

تأثیر نادیده گرفتن همبستگی در داده های طولی یا زوج شده بر استنباط پارامترها

مجتبی گنجعلی^۱ جواد قاسمیان^۲

چکیده

در مواقعی که اندازه گیری از یک صفت خاص، روی داده های طولی^۳ (دیگل^۴ و دیگران، ۱۹۹۴) یا زوج شده^۵ (اگرستی^۶، ۱۹۹۴) در مقاطع زمانی مختلف انجام می دهیم، بحث همبستگی بین داده ها مطرح می شود. در این مقاله، با استفاده از داده های دودویی که در آن متغیر پاسخ، نشان دهنده داشتن یا نداشتن آسم است، نشان می دهیم که در نظر گرفتن یا نگرفتن این همبستگی، چه تأثیری بر نتایج برآورد پارامترها و انحراف استاندارد برآوردکننده های پارامترهای متناسب با متغیرهای توصیفی، دارد. واژه های کلیدی: پاسخهای دودویی، مدل پرویت دو متغیره، متغیر پنهان، متغیر توصیفی مانا، آسم.

۱. مقدمه

داده های طولی در آزمایشهایی رخ می دهند که یک دنباله از اندازه گیریها، بر روی تعدادی آزمودنی در زمانهای مختلف به دست می آید. هرچند که واحدهای مختلف از هم مستقلند، ولی پیشرفتهای اخیر در تحلیل این گونه داده ها، تأکید بر استفاده از مدلهایی دارند که وابستگی بین اندازه گیریهای متعلق به آزمودنی یکسان را در نظر می گیرند. در این مقاله نشان می دهیم که در نظر نگرفتن این وابستگی، هر چند روی برآورد پارامترها تأثیری ندارد ولی موجب بیش یا کم برآورد کردن خطای استاندارد برآوردکننده های پارامترهای مدل می شود. دربخش بعد، داده های دودویی داشتن یا نداشتن آسم، [۶] و دربخش ۳ مدل پرویت دو متغیره را معرفی کرده ایم. دربخش ۴ تابع درستمایی بیان و در نهایت، دربخش ۵، تحلیل آماری داده های بخش ۲، با و بدون در نظر گرفتن همبستگی آورده شده است.

۲. داده های آسم

در این مقاله از داده های مربوط به آسم استفاده کرده ایم. این داده ها از ۶ شهرستان منطقه هاروارد اهایو جمع آوری شده اند، به این ترتیب که ۷۰۶ پسر و ۷۱۳ دختر سفیدپوست را در ۹ سالگی و دوباره در ۱۳ سالگی از نظر ابتلا یا عدم ابتلا به آسم مورد مطالعه قرار داده اند [۶]. می خواهیم تأثیر زمان و جنس را بر احتمال داشتن آسم، از نظر آماری آزمون کنیم. از ۷۰۶ پسر ۱۴۹ نفر و از ۷۱۳ دختر ۱۲۳ نفر در ۱۳ سالگی، از دادن پاسخ مورد علاقه (داشتن یا نداشتن آسم) امتناع کردند. دریک تحلیل جداگانه ملاحظه شد که مکانیزم گم شدن در این داده ها، کاملاً تصادفی است [۴]، بنابراین تحلیل داده های کامل (که در آن تنها آزمودنیهایی در نظر گرفته می شوند که هر دو پاسخ آنها مشاهده

^۵ Paired Data

^۶ Agresti

^۴ Diggle

^۱ گروه آماری دانشگاه شهید بهشتی

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی

^۳ Longitudinal Data

شده است)، برای استنباط آماری کافی است.

در این مدل a ، b و c پارامترهای مدل می‌باشند که باید برآورد شوند. در حالت کلی خطاهای ε_{i1} و ε_{i2} وابسته‌اند و

$$\text{var}(\varepsilon_{it}) = 1; t = 1, 2$$

(در داده‌های دودویی، واریانس دلخواه برای خطاها، در معادله (۱) قابل برآورد نیست [۵]) و

$$\text{cov}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) = \rho$$

در حالت کلی پارامتر ρ باید برآورد شود. اگر فرض کنیم $\rho = 0$ ، می‌توان نشان داد چه اتفاقی در برآورد پارامترها و خطاهای استاندارد برآوردکننده‌های پارامتر مدل، روی می‌دهد.

۴. تابع درستنمایی

برای نیل به هدف نهایی، دو حالت کلی را در نظر می‌گیریم. ابتدا دو متغیر Y_{i1} و Y_{i2} را مستقل فرض کرده و در مرحله بعد همبستگی بین این دو متغیر را در نظر می‌گیریم. تابع درستنمایی برای مدل کلی که همبستگی را در نظر می‌گیرد به صورت زیر است:

$$L(a, b, c, \rho | y_{i1}, y_{i2}, G) = \quad (2)$$

$$\prod_{i=1}^n P(Y_{i1} = y_{i1}, Y_{i2} = y_{i2}) =$$

$$\prod_{i=1}^n p_{00}^{(1-y_{i1})(1-y_{i2})} p_{01}^{(1-y_{i1})y_{i2}} p_{10}^{y_{i1}(1-y_{i2})} p_{11}^{y_{i1}y_{i2}}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P(Y_1 = 0, Y_2 = 0) \\ &= \Phi_r(-a - bG, -a - bG - c, \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{01} &= P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) \\ &= \Phi_r(-a - bG, a + bG + c, -\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{10} &= P(Y_1 = 1, Y_2 = 0) \\ &= \Phi_r(a + bG, -a - bG - c, -\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) \\ &= \Phi_r(a + bG, a + bG + c, \rho), \end{aligned}$$

واضح است که

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1$$

جدول ۱ داده‌های کامل و بدون مقادیر گمشده برای متغیرهای پاسخ در این داده‌ها را نشان می‌دهد. همان‌طور که جدول ۱ نشان می‌دهد ۵۵۷ نفر پسر و ۵۹۰ نفر دختر به هر دو متغیر پاسخ (داشتن یا نداشتن آسم در ۹ و ۱۳ سالگی) جواب داده‌اند. با استفاده از این داده‌ها، نشان می‌دهیم که در نظر گرفتن همبستگی پاسخها در سن ۹ و ۱۳ سالگی، چه تأثیری بر استنباط پارامترها و خطای استاندارد برآوردکننده‌های پارامترها دارد.

۳. مدل مورد استفاده

برای بررسی تأثیر سن و زمان بر متغیر پاسخ (داشتن آسم)، مدل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y_{it}^* = a + bG_i + cI_{i\{age13\}} + \varepsilon_{it} \quad (1)$$

وقتی $t = 1, 2$ ، که در آن برای آزمودنی i ام، G جنس و $I_{i\{age13\}}$ به صورت زیر است:

$$I_{i\{age13\}} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد ۱۳ ساله باشد،} \\ 0 & \text{اگر فرد ۱۳ ساله نباشد،} \end{cases}$$

و ε_{it} برای $t = 1, 2$ خطای اندازه‌گیری متغیر y_{it}^* است. به متغیرهای y_{i1}^* و y_{i2}^* ، متغیرهای پنهان می‌گوییم. این متغیرها خود قابل مشاهده نیستند ولی باعث می‌شوند که پاسخهای گسسته قابل مشاهده باشند. برای مثال داشتن یا نداشتن آسم یک آزمودنی خاص (y_i) به علت وجود متغیر پیوسته دیگری (y_i^*) است که خود مشاهده نشده است ولی وقتی از آستانه خاصی گذر کند، فرد دچار بیماری آسم می‌شود. در این جا مقدار آستانه، صفر فرض شده است. در حالتی که مقدار آستانه مثلاً مقدار d باشد، می‌توان از متغیر $y_i^* - d$ به عنوان متغیر پنهان استفاده کرد. بنابراین ثابت d ، قابل برآورد کردن نیست [۵].

چون داده‌های مشاهده شده، در دو حالت وجود دارند، لذا برای $t = 1, 2$ ، متغیرهای مشاهده شده y_{it} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & ; y_{it}^* > 0 \\ 0 & ; y_{it}^* \leq 0 \end{cases}$$

y_{i1}^* مربوط به سن ۹ سالگی و y_{i2}^* مربوط به سن ۱۳ سالگی است. در ۱۳ سالگی متغیر $I_{i\{age13\}}$ ، وارد مدل شده است که پارامتر متناسب به آن (c) نشان دهنده تأثیر زمان بر ابتلا یا عدم ابتلا به آسم است.

پارامتر مربوط به ρ همبستگی بین پاسخ در ۹ سالگی و ۱۳ سالگی است که باید برآورد شود. این پارامتر در زمان برآورد در فاصله -۱ تا ۱ محدود می‌شود. Φ_r تابع توزیع نرمال دو متغیره را نشان می‌دهد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_r(q_1, q_2, \rho) = \int_{-\infty}^{q_1} \int_{-\infty}^{q_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

که در آن $f(x_1, x_2)$ تابع چگالی نرمال دو متغیره استاندارد شده است. از آنجا که تابع ms در S -Plus مجموعه‌ای از توابع غیرخطی را برای برآورد پارامترها با استفاده از روش بهینه‌سازی شبه-نیوتن [۲] کمینه می‌کند، برای برآورد پارامترها، منهای لگاریتم تابع درستنمایی را با استفاده از تابع ms کمینه کرده‌ایم.

۵. نتایج استفاده از دو مدل

برای آزمون معنی‌داری پارامترها، دو حالت $\rho = 0$ و $\rho \neq 0$ را در نظر گرفته، نتایج را در جدول (۲) خلاصه می‌کنیم. همان‌طور که برآورد پارامترها در مدل کامل (عدم استقلال) نشان می‌دهد، داده‌ها شواهد کافی بر تأثیر زمان در ابتلا به آسم دارند ($p = 0.001$ مقدار).

همچنین در این مدل داده‌ها نشان می‌دهند که جنس در ابتلا به آسم تأثیر دارد ولی این تأثیر چندان قوی نیست ($p = 0.43$ مقدار).

مقایسه بین مدل استقلال و عدم استقلال حاکی از اهمیت برآورد ρ است. هرچند برآورد پارامترها در این دو مدل به هم نزدیک‌اند ولی به طور کلی خطای استاندارد برآوردها در دو مدل متفاوت است. خطای استاندارد پارامترهایی که متغیر توصیفی متناظر با آنها با زمان، تغییر نمی‌کنند (متغیر توصیفی مانا)، مانند b در این مثال، تمایل به کم برآورد شدن دارند (کم برآورد شدن p مقدار را نتیجه می‌دهد) و خطای استاندارد پارامترهایی که متغیر توصیفی متناظر با آنها با زمان تغییر می‌کند (متغیر توصیفی نامانا)، مانند c در این مثال، تمایل به بیش برآورد شدن دارند (زیاد برآورد شدن p مقدار را نتیجه می‌دهد).

مانده‌هایی که با $\rho = 0$ به دست می‌آیند، فرض استقلال بین دو پاسخ را مدنظر قرار می‌دهند. اگر $\rho \neq 0$ مانده‌ها نیز باید به گونه‌ای تصحیح شوند که همبستگی بین پاسخها را در نظر گیرید. بررسی مانده‌ها به عنوان کار بعدی پیشنهاد می‌شود.

جدول ۱: داده‌های مربوط به آسم

وضعیت آسم			۱۳ سالگی		جمع کل
			ندارد	دارد	
پسرها	۹ سالگی	دارد	۶	۲۲	۲۸
		ندارد	۵۱۴	۱۵	۵۲۹
		جمع کل	۵۲۰	۳۷	۵۵۷
دخترها	۹ سالگی	دارد	۳	۱۳	۱۶
		ندارد	۵۶۱	۱۳	۵۷۴
		جمع کل	۵۶۴	۲۶	۵۹۰

جدول ۲: برآورد پارامترها و p مقدار

پارامترها	p مقدار مدل استقلال		مدل عدم استقلال p مقدار	
a	-۱/۹۰۰	-	-۱/۸۹۰	-
b	۰/۲۴۰	۰/۰۰۹	۰/۲۳۰	۰/۰۴۳
c	۰/۱۷۰	۰/۰۵۷۰	۰/۱۷۰	۰/۰۰۱
ρ	-	-	۰/۹۳۰	۰/۰۰۰

مراجع:

- [1] Agresti, A., 1990, *Categorical Data Analysis*, New York, John Wiley.
- [2] Chambers, J.M. and Hastie, T.J., 1992, *Statistical Models in S*, Chapter 10: Nonlinear models, Pacific Groves, CA: Wadsworth Brooks /Cole.
- [3] Diggle, P.J., Liang, K. and Zeger, S., 1996, *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford Science publication.
- [4] Little, R.J. and Rubin, D., 1987, *Statistical Analysis with Missing Data*, New York, Wiley.
- [5] Long, S.J., 1997, *Regression Models for Categorical and Limited Dependent Variables*, London, SAGE.
- [6] Ronitzky, A. and Wypij, D., 1994, *A Note on the Bias of Estimation with Missing Data*, Biometrics 147, 87-99.

علم آمار تحقق اندیشه انسان در گشودن درهای بررسی غیر ملموس حقایق است.