

آمار فازی؛ مروری بر گذشته و چشم اندازهای آینده سید محمود طامری^۱

چکیده

به کارگیری شیوه‌ها و ابزارهای نظریه مجموعه های فازی در گسترش و تعمیق روشهای آماری، چندی است مورد توجه محققین قرار گرفته است. در این مقاله، تحقیقات کلیدی که در این زمینه انجام شده، معرفی و مرور می‌شوند. از سوی دیگر، با توجه به وضعیت موجود چشم اندازی از تحقیقات آینده نیز ترسیم و زمینه‌ها و موضوعهایی که پیش بینی می‌شود در آینده مورد توجه بیشتر قرار گیرند، مطرح می‌شوند. واژه‌های کلیدی: آمار فازی، احتمال فازی، رگرسیون فازی، آمار بیزی فازی.

۱. مقدمه

نظریه آمار و نظریه مجموعه‌های فازی، هر دو برای مطالعه الگوها و سیستمهای شامل عدم قطعیت^۲ وضع شده‌اند. اولی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت آماری (منسوب به پیشامدهای تصادفی) و دومی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت امکانی^۳ (ناشی از ابهام و نادقیق بودن) مناسب هستند. این دو نظریه نه متناقض یکدیگرند و نه یکی دیگری را شامل می‌شود. گرچه طبیعت و کاربرد هر یک از این دو نظریه متفاوت از دیگری است، اما این باعث نمی‌شود که نتوان در یک مسأله، از هر دو نظریه استفاده کرد. در واقع، می‌توان روشهای کلاسیک آماری و روشهای فازی را، با هدف توصیف و تحلیل بهتر مسائل دنیای واقعی، با هم تلفیق کرد.

هدف از این مقاله از یک سو مروری بر تحقیقات کلیدی است که در زمینه آمار فازی انجام گرفته است و از سوی دیگر ارائه دورنمایی از

آینده آمار فازی است. با این دیدگاه، مقاله حاضر به ترتیب زیر تنظیم شده است:

در بخش دوم کلیاتی درباره آمار فازی مطرح می‌شود. در این بخش توضیح خواهیم داد که منظور از آمار فازی چیست و اصولاً یک مدل آماری را با توجه به نظریه مجموعه‌های فازی چگونه می‌توان تعمیم داد. در بخش سوم و به تفکیک، تحقیقاتی را که در مباحث برآورد (نقطه‌ای و فاصله‌ای)، آزمون فرض، و رگرسیون، در زمینه فازی انجام شده است، مرور و بررسی می‌کنیم. یک سری مباحث خاص در موضوعهای مختلف آماری که در زمینه فازی انجام شده‌اند، نیز در زیربخش ۳-۴ مرور می‌شوند.

در بخش چهارم، موضوعهایی را که به نظر می‌رسد در آینده مورد توجه محققین قرار گیرند، بیان و مباحثی را که زمینه تحقیق در آنها مهیا است، معرفی می‌کنیم.

^۳ Possibilistic

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۲ Uncertainty

۲. کلیاتی درباره آمار فازی

۱-۲ تاریخچه

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ معرفی [۲، ۶، ۱۰، ۱۱، ۲۹، ۱۲۰]، اما مطالعات و تحقیقات در آمار و احتمال فازی، به طور عمده از دهه هشتاد آغاز شد [۱۰۳]. از آن زمان، به کارگیری روشها و ابزارهای نظریه مجموعه‌های فازی در گسترش و تعمیق روشهای آماری مورد توجه روز افزون بوده است. تاکنون صدها مقاله درباره آمار و احتمال فازی نگارش و چندین کتاب در این باره تألیف شده است. درباره بعضی مقالات کلیدی، در بخش آینده و به تفکیک موضوع، بحث خواهیم کرد. در اینجا باید به دو کتاب مهم در زمینه آمار و احتمال فازی اشاره کنیم.

اولین کتاب، اثر کروس و میر^۴ [۶۷] است که *آمار با داده‌های مبهم* نام دارد و در سال ۱۹۸۷ چاپ شده است. این کتاب ظاهراً نخستین کتابی است که اختصاصاً درباره آمار و احتمال فازی تألیف شده است.

کتاب دوم، اثر فیتل^۵ [۱۰۹] است که *روشهای آماری برای داده‌های نادقیق* نام دارد و در سال ۱۹۹۶ چاپ شده است. در این کتاب مباحث گوناگون از آمار توصیفی تا آمار استنباطی برپایه داده‌های نادقیق مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

لازم است به کتابی با عنوان *تجزیه و تحلیل و مدلسازی آماری داده‌های فازی* [۲۵] نیز اشاره شود. این کتاب در واقع مجموعه‌ای از ۱۹ مقاله در زمینه‌های مختلف آمار و احتمال فازی است، که با مقدمه‌ای نسبتاً ممتع از پروفیسور زاده، در سال ۲۰۰۲ به چاپ رسیده است (پی‌نوشت ۱).

همچنان که اشاره شد در بخش سوم، تحقیقات درباره آمار فازی را به تفکیک موضوع مرور خواهیم کرد. اما پیش از آن لازم است منظور خود را از آمار فازی روشن سازیم.

۲-۲ آمار فازی

هدف از مقاله حاضر، مروری بر آنچه هم اکنون آمار فازی نام گرفته است می‌باشد. منظور از آمار فازی، استفاده از روشهای فازی در مباحث

گوناگون علم آمار است. در یک تقسیم بندی کلی، این کار تاکنون به صورتهای زیر انجام شده است:

(۱) تعمیم مدل‌های کلاسیک به مدل‌های فازی. برای نمونه، می‌توان به مدل‌هایی اشاره کرد که در آنها مشاهدات نادقیق مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. در این موارد، چنانچه داده‌های نادقیق به داده‌های دقیق تبدیل شوند، آنگاه مدل اصلی به یک مدل معمولی آماری تقلیل می‌یابد.

(۲) استفاده از روشهای فازی به جای روشهای آماری. برای نمونه، می‌توان به مواردی اشاره کرد که احساس می‌شود عدم اطمینان حاکم بر مدل، از نوع امکانی است نه از نوع احتمالی. مثلاً در یک مدل رگرسیونی ممکن است خطای مدل به عدم اطمینان ناشی از مبهم بودن و منعطف بودن ارتباط بین متغیرهای سیستم باز گردد و نه به عدم اطمینان منسوب به خطای تصادفی. در این موارد می‌توان از مدل‌های رگرسیون امکانی به جای مدل‌های رگرسیون معمولی استفاده کرد.

(۳) به کارگیری توأم روشهای فازی و روشهای آماری در مدل‌هایی که هر دو نوع عدم قطعیت (احتمالی و امکانی) در آنها وجود دارند. مثلاً در مسئله برآورد یک پارامتر مجهول از یک توزیع احتمال، ممکن است با مشاهدات نادقیق نمونه روبرو شویم. در این حالت می‌توان مشاهدات نادقیق را با مجموعه‌های فازی صورت‌بندی و آنگاه از آنها در استنباط درباره پارامتر مجهول استفاده کرد.

از بین سه رده‌ای که در بالا به آنها اشاره شد، رده اول یعنی رده مربوط به تعمیم مدل‌های کلاسیک به مدل‌های فازی، مهمترین و گسترده‌ترین حالات را در برمی‌گیرد. اکنون درباره شیوه‌های این تعمیمها، توضیحاتی بیان می‌کنیم.

۳-۲ تعمیمهای یک مدل آماری

یک مدل آماری (و کلاً یک مدل ریاضی) را می‌توان با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی از چهار جنبه تعمیم داد:

- (۱) متغیرهای تصادفی مدل را به صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفت.
- (۲) متغیرها به صورت معمولی فرض شوند، اما مشاهدات مربوط به آنها مشاهدات نادقیق باشند.

^۴ Kruse and Meyer

^۵ Viertl

۳) متغیرها و مشاهدات مربوط به آنها معمولی باشند، اما پارامترهای مدل فازی، فرض شوند.

۴) متغیرها، مشاهدات مربوط به متغیرها و پارامترهای مدل اصلی، همگی معمولی باشند، اما متغیرها یا فرضها یا توابع مرتبط با مدل (مانند تابع زیان، تابع تصمیم، فرض مورد آزمون، ...) منعطف و نادقیق باشند.

بدیهی است بتوان یک مدل را با توجه به بیش از یک جنبه از چهار جنبه بالا تعمیم داد، همچنان که تاکنون این نوع تعمیمها نیز انجام شده است.

برای توضیح تقسیم بندی بالا، به نمونه هایی از تحقیقات در هر قسمت اشاره می کنیم. مطالعات مربوط به متغیرهای تصادفی فازی [۷، ۷۲ و ۸۷] و قضایای حدی درباره آنها [۲۷ و ۸۶]، نمونه هایی از حالت اول هستند. تحقیقاتی که درباره آزمون فرضها بر پایه مشاهدات مبهم انجام شده است مانند [۳۱، ۳۲، ۳۹ و ۵۳]، و مدل های رگرسیونی با مشاهدات نادقیق [۳۵] در رده دوم قرار می گیرند. مطالعات مربوط به مدل های رگرسیونی که ضرایب متغیرها فازی فرض می شوند، مانند [۱۳ و ۴۲] و یا بحث استنباط بیزی بر پایه توزیع پیشین فازی [۱۰۹ و ۱۱۲] نمونه هایی از حالت سوم اند و سرانجام مسئله آزمون فرض وقتی فرضهای مورد آزمون مبهم باشند [۱۷، ۱۸، ۱۰۰ و ۱۰۱] نمونه ای از حالت چهارم است.

۲-۴ چند نکته

همین جا یک نکته را باید خاطر نشان کرد. از دیدگاه یک فازی-آماردان هدف آن نیست که روشهای فازی به جای روشهای آمار کلاسیک در همه موارد و همه موضوعات جایگزین شود، بلکه هدف بررسی این موضوع است که در مسائلی که روشهای آمار کلاسیک محدودیتهایی دارد، چگونه (و اصولاً آیا) می توان از ابزارهای نظریه مجموعه های فازی در حل آنها استفاده کرد؟ به بیان دیگر صحبت از مکمل بودن روشهای آماری و روشهای برگرفته از نظریه مجموعه های فازی است و نه لزوماً رقیب بودن این روشها.

درباره تفاوتها و تشابه های بین مفهوم تصادفی بودن (عدم اطمینان از نوع احتمالی) و مفهوم فازی بودن (عدم اطمینان از نوع امکانی) مباحث بسیاری انجام و منتشر شده است. برای ورود به مبحث آمار فازی، شایسته است این تفاوتها و تشابه ها مورد توجه قرار گیرند. پرداختن به این موضوع، در حوصله و مجال این مقاله نیست. خوانندگان علاقمند

می توانند برای نمونه به [۵، ۹، ۴۰، ۴۳، ۴۴، ۵۷، ۶۵، ۱۲۱ و ۱۲۲] مراجعه کنند.

شایان ذکر است که در این مقاله، صرفاً به آمار فازی خواهیم پرداخت و مباحث مربوط به احتمال فازی، موضوع این مقاله نیست. بنابراین موضوعهایی مانند احتمال پیشامدهای فازی، متغیرهای تصادفی فازی و قضایای حدی درباره آنها، فرایندهای تصادفی فازی، توصیف احتمالی مجموعه های فازی و ... خارج از چارچوب این بررسی قرار دارند.

۳. مروری بر گذشته

۱-۳ برآورد

موضوع برآورد (نقطه ای و فاصله ای) یک پارامتر مجهول از یک توزیع احتمال، در زمینه فازی، توسط چند تن از محققان مطالعه شده است. نخست به برآورد نقطه ای می پردازیم.

اولین بار کورال و هیل^۶ [۳۸] در سال ۱۹۸۴ در این باره مطالعاتی انجام دادند. آنان با تعمیم فضای نمونه به فضای نمونه فازی، روش ماکسیم درستنمایی را به حالتی که مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی، نادقیق باشند، گسترش دادند (نیز ر.ک. به [۸۳]). در همین سال، باکلی^۷ [۲۸] مسئله برآورد با داده های فازی را در چارچوب نظریه تصمیم بررسی کرد. به علاوه، هیل و همکاران^۸ [۴۸] در سال ۱۹۸۵ مسئله برآورد نقطه ای با داده های فازی را با رهیافت بیزی مطالعه کردند.

از سویی دیگر، و با یک رهیافت متفاوت، کروس^۹ [۶۶] در سال ۱۹۸۴ مسئله برآورد را وقتی اطلاعات نمونه به صورت داده های زبانی^{۱۰} باشند، مطالعه کرده است (نیز ر.ک. به [۶۷]).

اشناتا^{۱۱} [۹۶] در سال ۱۹۹۳ جنبه های مختلف برآورد بیزی را وقتی اطلاعات نمونه و همچنین پارامترهای توزیع پیشین، نادقیق باشند، مطالعه کرده است. در مقاله وی، مفاهیم و مباحثی مانند تابع درستنمایی فازی،

^۶ Corral and Gil

^۷ Buckley

^۸ Gil et al

^۹ Kruse

^{۱۰} Linguistic Data

^{۱۱} Schnatter

متغیرهای تصادفی فازی، یک نوع فاصله اطمینان برای میانگین یک متغیر تصادفی فازی ارائه کرده است.

در پایان این قسمت، یادآور می‌شویم که مبحث برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای برای پارامتر مجهول یک تابع عضویت^{۱۷} نیز توسط بعضی از محققان مورد بررسی قرار گرفته است. البته این بحث متفاوت از مبحث برآورد پارامتر مجهول یک تابع توزیع می‌باشد. برای نمونه‌هایی از این تحقیقات می‌توان به [۳۰ و ۷۷] اشاره کرد.

۲-۳ آزمون فرض

آزمون فرضهای آماری، با مشاهدات نادقیق، نخستین بار توسط کازالس و همکاران^{۱۸} [۳۱ و ۳۲] در سال ۱۹۸۶ مورد مطالعه قرار گرفت (بی‌نوشت ۲). آنها لم نیمن-پیرسن را برای حالت بالا تعمیم دادند و رهیافت ییزی را به این مسئله بررسی کردند (نیز ر.ک. به [۳۳]). سون و همکاران^{۱۹} [۹۹] نیز بر پایه تعمیم لم نیمن-پیرسن، مفهوم توانا‌ترین آزمون فازی را تعریف و یک کاربرد از آن را بررسی کردند. زگورزسکی^{۲۰} [۵۳] در سال ۲۰۰۰، رهیافتی را به موضوع بالا پیشنهاد داده است که در آن، تصمیم درباره رد یا قبول فرضها، به صورت فازی بیان می‌شود (نیز ر.ک. به [۵۴]). تأثیر ابهام داده‌ها در آزمون فرضهای آماری نیز در [۹۰] بررسی شده است.

مسئله آزمون فرضها وقتی مشاهدات، دقیق هستند اما خود فرضها، مبهم و نادقیق اند، نخستین بار توسط آرنولد^{۲۱} [۱۶-۱۸] مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرضهای یکطرفه و دو طرفه توضیح داده است. همین مسئله یعنی آزمون فرضهای فازی (با داده‌های دقیق) توسط دلگادو و همکاران^{۲۲} [۴۱] و البته با روشی در چارچوب نظریه تصمیم مطالعه شده است. طاهری و بهبودیان [۱۰۰] در سال ۱۹۹۹ با ارائه تعریفهای مناسبی برای احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم، مسئله بالا را بررسی و لم نیمن-پیرسن را برای آزمون فرضهای فازی، بیان و اثبات کرده‌اند (برای مطالعه یک کاربرد از روش آنها

برآورد گریز، تابع پسین فازی و نواحی HPD مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

بر پایه مفهوم امید ریاضی متغیرهای تصادفی فازی، لویز و هیل^{۱۱} [۷۳] در سال ۱۹۹۸ برآوردگر فازی نااریب میانگین یک جامعه، البته در حالتی خاص را تعریف و بررسی کرده‌اند. مسئله برآورد در بررسیهای طولی با حالت‌های فازی، توسط مانتون^{۱۳} و همکاران [۷۵ و ۷۶] بررسی شده است. فیتل [۱۰۹] استفاده از روشهای ناپارامتری را در برآورد، بر اساس داده‌های نادقیق، مطالعه کرده است.

بهبودیان و محمدپور [۲۳] روشی را برای برآورد یک پارامتر مجهول از یک توزیع وقتی اطلاع نادقیق درباره آن پارامتر در اختیار داریم، با وجود یک یا چند پارامتر مزاحم، ارائه داده‌اند. آنها روش خود را با روشهای متداول در برآورد و آزمون فرض درباره یک پارامتر، وقتی پارامترهای مزاحم وجود دارند، مقایسه کرده‌اند.

بر پایه تعمیم‌هایی از تابع درستنمایی هنگامی که داده‌های نمونه یا اطلاعات مربوط به تابع پیشین نادقیق باشند، گرنتر و هو^{۱۴} [۴۷] برآوردگرهای ییزی را تعمیم داده‌اند و از آن در تحلیل داده‌های مربوط به جنگلها استفاده کرده‌اند.

موضوع برآورد فاصله‌ای فازی نیز نخستین بار توسط کورال و هیل [۳۹] در سال ۱۹۸۸ صورت‌بندی و بررسی شد. در تحقیق آنها، برآورد فاصله‌ای به حالتی که با مشاهدات نادقیق (مرتبط با متغیرهای تصادفی معمولی) سروکار داریم، تعمیم داده شده است.

فیتل و هیول^{۱۵} [۱۱۱] در سال ۱۹۹۱ بر پایه تعمیمی از قضیه ییزی برای حالتی که مشاهدات نمونه مبهم باشند، مفهوم نواحی HPD را تعمیم دادند (نیز ر.ک. به [۱۰۸]). در اثر فیتل [۱۰۹] نیز مسئله ناحیه‌های اطمینان بر پایه داده‌های فازی، مطالعه شده است.

واتانابه^{۱۶} [۱۱۵] در سال ۱۹۹۶ با رهیافتی متفاوت، به موضوع برآورد فاصله‌ای فازی پرداخته است. وی بر اساس قضایای حدی درباره

^{۱۷} Membership Function

^{۱۸} Casals et al.

^{۱۹} Son et al.

^{۲۰} Grzegorzewski

^{۲۱} Arnold

^{۲۲} Delgado et al

^{۱۱} Lopez-Diaz and Gil

^{۱۳} Monton et al.

^{۱۴} Gertner and Zhu

^{۱۵} Viertl and Hule

^{۱۶} Watanabe

۳-۳ رگرسیون

می توان گفت که بیشترین مطالعات در تلفیق روشهای کلاسیک آماری و روشهای فازی، در زمینه رگرسیون انجام گرفته است. در رگرسیون معمولی، متغیرهای مورد مطالعه و مشاهدات مربوط به آنها دقیق هستند. روابط بین متغیرها نیز با اضافه کردن جمله ای تصادفی، در قالب مدلهای دقیق بررسی می شود. اما اگر در یک سیستم، با متغیرهای نادقیق و یا روابط مبهم روبرو باشیم، آنگاه رگرسیون فازی می تواند الگوهای مناسب تری را در اختیار بگذارد.

در یک تقسیم بندی کلی، رگرسیون فازی را می توان به دو رده طبقه بندی کرد:

(۱) رگرسیون فازی وقتی متغیرهای مدل و یا مشاهدات مربوط به آنها، فازی و مبهم باشند.

(۲) رگرسیون فازی وقتی روابط بین متغیرها، نادقیق و فازی باشد. به بیان دیگر حالتی که متغیرها و مشاهدات مربوط به آنها دقیق اند اما ضرائب مدل رگرسیون، اعداد فازی منظور می شوند.

در هر دو حالت بالا، به ویژه حالت اول، مطالعات بسیاری صورت گرفته است که در این بخش تعدادی از آنها را معرفی و مرور کنیم.

رگرسیون فازی، نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۱۰۵] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. در مقاله آنها مدل رگرسیون خطی با ضرائب فازی مورد مطالعه قرار گرفته است. تاناکا و همکارانش، و دیگر محققان، در مقاله های متعددی این نوع مدل را از جنبه های گوناگون مطالعه، بررسی و تصحیح کرده اند. در [۸۸ و ۱۰۶] مروری بر ویژگیهای چند مدل که بر پایه مدل تاناکا و همکاران بنا شده، انجام گرفته است. حشمتی و کاندل^{۲۹} [۵۶] مدل بالا را در یک تحقیق بازاریابی، مورد استفاده قرار داده اند (نیز ر.ک. به [۴]). در حل بسیاری از مدلهای بالا، مسئله یافتن مدل رگرسیون فازی مناسب، معادل با یک مسئله برنامه ریزی خطی می شود [۱۳]. با یک رهیافت مشابه، تاناکا و لی^{۳۰} [۱۰۶] مدل رگرسیون با ضرائب بازه ای را بر پایه مفاهیم امکان^{۳۱} و لزوم^{۳۲} مطرح کرده اند. بررسی این نوع مدلهای معادل با یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی (درجه دوم) می شود (نیز ر.ک. به [۸۵]). همچنین

ر.ک. به [۸۴]. همین مسئله با شیوه ای متفاوت توسط واتانابه و ایمایزومی^{۳۳} [۱۱۶] نیز مطالعه شده است. در روش آنها تابع فازی نقش محوری دارد و نتیجه آزمون نیز به صورت فازی بیان می شود.

از سوی دیگر، آزمون فرضها در زمینه فازی و به شیوه های بیزی مورد توجه محققین بوده است. همچنان که در بالا اشاره شد، اولین گامها در این باره به مطالعات دلگادو و همکاران [۴۱] (آزمون فرضهای فازی با داده های معمولی)، و کازالس و همکاران [۳۱ و ۳۲] (آزمون فرضهای معمولی با داده های فازی) باز می گردد. به علاوه کازالس [۳۴] در سال ۱۹۹۳ مسئله آزمون فرضهای فازی با داده های معمولی را در چارچوب نظریه تصمیم فازی (ارائه شده توسط تاناکا و همکاران^{۳۴} [۱۰۴] در سال ۱۹۷۹) بررسی کرده است.

طاهری و بهبودیان [۱۰۱] در سال ۲۰۰۱ یک شیوه بیزی برای آزمون فرضهای فازی با داده های معمولی ارائه داده اند. آنها همین مسئله را در حالتی که داده های نمونه نیز مبهم باشند، در سال ۲۰۰۲ بررسی کرده اند [۱۰۲].

بر پایه مفهوم متغیرهای تصادفی فازی و به کمک قضیه حد مرکزی درباره آنها کورنر^{۳۵} [۶۴] یک آزمون مجانبی برای امید ریاضی یک جامعه، وقتی مشاهدات نمونه فازی هستند، ارائه کرده است. همچنین مونتنگرو و همکاران^{۳۶} [۸۰] در سال ۲۰۰۱ آزمون مقایسه میانگینهای دو جامعه را وقتی نمونه های حاصل از دو جامعه، مبهم هستند، مطالعه کرده اند.

آزمون نیکویی برازش با داده های مبهم توسط هیل و همکاران [۴۹] و [۵۰] مطالعه شده است (نیز ر.ک. به [۸]).

کاربرد آزمون فرضهای فازی در زمینه های مختلف رو به گسترش است. برای نمونه، در تشخیص پزشکی می توان به مقاله لاسنت و همکاران^{۳۷} [۶۸]، در مخابرات به مقاله سون و همکاران [۹۹] و در فیزیک به مقاله پاریس^{۳۸} [۸۴] اشاره کرد.

^{۳۳} Watanabe and Imaizumi

^{۳۴} Tanaka et al.

^{۳۵} Korner

^{۳۶} Montenegro et al.

^{۳۷} Last et al.

^{۳۸} Paris

^{۲۹} Heshmaty and Kandel

^{۳۰} Tanaka and Lee

^{۳۱} Possibility

^{۳۲} Necessity

ماتولکا^{۴۱} [۷۴] مدل رگرسیون را که به صورت چند جمله‌ای با ضرایب فازی باشد، مطالعه کرده‌اند. همچنین در [۲۷] رگرسیون فازی با استفاده از شبکه‌های تطبیقی فازی مطالعه شده است.

سرانجام به چند مقاله مروری اشاره می‌کنیم. ارقامی [۱] نکات اصلی چند روش مختلف رگرسیون فازی را مورد بررسی، مقایسه و مذاقه قراردادده است (نیز ر. ک. به [۱۵]). ردن و وودال^{۴۱} [۸۸] تعدادی از شیوه‌های رگرسیون فازی را همراه با نقاط قوت و ضعف آنها مطالعه و بررسی کرده‌اند. کیم و همکاران^{۴۲} [۶۳] رگرسیون معمولی را با رگرسیون فازی از جهات مختلف مانند فرضهای اولیه، چگونگی برآورد پارامترها و زمینه‌های کاربردی مقایسه کرده‌اند.

۴-۳ زمینه‌های دیگر

در بعضی زمینه‌های دیگر آماری نیز شیوه‌های فازی به کار گرفته شده‌اند. البته تحقیقات در این زمینه‌ها اندک است و لذا این موارد را همگی در این بخش مرور می‌کنیم.

با آمار توصیفی آغاز می‌کنیم. بعضی مباحث آمار توصیفی بر پایه مشاهدات نادقیق توسط کروس و میر [۶۷] و بعضی نیز توسط فیتل [۱۰۹] مطالعه شده‌اند. ازدیدگاهی متفاوت، کاندل و همکاران [۶۰، ۶۱] و [۹۷] مفاهیم مقدار مورد انتظار فازی^{۴۳} و بازه مورد انتظار فازی^{۴۴} را معرفی و کاربردهایی از آنها را بررسی کرده‌اند. همچنین در [۹۸]، چگونگی تشکیل هیستوگرام بر پایه داده‌های نادقیق مطالعه شده است (نیز ر. ک. به [۹۵]).

استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی در قابلیت اطمینان آماری توسط نیکلسکو و فیتل^{۴۵} [۸۲] و صادق‌پور و زیان [۹۲] مورد بررسی قرار گرفته است. درباره قابلیت اطمینان بر پایه احتمالات فازی مقدار، مرجع [۱۱۷] شایان توجه است.

کنترل کیفیت آماری وقتی با داده‌های مبهم روبرو هستیم نیز مورد توجه قرار گرفته است که برای نمونه، می‌توان به تحقیقات وانگ و

باردوسی^{۳۳} [۲۱] مدل رگرسیون غیرخطی را که معادل با مسائل کلی‌تر برنامه ریزی می‌شود، مطالعه کرده است. از سوی دیگر، مدل‌های رگرسیون که در آنها متغیرهای مستقل، فازی می‌باشند و پارامترهای مدل، اعداد معمولی، توسط محققان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه، ساکاوا و یانو^{۴۴} [۹۱] در سال ۱۹۹۱ و وانگ و لای^{۳۵} [۱۱۳] در سال ۱۹۹۰ (مورد اخیر بر پایه روش موسوم به روش ماکسیم امکان-مینیم آنترویی) این نوع مدل را مطالعه کرده‌اند.

همچنان که می‌دانیم یک شیوه متداول در مطالعه مدل‌های معمولی رگرسیون، روش کمترین توانهای دوم است. این شیوه توسط بعضی از محققین برای بررسی مدل‌های رگرسیون فازی نیز به کار گرفته شده است. در واقع مجموعه‌ای از مطالعات در رگرسیون فازی را می‌توان مطالعات بر پایه روش کمترین توانهای دوم نامید. این شیوه را نخستین بار کلمینس^{۳۶} [۳۵] و دایاموند^{۳۷} [۴۲] در سال ۱۹۸۷ مورد توجه قرار دادند. نویسنده اخیر هر دو حالت متغیرها معمولی - پارامترها فازی، و متغیرها فازی - پارامترها معمولی را با روش کمترین توانهای دوم بررسی کرده است. درباره روش کمترین توانهای دوم در بررسی مدل‌های رگرسیون فازی، مقالات جدیدی همچون [۴۵، ۵۸، ۸۱، ۹۴ و ۱۱۸] شایان توجه‌اند.

به چند تحقیق دیگر در زمینه رگرسیون فازی اشاره کرده و این بخش را به پایان می‌بریم. آرنولد و استالکر^{۳۸} [۱۹] مدل رگرسیون خطی را وقتی اطلاعات نادقیقی درباره ضرایب مدل و ماتریس کوواریانس جمله خطای تصادفی در اختیار است، مطالعه کرده‌اند. آنها برای این مدل، بهترین پیش بینی کننده خطی متغیر وابسته را که می‌توان آن را معادل فازی برای پیش بینی کننده مینیماکس تلقی کرد، تعریف و ویژگیهای آن را بررسی کرده‌اند. تویورا و واتادا^{۳۹} [۱۰۷] دو شاخص برای ارزیابی مدل‌های رگرسیون فازی ارائه داده‌اند. لوزینسکی و

^{۳۳} Bardossy

^{۴۴} Sakawa and Yano

^{۳۵} Wang and Li

^{۳۶} Celmins

^{۳۷} Diamond

^{۳۸} Arnold and Stahlecker

^{۳۹} Toyoura and Watada

^{۴۰} Luczynski and Matolka

^{۴۱} Reden and Woodall

^{۴۲} Kim et al

^{۴۳} Fuzzy Expected Value

^{۴۴} Fuzzy Expected Interval

^{۴۵} Niculescu and Viertl

پایه فیتل و هارتر^{۵۳} [۱۱۲] نواحی اطمینان فازی را مورد بحث قرار داده‌اند.

تحلیل ممیزی و طبقه‌بندی داده‌ها با استفاده از روشهای فازی و کاربردهای آن نیز مورد توجه روزافزون است. در این باره، تعمیم روشهای آماری به ویژه در حالانی که با اطلاعات مبهم سروکار داریم، مورد بررسی فراوان قرار گرفته است که برای نمونه می‌توان به [۲۶ و ۶۲] اشاره کرد. به علاوه شیوه‌هایی برای طبقه‌بندی فازی داده‌ها، بر پایه تعمیم روش ماکسیمم درستنمایی در طبقه‌بندی، ارائه شده است. خوانندگان علاقمند به این موضوع را به [۵۵ و ۱۱۹] ارجاع دهیم.

۴. چشم اندازهای آینده

چشم انداز آمار فازی نسبتاً گسترده و متنوع است. گرچه نمی‌توان آنچه را در آینده اتفاق خواهد افتاد به طور دقیق پیش بینی کرد اما از قرائن موجود می‌توان درباره روند آینده حدسهایی زد. بر همین اساس و بدون ادعایی مبنی بر قطعیت، زمینه‌ها و موضوعهایی را که به نظر می‌رسد در آینده نزدیک مورد توجه محققین قرار گیرد، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. پیش از توضیح درباره گرایشهای خاص، یک نکته کلی را متذکر می‌شویم. اصولاً برای پیشرفت علم آمار در هر شاخه و هر زمینه‌ای، لازم است تا مبانی نظری مربوطه، به ویژه مبانی احتمال مربوط به آن شاخه مورد مطالعه قرار گیرد و بسترهای لازم آماده شود. از این رو و از یک دیدگاه منطقی باید گفت که تحقیقات درباره نظریه احتمال فازی، مقدم بر تحقیقات درباره آمار فازی است. بنابراین، دست کم در بعضی از شاخه‌ها، باید در انتظار گسترش نظریه احتمال فازی بود تا بر پایه آن بتوان آمار فازی را گسترش داد. (درباره استنتاج احتمالی بر اساس مفاهیم نادقیق، مقاله جدید پروسورزاده [۱۲۳] شایان توجه است.)

۴-۱ کارآیی روشهای فازی در علم آمار

بحث بین موافقین استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی و مخالفین، کم و بیش ادامه دارد و به نظر می‌رسد که همزمان با گسترش استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی در شاخه‌های گوناگون آمار، این مناقشات نیز گسترش یابد.

گرچه بعضی از مقاومتها، ناشی از عدم درک صحیح ادعاها و قابلیت‌های نظریه مجموعه‌های فازی است، اما این نکته را باید به خاطر

راز^{۴۶} [۱۱۴]، کاناگاوا و همکاران^{۴۷} [۵۹] اشاره کرد. معماریانی و حیدری [۱۴] یک نوع نمونه‌گیری را که معمولاً در کنترل کیفیت محصولات صنعتی استفاده می‌شود، در نظر گرفته‌اند و حالتی که پارامترهای طرح نمونه‌گیری فازی اند را مورد بررسی قرار داده‌اند. بعضی از مباحث نظریه اطلاع به حالتی که داده‌های نمونه فازی باشند، تعمیم داده شده‌اند. برای مثال هیل و لویز^{۴۸} [۵۱] مفهوم اطلاع فشر را به حالتی که گفته شد تعمیم داده‌اند. صادق‌پور و زیان [۹۳] تیمی از قضیه راثو-بلکول را مطرح کرده‌اند. مبحث بسندگی و بعضی مباحث دیگر نیز توسط مندز و همکاران^{۴۹} [۷۸ و ۷۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.

لویز و هیل [۷۳] مباحثی از استنباط آماری را مانند برآورد و آزمون فرض، در چارچوب نظریه تصمیم فازی با توابع زبان فازی، بررسی کرده‌اند. بر پایه بعضی مدل‌های رگرسیون فازی، سیدحسینی و کامران [۳] آنالیز واریانس فازی را مورد توجه قرار داده‌اند (نیز ر.ک. به [۸۹]). استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی در تحلیل داده‌های فضایی^{۵۰} و آمار جغرافیایی^{۵۱} توسط محققان بسیاری مورد توجه واقع شده است. برای نمونه، لی [۷۱] برای تحلیل آماری داده‌های جغرافیایی، یک شبکه عصبی - فازی را معرفی کرده و به کار می‌گیرد. برای دو نمونه دیگر از تحقیقات در این باره می‌توان به [۲۲ و ۷۰] اشاره کرد. گارسیا و همکاران^{۵۲} [۴۶] نمونه‌گیری طبقه‌ای با مشاهدات فازی را در نظر گرفته‌اند و یک برآوردگر برای امید ریاضی متغیر فازی در این نمونه‌گیری ارائه داده‌اند.

فیتل [۱۱۰] با معرفی روشی برای انتگرال‌گیری از یک تابع فازی مقدار، چگونگی به دست آوردن تابع توزیع پسین را بر پایه داده‌های فازی وقتی تابع چگالی پیشین، فازی باشد، تشریح کرده است. بر این

^{۴۶} Wang and Raz

^{۴۷} Kanagava et al.

^{۴۸} Gil and Lopez

^{۴۹} Menendez et al.

^{۵۰} Spatial Statistics

^{۵۱} Geostatistics

^{۵۲} Garcia et al.

^{۵۳} Viertl and Hareter

گامهای نخستین بوده و هنوز نظریه جامعی در این باره حاصل نشده است.

اصولا یک مسئله آزمون فرض را می توان از جنبه های گوناگون تعمیم داد: متغیر تصادفی معمولی به متغیر تصادفی فازی، مشاهده دقیق به مشاهده نادقیق، فرضهای معمولی به فرضهای مبهم، تصمیم گیری دو مقداره (رد یا قبول یک فرض) به تصمیم گیری منعطف و فازی و ... بنابراین روشهای آزمون فرض در زمینه های مختلف فازی می تواند از جهات گوناگون گسترش یابد. برشمردن همه موضوعهای تحقیق که در این زمینه ها در پیش روست دشوار می باشد اما موضوعهای زیر نمود بیشتری در افق آینده دارند:

(الف) تعمیم روشهای آزمون فرض برای حالتی که زبان ناشی از تصمیم گیری، نادقیق باشند.

(ب) تعیین ملاک بهینگی برای مقایسه آزمونهایی که در زمینه فازی پیشنهاد شده اند.

(ج) گسترش شیوه های آزمون فرضهای فازی به مباحثی مانند رگرسیون.

(د) تعمیم روشهای آزمون فرض در قالب نظریه تصمیم فازی و نظریه مطلوبیت فازی.

(ه) تعمیم آزمونهای کلاسیک (مانند آزمون درباره میانگین یک جامعه، آزمون مقایسه میانگینهای دو جامعه، آزمون مقایسه نسبتهای آزمونهای استقلال و ...) به آزمونهای مناسب در زمینه فازی.

۴-۴ رگرسیون

مبحث رگرسیون بین نظریه پردازان و دانشمندان علوم کاربردی، و از سویی دیگر بین آماردانها مورد توجه بوده و هست. همچنان که تاکنون مطالعات بسیاری درباره رگرسیون فازی انجام گرفته است، پیش بینی می شود در آینده نیز مطالعات چشمگیری در این زمینه صورت گیرد.

بسترها و ظرفیتهای بسیاری در هر دو زمینه نظری و کاربردی در این باره وجود دارد. در اینجا به چند موضوع که به نظر می رسد میدان تحقیق در آنها وسیع است، اشاره می کنیم.

(الف) مقایسه ای جامع بین روشهای رگرسیون معمولی و روشهای رگرسیون فازی، بر حسب مفروضات اولیه، زمینه های کاربرد، محدودیتها و تواناییها و ...

داشت که اصولا یک نظریه، هنگامی تقویت و تأیید می شود که در برابر مقاومتها، محکها و آزمونهای جدی قرار گیرد و از این آزمونها سر بلند بیرون آید. به تعبیر فیلسوفان علم، رشد جریان علم در بستر اثباتها و ابطالها، و از دیدگاهی دیگر حدسها و ابطالها، است و این چیزی است که در مورد نظریه مجموعه ها و سیستمهای فازی اتفاق افتاده است و در آینده نیز اتفاق خواهد افتاد.

هم اکنون، علیرغم بعضی دیدگاه های منتقدانه از هر دو سو، مباحث درباره مکمل بودن روشهای آمار کلاسیک و روشهای آمار فازی رو به گسترش است. خواننده علاقمند می تواند، برای نمونه، به [۵، ۵۲، ۶۵، ۶۹ و ۱۲۲] مراجعه کند. از سوی دیگر، این توهم که گویی هدف آن است که نظریه مجموعه های فازی، جانشین همه روشهای متداول شود، به مرور زمان از بین رفته است و با درک صحیح این نظریه و درک صحیح اهداف آن همگراییها بیشتر شده و تحقیقات مشترک رو به گسترش است. به هر حال پیش بینی می شود که بحث درباره میزان کارایی نظریه مجموعه های فازی در مطالعات آماری، به ویژه مقایسه روشهای معمولی و روشهای مبتنی بر این نظریه، یکی از چالشهای فراروی باشد.

۴-۲ برآورد

هنوز بسیاری از مفاهیم و روشهای کلاسیک که در برآورد نقطه ای و برآورد فاصله ای (فاصله اطمینان) استفاده می شوند در آمار فازی به کار گرفته نشده اند. مفاهیمی مانند بسندگی، نااریبی و سازگاری و کارایی در مورد برآوردهای نقطه ای، و از سوی دیگر مفاهیمی مانند فاصله اطمینان نااریب، کوتاهترین فاصله اطمینان و ... درباره برآوردهای فاصله ای هنوز به طور جدی در چارچوب نظریه فازی مطالعه نشده اند. البته در این مورد نکته ای که در مقدمه این بخش بیان کردیم، یعنی توالی منطقی احتمال فازی و آمار فازی، حائز اهمیت است.

در هر صورت، در زمینه برآورد، به ویژه در موضوعهایی که برشمردیم، میدانهای وسیع برای تحقیق و پژوهش وجود دارد که قطعا توسط احتمال - آماردانهای فازی مورد توجه قرار خواهد گرفت.

۴-۳ آزمون فرض

همچنان که در بخش ۲-۳ اشاره شد، توانمند کردن آزمونهای آماری با استفاده از مفاهیم و روشهای نظریه مجموعه های فازی، از چند جنبه مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. البته آنچه صورت گرفته،

شایسته است از هم اکنون این موضوع، مورد توجه گروههای آموزشی آمار دانشگاهها و نیز گروههای پژوهشی مؤسسات آماری قرار گیرد.

پی نوشتها

- (۱) گفته شود که یک کتاب نیز با عنوان **کاربردهای آماری مجموعه‌های فازی** [۷۶] در سال ۱۹۹۴ منتشر شده است. محتوای این کتاب چندان با عنوان آن سازگاری ندارد و صرفاً مباحث خاصی در تحلیل داده‌های طولی^{۵۵} را شامل می‌شود (نیز ر.ک. به [۷۵]). همچنین دو بخش از کتاب **تحلیل داده‌های فازی** [۲۰] به مباحثی از احتمال فازی و رگرسیون فازی اختصاص دارد.
- (۲) این نکته که فرضهای دقیق، مانند فرض $\theta = \theta_0$ ، فرضهایی واقعی نیستند، توسط بعضی آماردانها مورد توجه و نقادی قرار گرفته است. برای نمونه می‌توان به مقاله برگر و دلامپادی^{۵۶} [۲۴] اشاره کرد.
- (۳) شاید بتوان این رهیافت را از جهت مقابل نیز به کار گرفت. مجموعه‌ای از قوانین اگر-آنگاه را همانند مجموعه‌ای از مشاهدات یک رگرسیون فازی در نظر گرفت. در این صورت مسائل کنترل فازی، که بر پایه روشهای استنتاج فازی صورت می‌گیرند، به مسائل رگرسیونی تبدیل می‌شوند.
- (۴) رویکرد مؤسسات آماری به نظریه فازی شایان ذکر است. برای نمونه می‌توان به انستیتو آمارهند (*ISI*) اشاره کرد. این انستیتو که مقر آن در شهر کلکته هند است (و البته شعباتی در شهرهای دیگر هند نیز دارد) با بیش از نیم قرن سابقه، از اعتبار بین المللی قابل ملاحظه‌ای در مجامع علمی آمار برخوردار بوده و ناشر مجله معروف شانکیا^{۵۷} است. انستیتو آمار هند در فوریه ۲۰۰۲ میزبان و برگزار کننده پنجمین کنفرانس بین المللی سیستمهای فازی، از سری کنفرانسهای دو سالانه *AFSS* (انجمن آسیایی مجموعه‌ها و سیستمهای فازی) بود.

ب) تعیین ملاکهای جامع برای بهینگی، به منظور مقایسه روشهای مختلف رگرسیون فازی.

ج) رگرسیون فازی که در آن مشاهدات نادقیق (مربوط به متغیرهای مستقل و متغیر وابسته) همانند قوانین اگر-آنگاه^{۵۸} تلقی می‌شوند (پی نوشت ۳) [۱۲].

۴-۵ آمار بیزی

آمار بیزی از جمله شاخه‌هایی از آمار است که پیش بینی می‌شود گسترشهای بسیاری را در تلفیق با نظریه مجموعه‌های فازی داشته باشد. این نکته، هم بدان جهت است که آمار بیزی، و به طور کلی روشهای بیزی، مورد توجه ویژه محققان در زمینه‌های کاربردی نظریه مجموعه‌های فازی قرار گرفته است.

تلفیق روشهای آمار بیزی و ابزارهای نظریه مجموعه‌های فازی، زمینه گسترده‌ای دارد اما به نظر می‌رسد مباحثی مانند استفاده از توزیعهای پیشین نادقیق در استنباط بیزی، برآورد گره‌های بیز در زمینه فازی و تحت توابع زبان مختلف، استنباط بیزی با تابع زبان فازی و ... در آینده مورد توجه بیشتر قرار گیرد.

همین جا می‌توان به استفاده از روشهای فازی در چارچوب نظریه تصمیم نیز اشاره کرد. باید گفت موضوعهایی مانند استفاده از توابع زبان فازی، توابع مطلوبیت نادقیق و توابع تصمیم فازی، افقهای جدیدی رویاروی نظریه تصمیم خواهد گشود.

۵. جمع بندی و نتیجه گیری

به کارگیری توأم روشهای نظریه مجموعه‌های فازی و روشهای کلاسیک آماری رو به گسترش است (پی نوشت ۴). در این مقاله از دو جنبه به این موضوع پرداختیم. نخست، پژوهشهای کلیدی را که تاکنون در شاخه‌های گوناگون آمار فازی انجام شده است، مرور و آنگاه دورنمایی از وضعیت آینده را ترسیم کردیم. به علاوه برای پژوهشگران علاقمند به آمار فازی، موضوعهایی را معرفی کردیم که قابلیتهای پژوهشی در آنها وجود دارد و یا این که نیازهای کاربردی، مستلزم مطالعه بیشتر در آن موضوعها است.

و سخن آخر، پیش بینی می‌شود که در آینده‌ای نه چندان دور، آمار و احتمال فازی، به یک گرایش مهم در آمار و احتمال تبدیل شود.

^{۵۵} Longitudinal Data

^{۵۶} Berger and Delampady

^{۵۷} Sankhya

^{۵۸} If - Then Rules

مراجع

- [۱] ارقامی، ناصر رضا؛ ۱۳۷۱، مروری بر رگرسیون فازی، گزارش اولین سمینار مجموعه های مشکک و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [۲] برزونی، رجبعلی؛ ۱۳۸۱، (ویراستار)، مباحثی در مجموعه های فازی (مجموعه مقالات)، دانشگاه سیستان و بلوچستان.
- [۳] سید حسینی، محمد؛ شهنائی، کامران؛ ۱۳۸۱، اندازه گیری اثرات متغیرهای توصیفی همراه با تعاملات آنها با استفاده از روش آنالیز واریانس فازی، گزارش سومین همایش مجموعه های فازی و کاربردهای آن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۸۳ - ۷۵.
- [۴] طاهری، محمدرضا؛ ۱۳۷۴، اعداد فازی و رگرسیون فازی، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه تربیت معلم.
- [۵] طاهری، سید محمود؛ ۱۳۷۴، امکان و احتمال به عنوان دو رهیافت به عدم اطمینان، پیک ریاضی، ج ۶، ش ۱: ۴۲ - ۱۹.
- [۶] طاهری، سید محمود؛ ۱۳۷۵، آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.
- [۷] طاهری، سید محمود؛ ارقامی، ناصر رضا؛ ۱۳۷۵، متغیرهای تصادفی فازی، گلچین ریاضی، ج ۳، ش ۱: ۱۵ - ۶.
- [۸] عسگری، جواد؛ لوکس، کارو؛ ۱۳۷۴، معیاری جدید برای مرغوبیت برآزش با اطلاعات فازی، مجله بین المللی علوم مهندسی، ج ۶، ش ۱: ۸ - ۱.
- [۹] غفاری، علی و همکاران؛ ۱۳۷۷، تفکر فازی (ترجمه)، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.
- [۱۰] ماشین چی، ماشاءا...؛ ۱۳۷۸، تاریخچه مختصری از ریاضیات مشکک، اندیشه آماری، ج ۴، ش ۱: ۱۴ - ۱۰.
- [۱۱] ماشین چی، ماشاءا...؛ ۱۳۷۹، مجموعه های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [۱۲] ماشین چی، ماشاءا...؛ ۱۳۷۹، رگرسیون با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک، اندیشه آماری، ج ۵، ش ۲: ۱۹ - ۱۳.
- [۱۳] مجدی، سعید؛ طاهری، سید محمود؛ علامت ساز، محمد حسین؛ ۱۳۸۱، رگرسیون خطی با ضرائب فازی، گزارش ششمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه تربیت مدرس.
- [۱۴] معماربانی، عزیزا...؛ حیدری، مهدی؛ ۱۳۷۸، تعیین مشخصه های کیفی در نمونه گیری یک مرحله ای با پارامترهای فازی، مجله بین المللی علوم مهندسی، ج ۱۰، ش ۴: ۶۸ - ۶۱.
- [۱۵] یلتقیان، فرانک؛ ۱۳۷۸، رگرسیون فازی، پایان نامه کارشناسی ارشد صنایع، دانشگاه صنعتی شریف.

[16] Arnold, B.F., 1995, *Statistical Tests Optimally Meeting Certain Fuzzy Requirements on the Power Function and on the Sample Size*, Fuzzy Sets Syst., 75: 365- 372.

[17] Arnold, B.F., 1996, *An Approach to Fuzzy Hypothesis Testing*, Metrika, 44: 119-126.

[18] Arnold, B.F., 1998, *Testing Fuzzy Hypothesis with Crisp Data*, Fuzzy Sets Syst., 94: 323- 333.

[19] Arnold, B.F. and Stahlecker, P., 1998, *Perdiction in Linear Regression Combining Crisp Data and Fuzzy Prior Information*, Statistics and Decisions, 16: 19-33.

[20] Bandemer, H. and Nather, W., 1992, *Fuzzy Data Analysis*, Kluwer, Dordrecht.

[21] Bardossy, A., 1990, *Note on Fuzzy Regression*, Fuzzy Sets Syst., 37: 65-75.

[22] Bardossy, A., Kelly, W.E., and Bogardi, I., 1998, *Imprecise (Fuzzy) Information in Geostatistics*, Math. Geol., 20: 189- 203.

- [23] Behboodian, J. and Mohammadpour, A., 2002, *Estimation of a Fuzzy Parameter and Its Application in Hypothesis Testing*, Proc. of the Third Seminar on Fuzzy Sets and Its Applications, University of Sistan and Baluchetsan, pp:23-45.
- [24] Berger, J.O. and Delampady, M., 1987, *Testing Precise Hypothesis*, Stat. Sci., 2: 317- 352.
- [25] Bertoluzza, C., Gil, M.A. and Ralescu, D.A. (Eds.), 2002, *Statistical Modeling, Analysis and Mangement of Fuzzy Data*, Springer.
- [26] Bezdek, J. and Pal, S., 1992, *Fuzzy Models for Pattern Recognition*, IEEE Press, New York.
- [27] Boswell, S.B., 1987, *A Central Limit Theorem for Fuzzy Random Variables*, Fuzzy Sets Syst., 24: 331-344.
- [28] Buckley, J.J., 1985, *Fuzzy Decision Making with Data: Applications to Statistics*, Fuzzy Sets Syst., 16: 139-147.
- [29] Buckley, J.J. and Eslami, E., 2002, *An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*, Springer.
- [30] Cai, K.Y., 1993, *Parameter Estimators of Normal Fuzzy Variables*, Fuzzy Sets Syst., 55: 179- 185.
- [31] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil, P., 1986, *On the Use of Zadeh's Probabilistic Defintion for Testing Statistical Hypothesis from Fuzzy Information*, Fuzzy Sets Syst., 20: 175- 190.
- [32] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil, P., 1986, *The Fuzzy Decision Problem :An Approach to the Problem of Testing Statistical Hypothesis with Fuzzy Information*, Euro. J. Oper. Res., 27: 371-382.
- [33] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil, P., 1989, *A Note on the Operativeness of Neyman- Pearson Tests with Fuzzy Information*, Fuzzy Sets Syst., 30: 215- 220.
- [34] Casals, M.R., 1993, *Bayesian Testing of Fuzzy Parametric Hypothesis from Fuzzy Infromation*, RAIRO, Operations Research, 27: 189-199.
- [35] Celmins, A., 1987, *Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data*, Fuzzy Sets Syst., 22: 260- 269.
- [36] Chang, Y.O., 2001, *Hybrid Fuzzy Least- Squares Regression Analysis and Its Reliability Measure*, Fuzzy Sets Syts., 119: 225- 246.
- [37] Cheng, C.B. and Lee, E.S., 1999; *Applying Fuzzy Adaptive Network to Fuzzy Regression Analysis*, Comput. Math. Appl., 38: 123- 140.
- [38] Corral, N. and Gil, M.A., 1984, *The Minimum Inaccuracy Fuzzy Estimation: An Extention of the Maximum Likelihood Principle*, Stochastica, 6: 63- 81.
- [39] Corral, N. and Gil, N., 1988, *A Note on Interval Eatimation with Fuzzy Data*, Fuzzy Sets Syst. 28: 209-215.
- [40] Dale, D.I., 1980, *Probability, Vague Statements, and Fuzzy Sets*, Philos. Science, 47: 38- 55.
- [41] Delgado, M., Verdegay, J.L., and Vial, M.A., 1985, *Testing Fuzzy Hypotheses, A Bayesian Approach*, In: Gupta, M.M., et al. (Eds.), *Approximate Reasoning in Expert Systems*, Elsevier.
- [42] Diamond, P., 1987, *Least Squares Fitting of Several Fuzzy Variavbles*, Proc. of the Second IFSA Congress, Tokyo, pp: 20- 25.
- [43] Dubois, D. and Prade, H., 1986, *Fuzzy Sets and Statistical Data*, Euro. J. Oper. Res., 25: 345- 356.
- [44] Dubois, D. and Prade, D., 1993, *Fuzzy Sets and Probability : Misunderstanding, Bridges, and Gaps*, In: Proc. of the Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Piscataway, pp: 1059- 1068.
- [45] D'Urso, P. and Gastaldi, T., 2000, *A Least- Squares Approcach to Linear Regression Analysis*, Comp. Stat. and Data Anal., 34: 427- 440.

- [46] Garcia, D., Lubiano, M.A. and Alonso, C.M., 2001, *Estimating the Expected Value of Fuzzy Random Variables in the Stratified Random Sampling from Finite Populations*, Inform. Sci., 138: 165- 184.
- [47] Gertner, G.Z. and Zhu, H., 1997, *Bayesian Estimation in Forest Surveys when Samples Prior Information are Fuzzy*, Fuzzy Sets Syst., 77: 277- 290.
- [48] Gil, M.A., Gorral, N. and Gil, P., 1985, *The Fuzzy Decision Problem: An Approach to the Point Estimation Problem with Fuzzy Information*, Euro. J. Oper. Res., 22: 26- 34.
- [49] Gil, M.A., Corral, N. and Gil, P., 1985, *The Minimum Inaccuracy Estimates in χ^2 Tests for Goodness of Fit with Fuzzy Observations*, J. Stat. Plan. Inf., 19: 95- 115.
- [50] Gil, M.A., Corral, N. and Casals, M.R., 1989, *The Likelihood Ratio Test for Goodness of Fit with Fuzzy Experimental Observation*, IEEE Trans. System Man Cybernet., 19: 771-779.
- [51] Gil, M.A. and Lopez, M.T., 1993, *The Fisher Information Associated with a Fuzzy Information System*, Inform. Sci., 77: 277- 290.
- [52] Goodman, I.R. and Nguyen, H.T., 2002, *Fuzziness and Randomness*, In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.) , *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data*, Springer, pp: 3-24.
- [53] Grzegorzewski, P., 2000, *Testing Statistical Hypothesis with Vague Data*, Fuzzy Sets Syst., 112: 502- 510.
- [54] Grzegorzewski, P., 2002, *Testing Fuzzy Hypotheses with Vague Data*, In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.) *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data*, Springer, pp: 213- 225.
- [55] Hathaway, R.J. and Bezdek, J.C., 1986, *On the Asymptotic Properties of Fuzzy C-Means Cluster Prototypes as Estimators of Mixture Subpopulation Centers*, Commun. Statist., Theory and Methods, 15: 505-513.
- [56] Heshmaty, B. and Kandel, A., 1985, *Fuzzy Linear Regression and Its Applications to Forecasting in Uncertain Environment*, Fuzzy Sets Syst., 15: 159- 191.
- [57] Hisdal, B., 1988, *Are Grades of Membership Probabilities?*, Fuzzy Sets Syst., 25: 325- 348.
- [58] Hong, D.H., Song, J. and Do, H.Y., 2001, *Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis Using Shape Preserving Operations*, Inform. Sci., 138: 185- 193.
- [59] Kanagava, A., Tamaki, F. and Ohta, H., 1993, *Control Charts for Process Average and Variability Based on Linguistic Data*, Int. J. Production Research, 2: 913- 922.
- [60] Kandel, A., 1978, *Fuzzy Statistic and Forecast Evaluation*, IEEE Trans. on System Man and Cybernet., Vol. SMC-8, No. 5: 369- 401.
- [61] Kandel, A. and Byatt, W.J., 1978, *Fuzzy Sets, Fuzzy Algebra, and Fuzzy Statistics*, Proc. of the IEEE Vol. 66, No. 12: 1619- 1639.
- [62] Kersten, P.R., 1999, *Fuzzy Order Statistics and their Application to Fuzzy Clustering*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 7: 708- 712.
- [63] Kim, K.J., Moskowitz, H. and Koksalan, M., 1996, *Fuzzy Versus Statistical Linear Regression*, Euro. J. Oper. Res., 92: 417- 434.
- [64] Korner, R., 1990, *An Asymptotic α -Test for Expectation of Random Fuzzy Variables*, J.Stat.Plan.Inf., 83: 331 - 346.

- [65] Kosko, B., 1990, *Fuzziness Vs. Probability*, Inter. J. General Systems, 17: 211- 240.
- [66] Kruse, R., 1984, *Statistical Estimation with Linguistic Data*, Infom. Sci., 33: 197- 207.
- [67] Kruse, R. and Meyer, K.D., 1987, *Statistics with Vague Data*, Reidal Publ. Comp., Dordech, Netherlands.
- [68] Last, M., Schenker, A. and Kandel, A., 1999, *Applying Fuzzy Hypothesis Testring to Medical Data*, In Zhong, N.; Skowron, A.; Ohsuga, S. (Eds.), *New Directions in Rough Sets, Data Minung, and Granular- Soft Computing*, Lecture Notes in Artificial Intelligence Series, Vol. 1711, Springer, pp: 221- 229.
- [69] Laviolette, M. and Seaman, J.W., 1992, *Evaluating Fuzzy Representations of Uncertainty*, The Mathematical Scientist, 17: 26- 41.
- [70] Lee, E.S., 1995, *Fuzzy Spatial Statistics*, In: *Selected Papres of Engineering Chemistry and Metallurgy*, Institute of Chemical Metallurgy, Chinese Academy of Science, pp: 151- 157.
- [71] Lee, E.S., 2000, *Neuro-Fuzzy Estimation in Spatial Statistics*, J. Math. Anal. Appl., 249: 221- 231.
- [72] Lopez-Diaz, M. and Gil, M.A., 1997, *Constructive Definitions of Fuzzy Random Variables*, Stat. and Prob. Letters, 36: 135- 143.
- [73] Lopez-Diaz, M. and Gil, M.A., 1998, *Reversing the Order of Integration in Iterated Expectations of Fuzzy Random Variables, and Statistical Applicarions*, J. Stat. Plan. Inf., 74: 11-29.
- [74] Luczynski, W. and Matolka, M., 1995, *Fuzzy Regression Models and Their Applications*, J. Fuzzy Math., 3: 583- 589.
- [75] Manton, K.G., Stallard, E. and Woodbury, M.A., 1991, *A Multivariate Event History based upon Fuzzy States: Estimation from Longitudinal Surveys with Informative Nonresponse*, J. Official Statistics, 7: 261- 293.
- [76] Manton, K.G., Woodbury, M.A. and Tolley, D.H., 1994, *Statistical Applications Using Fuzzy Sets*, Wiley, New York.
- [77] McCain, R.A., 1983, *Fuzzy Confidence Intervals*, Fuzzy Sets Syst., 10: 281- 290.
- [78] Menendez, M.L., Pardo, J.A. and Pardo, L., 1989, *Sufficient Fuzzy Information Systems*, Fuzzy Sets Syst., 32: 97- 105.
- [79] Memendez, M.L., Pardo, J.A. and Pardo, L., 1992, *Some Statistical Applications of Generalized Jensen Difference Divergence Measures for Fuzzy Information Systems*, Fuzzy Sets Syst., 52: 169-180.
- [80] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A. and Gil, M.A., 2001, *Two-Sample Hypothesis Tests of Means of a Fuzzy Random Variables*, Infom. Sci., 133: 89-100.
- [81] Nather, W. and Korner, R., 1998, *Linear Regression with Random Fuzzy Numbers*, In: Ayyub, B.M.; Gupta, M.M. (Eds.), *Uncertainty Analysis in Engineering and Science*, Kluwer, pp: 193- 211.
- [82] Niculescu, S.P. and Viertl, R., 1989, *A Comparison between two Fuzzy Estimators for the Mean*, Fuzzy Sets Syst., 48: 341- 350.
- [83] Okuda, T., 1987, *A Statistical Treatment of Fuzzy Observations: Estimation Problems*, Preprints of the Second IFSA Congress, pp: 51- 55.
- [84] Paris, M.G.A., 2001, *Nearly Ideal Binary Communication in Squeezed Channels*, Physical Review A, 64: 14304- 14308.
- [85] Perters, G., 1994, *Fuzzy Linear Regression with Fuzzy Intervals*, Fuzzy Sets Syst., 63: 45-55.

- [86] Proske, F.N. and Puri, M.L., 2001, *Central Limit Theorem for Banach Space Valued Fuzzy Random Variables*, Proc. Amer. Math. Soc., 130: 1493- 1501.
- [87] Puri, M.L. and Ralescu, D.A., 1986, *Fuzzy Random Variables*, J. Math. Anal. Appl., 114: 409- 422.
- [88] Reden, D. and Woodall, W., 1994, *Properties of Certain Fuzzy Linear Regression Methods*, Fuzzy Sets Syst., 65: 361- 375.
- [89] Rojas, L., Ortega, J., Pelayo, F.J. and Prieto, A., 1999, *Statistical Analysis of the Main Parameters in the Fuzzy Inference Process*, Fuzzy Sets Syst., 102: 157- 173.
- [90] Romer, C. and Kandel, A., 1995, *Statistical Tests for Fuzzy Data*, Fuzzy Sets Syst., 72: 1-26.
- [91] Sakawa, M. and Yano, H., 1991, *Multiobjective Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Data*, Fuzzy Sets Syst., 47: 173- 181.
- [92] Sadeghpour, B. and Gien, D., 2002, *A Goodness of Fit Index to Reliability Analysis in Fuzzy Model*, 3rd WSES Int. Conf. on Fuzzy Sets and Fuzzy Systems, Interlaken, Switzerland.
- [93] Sadeghpour, B. and Gien, D., 2002, *Dp, q-Distance and Rao- Blackwell Theorem for Fuzzy Random Variables*, 8th Int. Conf. on Fuzzy Theory and Tech., Durham, USA.
- [94] Salas, A., Corral, N. and Bertoluzza, C., 2002, *Linear Regression in a Fuzzy Context: The Least Square Method*, In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.), *Statistical Modelling, Analysis and Management of Fuzzy Data*, Springer, pp: 255-281.
- [95] Schnatter, S., 1992, *On Statistical Inference for Fuzzy Data with Applications to Descriptive Statistics*, Fuzzy Sets Syst., 50: 143-165.
- [96] Schnatter, S., 1993, *On Fuzzy Bayesian Inference*, Fuzzy Sets Syst., 60: 41-58.
- [97] Schneider, M. and Kandel, A., 1998, *Properties of the Expected Value and the Fuzzy Expected Interval*, Fuzzy Sets Syst., 26: 373- 385.
- [98] Schneider, M. and Craig, M., 1992, *On the Use of Fuzzy Sets in Histogram Equalization*, Fuzzy Sets Syst., 45: 271-278.
- [99] Son, J.C., Song, I. and Kim, H.Y., 1992, *A Fuzzy Decision Problem Based on the Generalized Neyman-Pearson Criterion*, Fuzzy Sets Syst., 47: 65- 75.
- [100] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 1999, *Neyman-Pearson Lemma for Fuzzy Hypotheses Testing*, Metrika, 49: 3-17.
- [101] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 2001, *A Bayesian Approach to Fuzzy Hypotheses Testing*, Fuzzy Sets Syst. 123: 39- 48.
- [102] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 2002, *Fuzzy Hypothesis Testing with Fuzzy Data: A Bayesian Approach*, In: Nikhil, R.P., Sugeno, M. (Eds.), *Advances in Soft Computing AFSS 2002*, Springer, pp: 527- 533.
- [103] Taheri, S.M., 2003, *Trends in Fuzzy Statistics*, Austrian J. Stat. Vol. 32, No. 3.
- [104] Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K., 1979, *Fuzzy Information and Decision in Statistical Model*, In Gupta, M.M., et al. (Eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, North Holland, Amsterdam, pp: 303- 320.
- [105] Tanaka, H., Uejima, S. and Asai, K., 1982, *Linear Regression Analysis with Fuzzy Model*, IEEE Trans. Systems Man Cybernet., 12: 903- 907.

- [106] Tanaka, H. and Lee, H., 1998, *Interval Regression Analysis by Quadratic Programming Approach*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 6: 473-481.
- [107] Toyoura, Y. and Watada, J., 2000, *Evaluation of Fuzzy Regression Analysis*, Proc. of the Fourth Asian Fuzzy Systems Symposium, Tsukuba, Japan, pp: 1015- 1020.
- [108] Viertl, R., 1987, *Is it Necessary to Develop a Fuzzy Bayesian Inference?*, In: Viertl, R. (Ed.), *Probability and Bayesian Statistics*, Plenum Press, New York.
- [109] Viertl, R., 1996, *Statistical Methods for Non-Precise Data*, CRC Press.
- [110] Viertl, R., 1999, *Statistics and Integration of Fuzzy Functions*, Environmetrics, 10: 487- 491.
- [111] Viertl, R. and Hule, H., 1991, *On Bayes Theorem for Fuzzy Data*, Statistical Papers, 32: 115- 122.
- [112] Viertl, R. and Hareter, D., 2002, *Bayes Theorem for Non-Precise A-Priori Distribution and Non-Precise Data*, Preprint.
- [113] Wang, Z.Y. and Li, S.M., 1990, *Fuzzy Linear Regression Analysis of Fuzzy Valued Variables*, Fuzzy Sets Syst. 36: 125- 136.
- [114] Wang, J.H. and Raz, T., 1990, *On the Construction of Control Charts Using Linguistic Variables*, Inter. J. Production Research, 28: 477-487.
- [115] Watanabe, N., 1996, *Fuzzy Random Variables and Statistical Inference*, Japanese J. Fuzzy Theory and Systems, 8: 833- 846.
- [116] Watanabe, N. and Imaizumi, T., 1993, *A Fuzzy Statistical Test of Fuzzy Hypotheses*, Fuzzy Sets Syst., 53: 167-178.
- [117] Wu, H.C., 1997, *Fuzzy Reliability Analysis Based on Closed Fuzzy Numbers*, Inform. Sci., 103: 135- 159.
- [118] Xu, R., 1997, *S-Curve Regression Model in Fuzzy Environment*, Fuzzy Sets Syst., 90: 317- 326.
- [119] Yang, M.S., 1993, *On a Class of Fuzzy Classification Maximum Likelihood Procedures*, Fuzzy Sets Syst., 57: 365-375.
- [120] Zadeh, L.A., 1965, *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8: 338- 359.
- [121] Zadeh, L.A., 1973, *The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning , Part I*, Inform. Sci., 8: 199-249.
- [122] Zadeh, L.A., 1995, *Probability and Fuzziness are Completibility rather than Contradictory*, Technometrics, 37: 271- 277.
- [123] Zadeh, L.A., 2002, *Toward a Perception-Based Theory of Probabilistic Reasoning with Imprecise Probabilities*, J. Stat. Plan. Inf., 105: 233-264.