

کاربرد نماد جمع بندی در شمارش

محمد حسین پور سعید^۱

چکیده

در حل بعضی از مسائل، نمی توان از قواعد و فرمولهای متعارف شمارش استفاده کرد. لذا در این مقاله بر پایه به کارگیری نماد جمع بندی، یک روش مناسب معرفی می شود تا از آن بتوان به عنوان مثال در تعیین تعداد حالات انتخاب r کارت از n کارت با شماره های ۱ تا n استفاده کرد به طوری که بین شماره های کارتهای انتخابی رابطه ای خطی یا غیر خطی برقرار باشد. واژه های کلیدی: قواعد شمارش، حجرة r -بعدی، نقاط مشبکه.

۱. مقدمه

در تعیین تعداد حالات انجام یک عمل که وقوع آن منوط به انجام چندین عمل فرعی مستقل است، می توان از قواعد شمارش استفاده کرد؛ حال آن که اگر اعمال فرعی وابسته به هم باشند، نمی توان از آن قواعد بهره برد. به عنوان مثال اگر از n کارت با شماره های ۱ تا n ، r کارت به طور تصادفی انتخاب شود و بخواهیم تعداد حالاتی را تعیین کنیم که شماره کارتهای انتخابی متوالی یا مضربی از یکدیگر باشند، نمی توان از فرمولهای متعارف شمارش استفاده کرد، زیرا تعداد حالات انتخاب هر کارت به وضعیت و شماره سایر کارتها بستگی داشته و اعمال انتخاب کارتها مستقل از یکدیگر نخواهند بود. در این صورت از نماد جمع بندی که ابزار کارآمدی در امر شمارش است، می توان استفاده کرد [۳].

برای روشن شدن بحث، فرض کنید می خواهیم تعداد حالات انتخاب ۲ کارت از n کارت مذکور را تعیین کنیم به طوری که شماره کارت اول کمتر از شماره دومین کارت باشد. پس اگر دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 را شماره کارتهای انتخابی بدانیم آنگاه می توان به طور معادل تعداد نقاط مشبکه واقع در ربع اول صفحه دکارتی با

مختصات (x_1, x_2) را در نظر گرفت به طوری که $x_1 < x_2$ (در شکل (۱) موقعیت نقاط مشبکه متناظر نشان داده شده است). از طرفی همان طوری که با انتگرال گیری می توان مساحت یک ناحیه را محاسبه کرد، تعداد نقاط مشبکه واقع در یک محدوده را نیز می توان با توجه به عبارت

$$\prod_{i=1}^k m_i = \sum_{x_k=1}^{m_k} \sum_{x_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \dots \sum_{x_1=1}^{m_1} 1$$

تعیین کرد. لذا برای محاسبه تعداد نقاط مشبکه، شبیه تعیین حدود انتگرال مضاعف، با تعیین حدود تغییرات متغیرهای x_1 و x_2 و به کارگیری نماد جمع بندی به صورت زیر عمل می کنیم.

بنابراین در حالت کلی اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام گیرد و وقوع عمل L منوط به انجام اعمال A و B باشد، آنگاه عمل L به $m \times n$ حالت انجام می گیرد که هر یک از این حالات، شامل عضوی از اعضای A و عضوی از اعضای B است. پس می توان به طور معادل $m \times n$ نقطه مشبکه متناظر با آنها را در داخل مستطیلی واقع در صفحه دکارتی در نظر گرفت و در صورت وجود قیود یا محدودیتهایی در انجام دو یا چند عمل، نقاط متناظر با آنها را در

^۱ گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

ابتدا با تغییر متغیر $j = x_r - k_1$ و استفاده از فرمول

$$\sum_{j=1}^n j = \binom{n+1}{2}$$

و سپس تغییر متغیر $j = x_r - (k_1 + k_r + 1)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_r=k_1+k_r+1}^{x_r-k_r} \sum_{j=1}^{x_r-(k_1+k_r)} j \\ &= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_r=k_1+k_r+1}^{x_r-k_r} \binom{x_r-(k_1+k_r)+1}{2} \\ &= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_r=\sum_{j=1}^r k_j+1}^{x_r-k_r} \sum_{j=0}^{x_r-\sum_{j=1}^r k_j-1} \binom{j+2}{j} \end{aligned}$$

عبارت بالا را نیز می توان به صورت زیر نوشت: [۱]

$$\begin{aligned} &= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_0=\sum_{j=1}^r k_j+1}^{x_r-k_0} \sum_{j=0}^{x_r-\sum_{j=1}^r k_j-1} \binom{j+3}{j} \\ &= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_0=\sum_{j=1}^r k_j+1}^{x_r-k_0} \sum_{j=0}^{x_r-\sum_{j=1}^r k_j-1} \binom{j+3}{j} \end{aligned}$$

که بعد از انجام محاسبات عبارت زیر به دست می آید:

$$= \binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1} k_j}{r} \quad (2)$$

صحت رابطه بالا را می توان به کمک استقراء و برای هر مقدار r به آسانی نشان داد. بنابراین اگر $\sum_{j=1}^{r-1} k_j \leq n-1$ آنگاه احتمال پیشامد

مطلوب برابر است با:

$$\frac{\binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1} k_j}{r}}{n^r}$$

داخل مستطیل یا حجره چند بعدی در نظر داشت تا برای تعیین تعداد نقاط مشبکه متناظر، بتوان حدود تغییرات متغیرهای مربوطه و نمادهای جمع بندی مکرر را به آسانی تعیین کرد.

۲. نتایج اصلی

با توجه به مطالب بالا و در قالب بیان یک قضیه، طرح یک مسئله و حل چند مثال روش پیشنهادی را معرفی می کنیم.

قضیه: اگر از n کارت با شماره های ۱ تا n ، r کارت به روش با جایگذاری انتخاب شود، احتمال آنکه شماره i -امین کارت انتخابی، k_i لااقل k_i واحد کمتر یا مساوی شماره کارت بعدی باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1} k_j}{r}}{n^r}$$

اثبات: در حالتی خاص که k_i ها مقادیری مثبت و یکسان هستند، قبلاً مسئله مورد بررسی قرار گرفته است [۳]. در این حالت نیز برای تعیین تعداد حالات مساعد، اگر متغیر تصادفی X_i را شماره i -امین کارت انتخابی بدانیم، با توجه به قید مطرح شده باید داشته باشیم:

$$x_1 \leq x_r - k_1, \quad x_r \leq x_r - k_r, \quad \dots,$$

$$x_i \leq x_{i+1} - k_i, \quad \dots, \quad x_{r-1} \leq x_r - k_{r-1}$$

که با فرض نامنفی بودن k_i ها، می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$1 \leq x_1 \leq x_r - k_1 \leq x_r - (k_1 + k_r) \leq \dots \quad (1)$$

$$\leq x_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-1} k_j \leq x_r - \sum_{j=1}^{r-1} k_j \leq n - \sum_{j=1}^{r-1} k_j$$

حال باید تعداد نقاط مشبکه ای از فضای r بعدی که موقعیت آنها تحت رابطه (۱) می باشد، را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به حدود تغییرات متغیرها در رابطه (۱) و به کارگیری نماد جمع بندی، داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_r=k_1+1}^{x_r-k_r} \sum_{x_1=1}^{x_r-k_1} 1 = \\ &\sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1} k_j+1}^n \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2} k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_r=k_1+k_r+1}^{x_r-k_r} \sum_{x_1=k_1+1}^{x_r-k_1} (x_r - k_1) \end{aligned}$$

حالات مساعد را تعیین کرد ولی چون تعیین حدود نمادهای جمع بندی به مقادیر مشخص n و r بستگی دارد و تعیین فرمولی کلی مقدور نیست. در حالتی خاص و در قالب مثال قبل توضیحات بیشتری ارائه می شود.

در محاسبه تعداد حالاتی که شماره کارت اول حداکثر پنج برابر شماره کارت دوم و شماره کارت دوم و شماره کارت دوم حداکثر هفت برابر شماره کارت سوم باشد، ابتدا حدود تغییرات x_1, x_2, x_3 را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$\begin{aligned} 1 \leq x_1 \leq 5x_2, & \quad 1 \leq x_2 \leq 7x_3, & \quad 1 \leq x_3 \leq 2 \\ 1 \leq x_1 \leq 5x_2, & \quad 1 \leq x_2 \leq 20, & \quad 3 \leq x_3 \leq 14 \\ 1 \leq x_1 \leq 100, & \quad 21 \leq x_2 \leq 7x_3, & \quad 3 \leq x_3 \leq 14 \\ 1 \leq x_1 \leq 5x_2, & \quad 1 \leq x_2 \leq 20, & \quad 15 \leq x_3 \leq 100 \\ 1 \leq x_1 \leq 100, & \quad 21 \leq x_2 \leq 100, & \quad 15 \leq x_3 \leq 100 \end{aligned}$$

بنابراین تعداد حالات مساعد برابر است با:

$$\sum_{x_3=1}^2 \sum_{x_2=1}^{7x_3} \sum_{x_1=1}^{5x_2} 1 + \sum_{x_3=3}^{14} \left[\sum_{x_2=1}^{20} \sum_{x_1=1}^{5x_2} 1 + \sum_{x_2=21}^{7x_3} \sum_{x_1=1}^{100} 1 \right] + \sum_{x_3=15}^{100} \left[\sum_{x_2=1}^{20} \sum_{x_1=1}^{5x_2} 1 + \sum_{x_2=21}^{100} \sum_{x_1=1}^{100} 1 \right] = 838965$$

در بعضی حالات، با تلفیقی از موارد ذکر شده و نیز استفاده از نماد جمع بندی، می توان تعداد حالات مساعد و احتمال مربوط به یک پیشامد را محاسبه کرد. به عنوان مثال، مجدداً با در نظر گرفتن مثال مطرح شده، برای تعیین تعداد حالات وقتی که روابط $x_2 \geq 2x_3 + 7$ و $x_1 \leq 5x_2$ در بین شماره کارتهای انتخابی برقرار باشد، می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned} 1 \leq x_1 \leq 5x_2, & \quad 9 \leq x_2 \leq 20, & \quad x_3 = 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 100, & \quad 21 \leq x_2 \leq 100, & \quad x_3 = 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 100, & \quad 2x_3 + 7 \leq x_2 \leq 100, & \quad 2 \leq x_3 \leq 3 \end{aligned}$$

بنابراین کل حالات مساعد برابر است با:

$$\left[\sum_{x_3=9}^{20} \sum_{x_2=1}^{5x_3} 1 + \sum_{x_3=21}^{100} \sum_{x_2=1}^{100} 1 \right] + \sum_{x_3=2}^3 \sum_{x_2=2x_3+7}^{100} \sum_{x_1=1}^{100} 1 = 20670$$

نکته - اگر کارتها به روش بدون جایگذاری انتخاب شوند، تعداد حالات مساعد را نیز می توان با استفاده از رابطه (۲) تعیین کرد. همچنین انتخاب r شیء از n شیء متمایز به روش بدون جایگذاری معادل با انتخاب r کارت از n کارت مذکور است، به طوری که شماره هر کارت انتخابی لااقل یک واحد کمتر یا مساوی شماره کارت بعدی باشد و تعداد حالاتی که می توان r شیء را از n شیء متمایز و به روش جایگذاری انتخاب کرد، معادل است با تعداد حالات انتخاب r کارت از n کارت مورد نظر به طوری که $k_i = 0, i = 1, 2, \dots, r-1$ ، که باز حالت خاصی از رابطه (۲) به شمار می رود و مقدار آن برابر است با:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

مثال: اگر از صد کارت با شماره های ۱ تا ۱۰۰ سه کارت به روش جایگذاری انتخاب شود، مطلوب است احتمال آن که شماره کارت دوم لااقل ۱۰ واحد بیشتر یا مساوی شماره کارت اول و شماره کارت سوم لااقل ۲۰ واحد بیشتر یا مساوی شماره کارت دوم باشد.

حل: با استفاده از قضیه بالا داریم:

$$\begin{aligned} n &= 100, \quad r = 3, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 20 \\ P(.) &= \frac{\binom{100+3-1+(10+20)}{3}}{(100)^3} = \frac{59640}{(100)^3} \approx 0.06 \end{aligned}$$

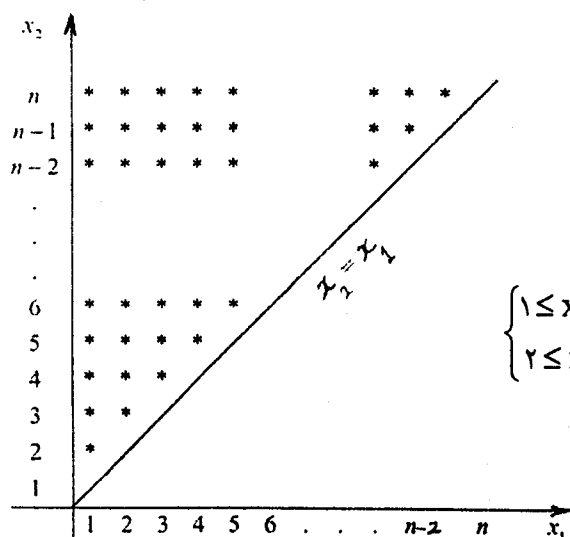
حال موضوع را تحت شرایطی متفاوت با قضیه قبل و در قالب مسئله زیر پی می گیریم.

مسئله: اگر از n کارت با شماره های ۱ تا n ، r کارت به روش جایگذاری انتخاب شود، مطلوب است تعداد حالاتی که i -امین کارت انتخابی، $i = 1, 2, \dots, r-1$ ، حداکثر k_i برابر شماره کارت بعدی باشد.

حل: در این حالت نیز شبیه موارد پیشین، اگر متغیر تصادفی X_i را شماره i -امین کارت انتخابی بدانیم، داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq k_1 x_2, \quad x_2 \leq k_2 x_3, \quad \dots, \\ x_{i-1} &\leq k_{i-1} x_i, \quad \dots, \quad x_{r-1} \leq k_{r-1} x_r \end{aligned}$$

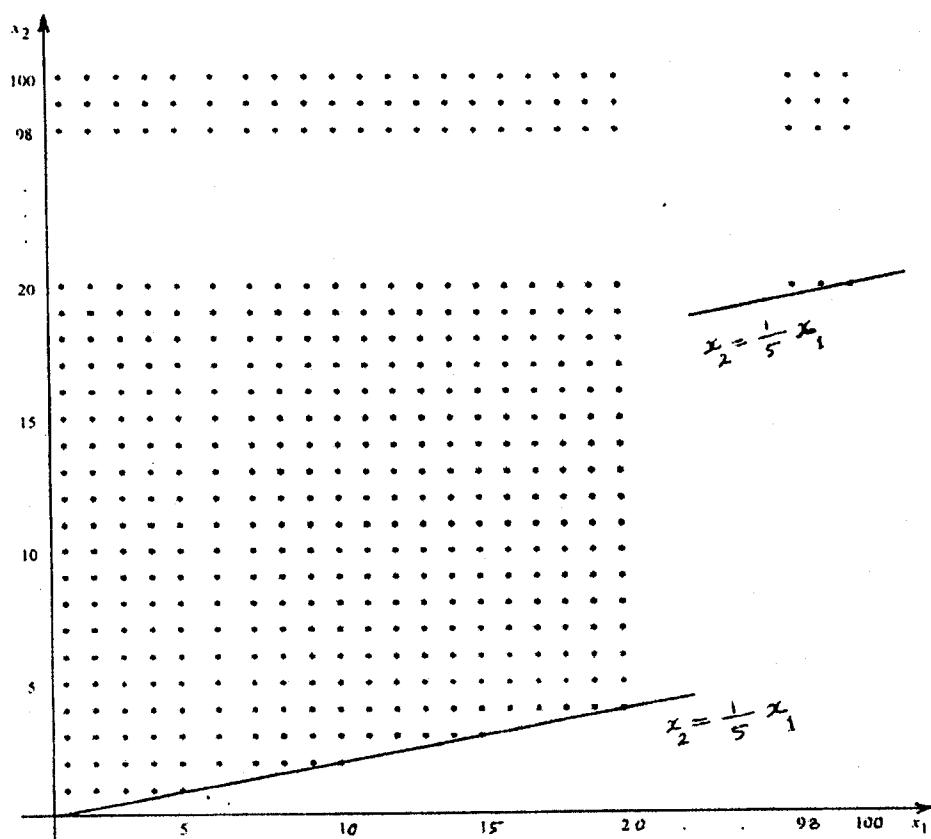
با توجه به روابط بالا و استفاده از نماد جمع بندی، می توان تعداد



$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x_1 < x_2\}$$

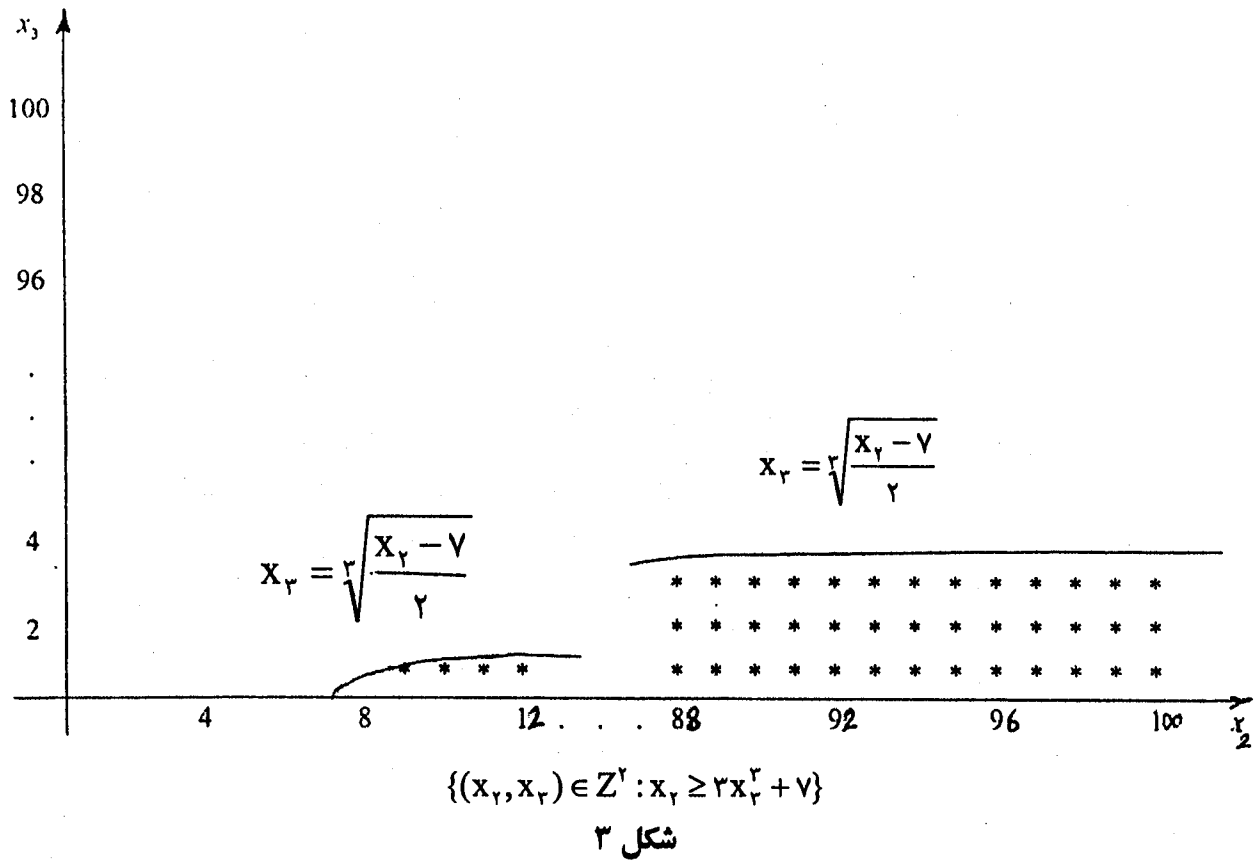
$$\begin{cases} 1 \leq x_1 < x_2 \\ 2 \leq x_2 \leq n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x_1 \leq x_2 - 1 \\ 2 \leq x_2 \leq n \end{cases} \Rightarrow \sum_{x_2=2}^n \sum_{x_1=1}^{x_2-1} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

شکل ۱



$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x_1 \leq 5x_2\}$$

شکل ۲



مراجع

[1] Ross, Sheldon, *A First Course in Probability*, Mac Millan Publishing Co., 1976.

[۲] بالا کریشان، و. ک.، ریاضیات گسسته مقدماتی، ترجمه دکتر بیژن شمس و دکتر محمد علی رضوانی، انتشارات فاطمی، چاپ اول، ۱۳۷۵.

[۳] پورسعید، محمد حسین، ارائه و تعمیم یک روش برای حل یک مسئله احتمالی، گلچین ریاضی، جلد ۴، شماره ۱، ۱۳۷۵.