbf{0}_{(2)} & \cdots & Z_{(G)} \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{0}_{(g)}$ ها ماتریس های صفر و هم مرتبه با $Z_{(g)}$ ها هستند.

بنابر این برآوردگر ماکسیمم درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML)^۱ پارامتر θ ، که معادل با ماکسیمم کردن (۴) است، با حل رابطه زیر بدست می آید:

$$\theta = [\bar{Z}' (\Sigma^{-1} \otimes I_N) \bar{Z}]^{-1} \bar{Z}' (\Sigma^{-1} \otimes I_N) y \quad (8)$$

که در آن

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{(1)} & \mathbf{0}_{(2)} & \cdots & \mathbf{0}_{(G)} \\ \mathbf{0}_{(1)} & \bar{Z}_{(2)} & \cdots & \mathbf{0}_{(G)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{(1)} & \mathbf{0}_{(2)} & \cdots & \bar{Z}_{(G)} \end{bmatrix}$$

به طوری که $\bar{Y} = X\Gamma(B)^{-1}$ و $\bar{Z}_{(g)} = [\bar{Y}_{(g)} \ X_{(g)}]$ در (۸) $\otimes$ ضرب کرونگر^۲ یا ضرب مستقیم ماتریس ها است [۳].

چون در رابطه (۸)، $\bar{Z}$ به θ بستگی دارد، بنابر این برای برآورد θ ، از روش تکراری استفاده می کنیم. برآوردگر FIML پارامتر θ دارای توزیع مجانبی نرمال زیر است:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N\left(0, \left[\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \bar{Z}' (\Sigma^{-1} \otimes I_N) \bar{Z}\right]^{-1}\right) \text{ as } N \rightarrow \infty$$

برای جزئیات بیشتر (هاسن^۳ [۴]) را ببینید.

۳. معیارهای تشخیص مشاهدات مؤثر

مشاهده ای را مؤثر گوییم که حذف آن مشاهده، تغییر اساسی در معادله همزمان برآزش شده به وجود آورد. گاهی نقطه مؤثر از بقیه

^۱ Full Information Maximum Likelihood -
^۲ Kronecker Product -
^۳ Hausman -

^۴ Cook & Weisberg -
^۵ Little & Rubin -

در قالب نمادهای ماتریسی، معادلات همزمان را به فرم زیر می نویسیم:

$$B'y_t = \Gamma'x_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, N$$

$$u_t \sim N(0, \Sigma) \quad E(u_t u_s') = 0 \quad t \neq s$$

در نتیجه

$$u_t \sim N(\Pi'x_t, \Psi) \quad (15)$$

که در آن $\Pi' = (B')^{-1} \Gamma'$ و $\Psi = (B')^{-1} \Sigma B^{-1}$

حال فرض می کنیم که برای مشاهده t ام، یکی از عناصر y_t ، مثلاً y_{tg} گمشده باشد. یعنی:

$$y'_{obs} = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tg-1}, y_{mis}, y_{tg+1}, \dots, y_{tG})$$

بنابر این ابتدا y_{tg} را با استفاده از امید ریاضی آن به شرط بقیه مشاهدات و پارامترهای اولیه به دست می آوریم. در اصل می خواهیم

$$E(y_{mis} | y_{obs}, \Pi_0, \Psi_0)$$

$$y'_{obs} = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tg-1}, y_{tg+1}, \dots, y_{tG})$$

است. برای این کار با استفاده از توزیع امید شرطی نرمال چند متغیره خواهیم داشت: (جانسون و ویچرن [۵]، را ببینید).

(۱۶)

$$E(y_{tg} | y_{obs}, \Pi_0, \Psi_0) = \Pi_0' x_t^g + \Psi_0^g (\Psi_0^{gg})^{-1} (y_{obs} - \Pi_0' x_t^{(-g)})$$

که در آن $\Pi_0' x_t^g$ مؤلفه g ام $\Pi_0' x_t$ و $\Pi_0' x_t^{(-g)}$ همان Π_0 است که عنصر g ام آن حذف شده است. Ψ_0 و Ψ_0^g برآوردهای اولیه پارامترها هستند و Ψ_0^{gg} برابر با سطر g ام است که مؤلفه g ام آن حذف شده است و Ψ_0^{gg} ماتریس $(G-1) \times (G-1)$ است و برابر با Ψ_0 است با این تفاوت که سطر و ستون g ام آن حذف شده است. بعد از انجام گام E ، مقدار برآورده شده را متناظراً در جاهایی که y_{tg} گمشده بود قرار می دهیم و در گام M با استفاده از داده های کامل به دست آمده، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها را به دست می آوریم. گامهای E و M را آن قدر تکرار می کنیم تا برآورد پارامترها در یک ملاک همگرایی مناسب صدق کند.

حال می توانیم با استفاده از رهیافت بالا، دو ملاک زیر را برای هر یک از متغیرهای درون را تعریف کنیم:

$$DEY_{gt} = (\hat{\theta}_{(t)}^g - \hat{\theta})' [\hat{V} ar(\hat{\theta})]^{-1} (\hat{\theta}_{(t)}^g - \hat{\theta}) \quad (17)$$

که در آن $\hat{\theta}_{(t)}^g$ برآورد پارامترهای مدلی است که با استفاده از الگوریتم EM به دست آمده است با این فرض که متغیر درون g ام مشاهده t ام، گمشده تلقی شده است. ملاک دوم می تواند به صورت زیر باشد:

در این روش بدون توجه به همبستگی بین متغیرهای درون z ا، ابتدا رگرسیون های زیر را بدون در نظر گرفتن مشاهده t ام برازش می دهیم:

$$y_g^{(t)} = X_g^{(t)} \gamma_g^* + u_g^{(t)} \quad g = 1, \dots, G \quad (12)$$

که در آن $X_g^{(t)}$ ماتریس مشاهدات مربوط به متغیرهای برون z ای مربوط به معادله g ام همه آزمودنی ها است که سطر t ام آن نیز حذف شده است و $y_g^{(t)}$ همان y_g است با این تفاوت که عنصر t ام آن حذف شده است.

بعد از برازش مدل بالا و به دست آوردن $\hat{\gamma}_g^*$ ، سطر t ام ماتریس مشاهدات مربوط به متغیرهای برون z ای مربوط به معادله g ام را که با $x_t^{(g)}$ نشان می دهیم، در مدلهای برازش شده بالا قرار داده و مقادیری برای متغیرهای برون z ای رگرسیون های بالا به دست می آوریم. بعد از انجام مراحل بالا، مقادیر به دست آمده را در جاهای متناظرشان در مدل همزمان اصلی قرار داده و برآورد پارامترهای مدل را که با $\hat{\theta}_{(t)}^*$ نشان می دهیم، به دست می آوریم.

بر پایه این رهیافت فاصله کوک را می توان به صورت زیر مطرح کرد: (زائو و لی [۹])

$$D_{3t} = (\hat{\theta}_{(t)}^* - \hat{\theta})' [\hat{V} ar(\hat{\theta})]^{-1} (\hat{\theta}_{(t)}^* - \hat{\theta}) \quad (13)$$

به طوری که $\hat{\theta}_{(t)}^*$ برآورد پارامترهای به دست آمده با در نظر گرفتن مشاهده t ام به صورت گمشده و استفاده از روش جانجی است. به طور کلی، می توانیم معیار تأثیری دیگری معادل با D_{3t} بر اساس فاصله درستنمایی مقیاس بندی کنیم یعنی:

$$D_{4t} = 2 \{L(\hat{\theta}) - L(\hat{\theta}_{(t)}^*)\} \quad (14)$$

که در آن $L(\cdot)$ دلالت بر لگاریتم تابع درستنمایی دارد. (زائو و لی [۹]).

در روش بالا همبستگی بین متغیرهای درون z ا در نظر گرفته نمی شود و در اصل از کارایی برآوردها کاسته می شود. استفاده از روش زیر که اساس آن استفاده از الگوریتم EM است، به حل این مشکل می پردازد. (برای اطلاعات بیشتر در مورد الگوریتم EM ، لیتل و روبین [۸]، را ببینید).

این روش به اینگونه است که ابتدا y_{tg} را به صورت گمشده فرض می کنیم و در گام اول (گام E) مقدار مورد انتظار را با استفاده از پارامترهای اولیه برای y_{tg} به دست می آوریم سپس در گام دوم (گام M)، با استفاده از داده های کامل برآورد شده، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها را به دست می آوریم. گامهای بالا را آن قدر تکرار می کنیم تا در یک ملاک همگرایی مناسب صدق کند. برای مدل معالات همزمان، این الگوریتم را به صورت زیر اجرا می کنیم:

$$LDEY_{gt} = \gamma \{L(\hat{\theta}) - L(\hat{\theta}_{(t)}^g)\}. \quad (18)$$

که در آن

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \log P_t, & y_{t2} &= \log M_t, & y_{t3} &= \log H_t \\ x_{t0} &= 1, & x_{t1} &= \log Y_{t1}, & x_{t2} &= DPF_t, & x_{t3} &= \log B_t \\ x_{t4} &= \log H_{(t-1)}, & x_{t5} &= \log BD_t, & x_{t6} &= \log YO_t \end{aligned}$$

و یا به فرم (۷) می توان نوشت:

$$y = Z\theta + u$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\beta_{12}, & \theta_2 &= \gamma_{11}, & \theta_3 &= \gamma_{12}, & \theta_4 &= \gamma_{13} \\ \theta_5 &= -\beta_{23}, & \theta_6 &= \gamma_{21}, & \theta_7 &= \gamma_{24}, & \theta_8 &= \gamma_{25} \\ \theta_9 &= -\beta_{36}, & \theta_{10} &= \gamma_{37} \end{aligned}$$

جدول ۱ مربوط به برآوردهای پارامترهای مدل همراه با انحراف معیار متناظرشان و همچنین آماره t - استیودنت است که با روش *FIML* محاسبه شده اند.

همچنین برآورد Σ به صورت زیر است:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ./.0057 & -./0010 & -./0006 \\ -./0010 & ./.0020 & -./0015 \\ -./0006 & -./0015 & ./.0062 \end{bmatrix}$$

جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل، انحراف برآوردها معیار آماره t - استیودنت به روش *FIML*

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
θ_1	۰/۴۶۶۵	۰/۰۳۷۶	۱۲/۴۱۰۷
θ_2	۳/۹۴۵۵	۰/۳۲۶۴	۱۲/۰۸۸۱
θ_3	۰/۳۱۸۷	۰/۰۷۱۵	-۴/۴۶۰۱
θ_4	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۰۸	۸/۱۰۰۰
θ_5	۰/۶۷۷۵	۰/۰۱۶۰۱	۴۲/۳۱۳۱
θ_6	۰/۹۸۰۵	۰/۰۴۹۹	۳۹/۶۷۷۹
θ_7	۰/۱۹۹۷	۰/۰۱۲۴	۱۶/۰۵۲۹
θ_8	۰/۹۰۴۵	۰/۰۲۳۸	۳۷/۹۲۵۳
θ_9	۰/۰۶۰۸	۰/۰۲۳۴	۲/۵۹۷۵
θ_{10}	۰/۰۷۷۰	۰/۰۱۳۹	۵/۵۰۸۴

مقدار لگاریتم درستنمایی برای برآوردهای پارامترها با استفاده از روش *FIML* برابر ۱۰۶/۰۹۲۵ است.

حال با توجه به مباحث نظری که در بخش ۳ در مورد معیارهای تشخیص مشاهدات مؤثر ذکر شد، معیارهای مذکور را برای مثال مربوط به مدل تورم به کار می بریم. اولین معیار، حذف مشاهده t ام و محاسبه کردن معیار D_{1t} است. همانطور که در نمودار ۱ ملاحظه می شود،

۴. داده ها، تحلیل و نقاط مؤثر آنها

با توجه به اینکه هدف، صرفاً پیاده سازی مباحث نظری بر روی داده هایی است که قبلاً مدل بندی شده است، لذا داده هایی که در قسمت کاربردی از آن استفاده شده است مربوط به پایان نامه کارشناسی ارشد «جهان رائینی، [۱۰]» با عنوان «برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه معادلات همزمان» است. در ابتدا شرح مختصری در مورد متغیرها و مدل برازش داده شده خواهیم داد. لازم به ذکر است که داده های مربوط به مدل تورم، در پیوست ۱ آمده است.

مدل همزمان انتخابی برای تورم که با توجه به پشتوانه تئوریک و بررسی اقتصاد ایران که به طور مفصل در پایان نامه مذکور آمده است، به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \log P_t + \beta_{12} \log M_t &= \gamma_{11} + \gamma_{12} \log Y_{t1} + \gamma_{13} DPF_t + u_{1t} \\ \log M_t + \beta_{23} \log H_t &= \gamma_{21} + \gamma_{24} \log B_t + u_{2t} \\ \log H_t &= \gamma_{35} \log H_{(t-1)} + \gamma_{36} \log BD_t + \gamma_{37} \log YO_t + u_{3t} \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن P : سطح عمومی قیمتها به قیمت ثابت سال ۱۳۵۳ (شاخص قیمتها)، M : حجم نقدینگی (به میلیارد ریال)، Y_2 : درآمد ملی حقیقی به قیمت ثابت ۱۳۵۳ (به میلیارد ریال)، DPF : نرخ تورم انتظاری (به درصد)، H : پایه پولی (به میلیارد ریال)، B : اوراق قرضه در اختیار بانکها (به میلیارد ریال)، BD : کسر بودجه دولت (به میلیارد ریال) و YO : درآمد ناشی از صدور نفت (به میلیارد ریال) است.

و حالت ماتریسی آن برای $t = 1, \dots, 25$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ 0 & 1 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \\ y_{t3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t0} \\ x_{t1} \\ x_{t2} \\ x_{t3} \\ x_{t4} \\ x_{t5} \\ x_{t6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \\ u_{t3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{35} & \gamma_{36} & \gamma_{37} \end{bmatrix}$$

(۲۰)

نمودار ۶ نیز مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲ را داده مؤثرتری نسبت به سایر داده ها تلقی می کند.

نمودارهای بعدی مربوط به معیارهای DEY_{7t} و $LDEY_{7t}$ است. نمودارهای مذکور مشاهده مربوط به آزمودنی سال ۱۳۵۲ را به عنوان داده مؤثری نسبت به بقیه داده ها نشان می دهد.

در شکل های مربوط به DEY_{7t} و $LDEY_{7t}$ که در صفحه بعد آمده اند، نیز مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲ به عنوان داده مؤثرتری نسبت به بقیه داده ها، تلقی می شود.

بیشتر معیارهایی که بحث شدند، داده مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان داده مؤثر تشخیص دادند. بعضی از معیارها نیز داده مربوط به سال ۱۳۶۲ را نیز به عنوان داده مؤثر نشان دادند.

بنابر این طبق معیارهای مذکور می توانیم چنین ادعایی داشته باشیم که دو مشاهده بالا، مدل معادلات همزمان را شدیداً تحت تأثیر خود قرار می دهند. در ادامه این بخش نسبت به بررسی نتایج حاصل از حذف مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۲، ۱۳۶۲ می پردازیم. توجه کنید که از (۱۵) داریم

$$y_t \sim N(\Pi'x_t, \Psi)$$

که در آن

$$\Psi = (B')^{-1} \Sigma B^{-1}$$

و

$$\Pi' = (B')^{-1} \Gamma^{-1}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0/4665 & 1 & 0 \\ 0 & -0/6775 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابر این، برآورد ماتریس واریانس - کوواریانس بین متغیرهای درون زا به صورت زیر است:

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} 0/0050 & -0/0001 & 0/0007 \\ -0/0001 & 0/0028 & 0/0027 \\ 0/0001 & 0/0027 & 0/0062 \end{bmatrix}$$

آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ بیشترین مقدار D_1 را دارد و این معیار، مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان داده مؤثر معرفی می کند.

نمودار ۲ مربوط به معیار D_{2t} است، همانطور که در مباحث مربوط به فصل ۲ مطرح شد، این معیار همانند معیار D_{1t} است، با این تفاوت که، چون در مدل معادلات همزمان متغیر با تأخیر ۱ ظاهر شده است، لذا برای محاسبه معیار مذکور برای مشاهده t ام، باید موارد $\{t, t+1\}$ حذف شود. چنانچه ملاحظه می شود، مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۱ و ۱۳۵۲، مشاهدات مؤثر هستند.

همانطور که در مباحث مربوط به حذف آزمودنی بحث شد، معیارهای بالا برای مدل معادلات همزمان، که دارای متغیرهای با تأخیر باشد، مناسب نیستند زیرا اگر کسی D_{1t} را برای حذف یک آزمودنی بکار برد، ممکن است کافی نباشد و در صورتی که D_{2t} بکار برده شود، ممکن است حذفهای متناظر، افراطی باشند. علاوه، در این حالت یک آزمودنی با تأثیر بالا، ممکن است با آزمودنی مجاورش و یا با دیگر مشاهدات با نفوذ کمتر، اشتباه شود. این اثرهای اشتباه در مدلهای معادلات همزمان با متغیرهای با تأخیر، ممکن است به وقوع بپیوندند. با توجه به نمودارهای ارائه شده و نکته بالا، به طور صریح نمی توانیم بگوییم که مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۱ و ۱۳۵۲ مؤثر هستند.

معیارهایی که تا حدودی مشکل بالا را برطرف می کنند، D_{3t} و D_{4t} هستند. نمودارهای مربوط به معیارهای D_{3t} و D_{4t} در زیر آمده اند.

همانطور که ملاحظه می شود، نمودار ۳ نیز آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان آزمودنی مؤثر تلقی می کند.

همچنین نمودار مربوط به معیار D_{4t} نیز آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان آزمودنی مؤثر نشان می دهد.

همانطور که در بخش مربوط به داده های گمشده عنوان شد، در معیارهای D_{3t} و D_{4t} ، همبستگی بین متغیرهای درون زا در نظر گرفته نمی شود و در نتیجه قسمتی از اطلاعات دور ریخته می شود و در نتیجه از کارآیی برآوردها کاسته می شود. معیارهای DEY_{gt} و $LDEY_{gt}$ بر اساس الگوریتم EM ساخته شده اند و در این معیارها از همبستگی بین متغیرهای درون زا نیز استفاده شده است.

نمودار ۵ نشان می دهد که مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲ داده مؤثری نسبت به سایر مشاهدات است، همچنین داده مربوط به سال ۱۳۵۴ نیز در مقایسه با سایر داده ها، نسبتاً مؤثر است.

جدول ۲: برآورد پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آماره t - استیودنت به روش $FIML$ بدون در نظر گرفتن مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
θ_1	۰/۴۶۲۹	۰/۰۳۴۵	۱۳/۴۲۸۹
θ_2	۴/۱۲۷۴	۰/۲۹۵۱	۱۳/۹۸۸۴
θ_3	-۰/۳۴۰۶	۰/۰۶۴۹	-۵/۲۵۰۳
θ_4	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۰۷	۹/۰۱۳۱
θ_5	۰/۶۷۵۶	۰/۰۱۶۴	۴۱/۱۲۳۱
θ_6	۱/۹۸۴۵	۰/۰۵۱۴	۳۸/۵۹۹۹
θ_7	۰/۲۰۱۲	۰/۰۱۲۷	۱۵/۸۶۶۶
θ_8	۰/۸۹۷۲	۰/۰۲۳۸	۳۷/۷۳۱۲
θ_9	۰/۰۷۲۸	۰/۰۲۳۲	۳/۱۳۴۳
θ_{10}	۰/۰۷۵۱	۰/۰۱۳۸	۵/۴۵۲۷

جدول ۳: برآورده پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آماره t - استیودنت به روش $FIML$ بدون در نظر گرفتن مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
θ_1	۰/۴۷۱۱	۰/۰۳۶۳	۱۲/۹۸۶۷
θ_2	۴/۲۰۰۴	۰/۳۰۶۲	۱۳/۷۱۷۷
θ_3	-۰/۳۵۶۸	۰/۰۶۸۵	-۵/۲۱۲۵
θ_4	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۷	۸/۵۸۹۳
θ_5	۰/۶۸۷۱	۰/۰۱۶۳	۴۲/۰۸۲۲
θ_6	۱/۹۴۸۰	۰/۰۵۲۹	۳۶/۷۹۸۱
θ_7	۰/۱۹۳۰	۰/۰۱۲۲	۱۵/۸۰۱۱
θ_8	۰/۸۵۲۹	۰/۰۲۰۷	۴۱/۱۸۹۵
θ_9	۰/۱۳۱۴	۰/۰۲۱۹	۵/۹۸۶۲
θ_{10}	۰/۰۶۸۴	۰/۰۱۱۲۷	۵/۳۶۴۴

ملاحظه می شود که همبستگی بین γ_{t1} و γ_{t2} منفی است و این بدین معنی است که حجم نقدینگی با تورم رابطه عکس دارد و این مباحثی که در قسمت نظری مدل سازی مطرح شد، تناقض دارد.

حال بعد از حذف مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲، به بررسی برآورد پارامترها می پردازیم: با مقایسه جدول ۲ با جدول ۱، ملاحظه می شود که تنها برآوردهای پارامتر θ_9 دو جدول با هم تفاوت فاحشی دارند. پارامتر θ_9 در معادله سوم (پایه پولی)، مربوط متغیر لگاریتم کسر بودجه دولت است. بنابر این حذف مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲ باعث بیشتر معنی دار شدن رابطه بین پایه پولی و کسر بودجه دولت می شود. بدون در نظر گرفتن مشاهده مربوط به سال ۱۳۵۲، داریم:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۸ & -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۲۰ & ۰/۰۰۲۰ \\ ۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۲۰ & ۰/۰۰۵۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۶ & -۰/۰۰۰۲ & ۰/۰۱۴ \\ -۰/۰۰۰۲ & ۰/۰۰۱۶ & ۰/۰۰۱۵ \\ ۰/۰۰۱۴ & ۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۵۰ \end{bmatrix}$$

بنابر این ملاحظه می شود که همبستگی بین متغیرهای درون زا مثبت است و این نتیجه با مباحث نظری یکسان است.

حال بعد از حذف مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲، به بررسی برآورد پارامترها می پردازیم:

با مقایسه جدول ۳ با جدول ۱، ملاحظه می شود تفاوت چندانی بین برآورد پارامترها وجود ندارد. وقتی که مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲ حذف می شود، داریم:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۷ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۰ \\ -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۵ \\ -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۵۸ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۸ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۴ \\ -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۲۴ & ۰/۰۰۵۸ \end{bmatrix}$$

بنابر این ملاحظه می شود که همبستگی بین متغیرهای درون زا مثبت است و این نتیجه اهمیت و تأثیر مشاهده مربوط به سال ۱۳۶۲ را نشان می دهد.

در آخر اقدام به حذف مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ می کنیم و به بررسی نتایج حاصل می پردازیم: مقایسه جدول ۴ با جدول ۱، نشان دهنده اختلاف زیاد برآورد پارامتر θ_9 است.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۱۲۸ & -۰/۰۰۱۹ \\ -۰/۰۰۱۲۸ & ۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۲۱ & ۰/۰۰۴۸ \end{bmatrix}$$

جدول ۴: برآورده پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آماره t -
استیودنت به روش $FIML$ بدون در نظر گرفتن مشاهدات مربوط به
سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۳ & ۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۲۵ \\ ۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۱۲ \\ ۰/۰۰۲۵ & ۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۴۸ \end{bmatrix}$$

مقایسه نتایج حاصل از حذف مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ نشان می دهد که در مجموع برآورد واریانس های جملات اختلال و پارامترهای مدل در مقایسه با نتایج قبل، کمتر است. بنابراین نتایج حاصل از حذف و بررسی مدل نیز مؤید مؤثر بودن مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ است.

بعداز حذف مشاهدات سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲، ملاکهای مربوط به تشخیص مشاهدات مؤثر هیچ مشاهده مؤثری را نشان ندادند.

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
θ_1	۰/۴۷۲۷	۰/۰۴۰۶	۱۱/۶۴۹۸
θ_2	۴/۰۷۰۳	۰/۳۵۱۷	۱۱/۵۷۲۰
θ_3	-۰/۳۴۰۳	۰/۰۷۷۸	-۴/۳۷۴۸
θ_4	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۸	۷/۶۰۵۰
θ_5	۰/۶۸۷۷	۰/۰۱۶۰	۴۲/۹۶۰۳
θ_6	۱/۹۴۷۸	۰/۰۵۱۵	۳۷/۷۹۰۱
θ_7	۰/۱۹۲۲	۰/۰۱۲۱	۱۵/۸۹۱۷
θ_8	۰/۸۵۷۲	۰/۰۲۱۵	۳۹/۷۸۶۸
θ_9	۰/۱۲۳۰	۰/۰۲۳۲	۵/۳۰۹۷۰
θ_{10}	۰/۰۷۰۳	۰/۰۱۲۹	۵/۴۳۷۹

پیوست ۱: داده های مربوط به تورم

جدول پیوست ۱: داده های مربوط به تورم

Log YO _t	Log BD _t	Log B _t	DPF _t	log YZ _t	Log H _t	Log M _t	Log P _t	t
۴/۵۵	۲/۴۱	۰/۳۴	۳/۷۱	۶/۴۲	۳/۶۲	۴/۵۳	۴/۱۶	۱۳۴۳
۴/۵۹	۲/۰۰	۰/۹۹	۵/۱۷	۶/۵۱	۳/۷۸	۴/۶۶	۴/۱۶	۱۳۴۴
۴/۶۰	۲/۲۲	۰/۸۸	۳/۰۹	۶/۶۰	۳/۸۷	۴/۷۹	۴/۱۷	۱۳۴۵
۴/۹۸	۳/۳۴	۱/۴۱	۰/۷۱	۶/۶۵	۴/۰۰	۴/۹۷	۴/۱۸	۱۳۴۶
۴/۹۶	۳/۷۲	۱/۴۴	۱/۰۸	۶/۷۵	۴/۱۶	۵/۱۷	۴/۱۹	۱۳۴۷
۵/۰۷	۳/۸۷	۲/۳۱	۳/۹۸	۶/۸۲	۴/۳۲	۵/۳۳	۴/۲۳	۱۳۴۸
۵/۲۹	۴/۰۹	۱/۸۷	۶/۷۶	۶/۹۱	۴/۵۲	۵/۴۶	۴/۲۴	۱۳۴۹
۵/۶۷	۳/۴۹	۲/۷۹	۷/۵۴	۷/۱۵	۴/۶۹	۵/۶۹	۴/۲۹	۱۳۵۰
۵/۷۲	۴/۰۴	۳/۳۳	۷/۰۴	۷/۳۵	۴/۸۳	۵/۹۹	۴/۳۶	۱۳۵۱
۶/۱۴	۲/۵۸	۳/۸۱	۷/۴۴	۷/۶۷	۵/۱۳	۶/۲۵	۴/۴۶	۱۳۵۲
۷/۲۹	۴/۷۶	۴/۷۵	۹/۹۰	۷/۹۹	۵/۶۴	۶/۷۰	۴/۶۱	۱۳۵۳
۷/۲۲	۵/۲۷	۵/۱۹	۱۳/۶۲	۷/۹۹	۵/۹	۷/۰۴	۴/۷۰	۱۳۵۴
۷/۴۱	۵/۱۳	۵/۶۱	۱۷/۰۹	۸/۱۵	۶/۲۰	۷/۳۷	۴/۸۵	۱۳۵۵
۷/۴۵	۶/۱۳	۶/۰۳	۱۹/۸۸	۸/۲۰	۶/۶۰	۷/۶۳	۵/۰۸	۱۳۵۶
۷/۳۵	۶/۴۱	۵/۵۹	۲۳/۰۱	۷/۹۸	۷/۱۰	۷/۸۵	۵/۱۷	۱۳۵۷
۷/۲۵	۶/۲۷	۶/۲۰	۲۷/۷۸	۸/۰۷	۷/۳۴	۸/۱۷	۵/۲۸	۱۳۵۸
۶/۹۰	۶/۸۸	۶/۲۲	۳۴/۵۵	۷/۸۹	۷/۶۰	۸/۴۱	۵/۴۹	۱۳۵۹
۶/۸۹	۶/۹۶	۶/۳۷	۴۲/۷۴	۷/۹۲	۷/۸۸	۸/۵۶	۵/۷۰	۱۳۶۰
۷/۴۰	۶/۵۰	۶/۶۸	۵۱/۸۷	۸/۰۵	۸/۱۳	۸/۸۰	۵/۸۷	۱۳۶۱
۷/۴۳	۶/۸۰	۶/۷۹	۶۲/۳۴	۸/۱۸	۸/۲۳	۸/۹۲	۶/۰۴	۱۳۶۲
۷/۰۳	۶/۴۶	۶/۸۴	۷۵/۲۴	۸/۱۶	۸/۳۵	۸/۹۸	۶/۱۴	۱۳۶۳
۷/۱۱	۶/۴۷	۷/۰۹	۹۱/۵۶	۸/۱۱	۸/۵۰	۹/۱۱	۶/۱۸	۱۳۶۴
۷/۴۴	۷/۲۸	۷/۰۹	۱۱۱/۷۶	۷/۹۶	۸/۷۱	۹/۲۸	۶/۳۶	۱۳۶۵
۷/۶۸	۷/۲۹	۷/۰۹	۱۳۶/۰۵	۷/۹۹	۸/۹۳	۹/۴۵	۶/۶۲	۱۳۶۶
۷/۶۴	۷/۶۶	۷/۰۹	۱۶۵/۰۵	۷/۹۹	۹/۱۶	۹/۶۶	۶/۸۶	۱۳۶۷

مراجع

- [1] Cook R. D., and Weisberg S., 1982, *Residual and Influence in Regression*, New York: Chapman and Hall.
- [2] Dempster A. P., Laird N. M. and Rubin D. B., 1977, Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm (With discussion), *J. Roy. Statist. Soc. B*(39), 1-38.
- [3] Gujarati D., 1995, *Basic Econometrics* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill.
- [4] Hausman J. A., 1983, *Handbook of Econometrics*, Vol. 1, North-Holland Publishing Company.
- [5] Johnson R. A. and Wichern D.W. 1998, *Applied Multivariate Statistical Analysis* (2nd ed). Prentice Hall.
- [6] Johnston J., 1984, *Econometric Methods* (3rd ed.), New York: Mc GRAW-HILL.
- [7] Kmenta J., 1986, *Elements of Econometrics*, New York: Mc GRAW-HILL.
- [8] Little R. J. and Rubin D. B., 2002, *Statistical Analysis With Missing Data*, New York: John Wiley.
- [9] Zhao Y. and Lee A. H., 1998, Influence Diagnostics for Simultaneous Equation Models, *Austral. & New Zeland J. Statist.* 40(30): 345-357.

[۱۰] جهان رائینی، پروانه. (۱۳۷۰)، برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه همزمان، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران بهشتی.