

# یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی

محمد امینی دهک<sup>۱</sup>

## چکیده

در این مقاله نخست یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی را معرفی می‌کنیم، سپس برخی از خواص و کاربرد آن را که در مرجع [۳] نیز مورد توجه قرار گرفته است، ارائه می‌دهیم. علاوه بر این لم بورل - کانتلی<sup>۲</sup> برای پیشامدهای وابسته منفی به یاری این ویژگی اثبات می‌شود.

تبصره - تعریف بالا برای پیشامدهای تصادفی دو به دو وابسته منفی

نیز درست است.

قضیه ۱-۱. دو پیشامد تصادفی A و B به طور منفی وابسته اند، اگر و تنها اگر: [۱]

$$P(A \cap B) \leq P(A).P(B)$$

قضیه ۱-۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با  $E|X|^r < \infty$  و  $0 < r < s$  آنگاه: [۳]

$$[E|X|^r]^{\frac{1}{r}} \leq [P(X \neq 0)]^{\frac{1}{r-s}} [E|X|^s]^{\frac{1}{s}}$$

## ۲. ویژگیهای $\Pi(\cdot)$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با  $E|X| < \infty$  و  $P(X=0) < 1$  باشد. در این بخش ویژگیهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را که در مرجع [۳] ذکر شده اند معرفی کرده، سپس قضایای ۱-۲، ۲-۲ و ۳-۲ که خواص مفید دیگری از  $\Pi(\cdot)$  را معرفی می‌کنند، بیان و اثبات می‌کنیم. ویژگی ۱ - برای هر مقدار ثابت مخالف صفر C،

<sup>۲</sup> Borel-Contelli

<sup>۳</sup> Petrov

## ۱. مقدمه و تعریف

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با  $E|X| < \infty$  و  $P(X=0) < 1$  باشد. پتروف<sup>۲</sup>، کمیت

$$\Pi(X) = \frac{E^r X}{EX^r}$$

را به عنوان یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی معرفی کرد، اگرچه این کمیت به سادگی از تعریف واریانس به دست می‌آید، ولی خواص جالب و کاربرد مفید آن در احتمال مورد توجه است. هدف از ارائه این مقاله بیان ویژگیهای  $\Pi(\cdot)$  و کاربرد آن در احتمال است. تعریف و قضیه زیر که در [۱] آمده است، برای اثبات نتایج مورد نیازند.

### تعریف ۱-۱

الف) پیشامدهای تصادفی  $A_1, A_2, \dots, A_n$  به طور منفی وابسته اند، اگر توابع نشانگر آنها به طور منفی وابسته باشند.

ب) دنباله  $\{A_n, n \geq 1\}$  از پیشامدهای تصادفی به طور منفی وابسته اند، اگر هر تعداد متناهی از آنها به طور منفی وابسته باشند.

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه سیستان و بلوچستان

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^r = \sum_{k=1}^n EX_k^r + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n EX_k + \sum_{i \neq j} E(X_i) \cdot E(X_j)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n EX_k + \left(\sum_{k=1}^n EX_k\right)^r$$

در نتیجه

$$\Pi\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{\left(\sum_{k=1}^n EX_k\right)^r}{E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^r} \geq$$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^n EX_k\right)^r}{\sum_{k=1}^n EX_k + \left(\sum_{k=1}^n EX_k\right)^r} \geq \frac{M}{1+M}$$

نتیجه ۱-۲. تحت شرایط قضیه ۲-۲ اگر

$$\sum_{k=1}^n EX_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Pi\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

## ۳. نتایج اصلی

در این بخش، با استفاده از ویژگیها و قضایای بخش قبل، نخست کران پایینی برای احتمال اجتماع پیشامدهای تصادفی وابسته منفی در قضیه ۱-۳ به دست می آوریم، این کران پایین را با کران پایین بون فرونی مقایسه کرده و سپس لم بورل - کانتلی برای پیشامدهای تصادفی وابسته منفی را به یاری ویژگیهای  $\Pi(\cdot)$  اثبات می کنیم.

## قضیه ۱-۳

الف) هرگاه  $\{A_n, n \geq 1\}$  یک دنباله از پیشامدهای تصادفی باشد، آنگاه

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)^r}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)} \quad (1)$$

ب) فرض کنید  $\{A_n, n \geq 1\}$  دنباله ای از پیشامدهای تصادفی دو به دو وابسته منفی باشد، آنگاه

$$\Pi(cX) = \Pi(X)$$

ویژگی ۲- برای هر دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  با  $E|X| < \infty$ ،  $E|Y| < \infty$ ،  $P(Y=0) < 1$ ،  $P(X=0) < 1$  داریم:

$$\Pi(X+Y) \geq \min\{\Pi(X), \Pi(Y)\}$$

ویژگی ۳- هرگاه  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی نامنفی با  $\Pi(X_k) \geq t$  باشند، آنگاه

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq t; \forall t > 0$$

ویژگی ۴- هرگاه  $X$  یک متغیر تصادفی نامنفی با  $E|X| < \infty$ ،  $P(X=0) < 1$ ،  $P(X \neq 0) \leq \Pi(X)$  آنگاه

اثبات - در قضیه ۲-۱ قرار می دهیم  $s=2$  و  $r=1$ .

قضیه ۱-۲. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل با  $E|X_i| < \infty$  و  $P(X_i=0) < 1$  باشند، آنگاه

$$\Pi\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \Pi(X_i)$$

اثبات - بنا به تعریف  $\Pi(\cdot)$  داریم

$$\Pi\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \frac{E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^r}{E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^r}$$

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n EX_i\right)^r}{\prod_{i=1}^n EX_i^r} = \prod_{i=1}^n \Pi(X_i)$$

قضیه ۲-۲. فرض کنید  $\{X_n, n \geq 1\}$  دنباله ای از متغیرهای تصادفی ۱ و ۰ دو به دو به طور منفی وابسته با  $\sum_{k=1}^n EX_k \geq M$  باشند، هرگاه  $M$  یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq \frac{M}{1+M}$$

اثبات - چون  $X_k$  ها متغیرهای تصادفی ۱ و ۰ هستند، برای هر  $m \geq 1$   $EX_k = EX_k^m$  و از این که دو به دو وابسته منفی هستند، داریم:

$$E(X_i X_j) \leq E(X_i) \cdot E(X_j); \forall i \neq j$$

بنابراین

$$p \leq \prod \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{\left( \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)^r}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j)}$$

**تبصره -** فرض کنید  $\{A_n, n \geq 1\}$  دنباله ای از پیشامدهای تصادفی باشد. بنا به نابرابری بون فرونی داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j) \quad (2)$$

نابرابری (۱) که به یاری ویژگیهای  $\prod(\cdot)$  به دست آمده است، کرانی دقیق تر از کران بون فرونی برای  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  می دهد زیرا

$$\begin{aligned} & \frac{\left( \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)^r}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j)} - \\ & \left( \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j) \right) = \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j) + \frac{\left( \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j)} \times \\ & \left( \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

لم بورل - کانتلی در احتمال و مخصوصا در اثبات قضایای حدی قوی، مفید و مورد توجه است. این لم برای پیشامدهای دو به دو وابسته منفی توسط بزرگ نیا و تیلور [۲] تعمیم داده شده است، در این مقاله با استفاده از ویژگیهای  $\prod(\cdot)$ ، اثبات جدیدی برای قسمت ب ی لم ارائه می دهیم.

#### ۴. لم بورل - کانتلی

فرض کنید  $\{A_n, n \geq 1\}$  یک دنباله از پیشامدهای تصادفی باشد  
الف) اگر  $\sum_n P(A_n) < \infty$ ، آنگاه  $P(A_n i: 0) = 0$  <sup>۴</sup>.

<sup>۴</sup>  $[A_n i: 0] = [\limsup A_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$ ، Infinity often = i:0

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{1 + \sum_{k=1}^n P(A_k)}$$

**اثبات - الف)** تعریف می کنیم  $X_k = I_{A_k}$ ،  $1 \leq k \leq n$ . بنا به

ویژگی ۴ داریم:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) & \geq P\left[\sum_{k=1}^n X_k \neq 0\right] \geq \prod \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) \\ & \geq \frac{\left( \sum_{k=1}^n EX_k \right)^r}{E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^r} = \frac{\left( \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)^r}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j)} \end{aligned}$$

ب) بنا به قضیه ۲-۲، تعریف ۱-۱، و قسمت الف داریم:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) & \geq \frac{\left( \sum_{k=1}^n EX_k \right)^r}{E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^r} = \\ & \frac{\sum_{k=1}^n EX_k}{1 + \sum_{k=1}^n EX_k} = \frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{1 + \sum_{k=1}^n P(A_k)}. \end{aligned}$$

**قضیه ۲-۳.** فرض کنید  $\{A_n, n \geq 1\}$  دنباله ای از پیشامدهای تصادفی با  $P(A_n) > 0$  برای هر  $n \geq 1$  باشد، آنگاه  $0 < p \leq 1$  وجود دارد به طوری که

$$\frac{\left( \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)^r}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_j)} \geq p \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

**اثبات:** تعریف می کنیم  $X_n = I_{A_n}$ ،  $n \geq 1$ ، داریم

$$\prod(X_n) = \frac{E^r X_n}{EX_n^r} = \frac{P^r(A_n)}{P(A_n)} = P(A_n) > 0$$

بنابراین  $0 < p < 1$  وجود دارد به طوری که برای هر  $n \geq 1$ ، داریم  $P(A_n) \geq p > 0$ . در نتیجه بنا به ویژگی ۳ و قضیه ۱-۳ الف،

ب) اگر  $\sum_n P(A_n) = \infty$  و دنباله  $\{A_n, n \geq 1\}$  دو به دو مستقل در نتیجه

باشند، آنگاه  $P(A_n i : o) = 1$ .

$$P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq \limsup \frac{\sum_{k=n}^m P(A_k)}{1 + \sum_{k=n}^m P(A_k)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}{1 + \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}$$

۵. تعمیم لم بورل - کانتلی

فرض کنید  $\{A_n, n \geq 1\}$  دنباله ای از پیشامدهای دو به دو وابسته

منفی باشد، اگر  $\sum_n P(A_n) = \infty$ ، آنگاه  $P(A_n i : o) = 1$ .

اثبات - تعریف می کنیم  $X_n = I_{A_n}$ ،  $n \geq 1$ ، بنا به قضیه ۱-۳ ب، برای هر  $m > n$  داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq 1$$

بنابراین

$$P(A_n i : o) = \lim P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq \frac{\sum_{k=n}^m P(A_k)}{1 + \sum_{k=n}^m P(A_k)}$$

## مراجع

[۱] امینی، محمد، ۱۳۷۹، برخی ویژگیهای متغیرهای تصادفی وابسته، اندیشه آماری، سال پنجم شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۷۹، صفحات ۲۹ - ۲۴.

[2] Bozorgnia, A. Patherson, R. F. and Taylor, R. L., 1996, *Limit Theorems for Dependent Random Variables World Congres Nonlinear Analysis*, 92 P. 1639-1650.

[3] Petrov, V., 1995, *Limit Theorems of Probability Theory, Sequence of Independent Random Variables*, Oxford.