

مجموعه های تصادفی و استنباط آماری برای مدل بولی

حمید قربانی^۱ خلیل شفیعی^۲

چکیده

در این مقاله ضمن ارائه نظریه مجموعه های تصادفی، مدل بولی را معرفی و به استنباط آماری راجع به آن می پردازیم.

اندک اند، لذا در نظریه مجموعه های تصادفی و در نتیجه استنباط

آماری برای مجموعه های تصادفی دچار مشکل هستیم. انتظار داریم مدل مناسب برای مجموعه های تصادفی به راحتی شبیه سازی شود و طیف وسیعی از اشکال را پوشش دهد، همچنین توزیع چنین مدنی صریح باشد تا در مسائل محاسباتی کمتر دچار مشکل شویم. در واقع تا به حال فقط یک مدل برای مجموعه های تصادفی با چنین خصوصیاتی شناسایی شده که به مدل بولی معروف است. مدل بولی، مثال ساده و در عین حال مهمی از مجموعه های بسته تصادفی است. همان طور که اشاره شد این مدل نسبتاً انعطاف پذیر و برای محاسبات خوش رفتار است.

در این مقاله، هندسه تصادفی مدرن و مجموعه های تصادفی را معرفی می کنیم و به مسئله استنباط آماری در مورد مدل بولی می پردازیم.

۱ مقدمه

الگوهای هندسی پیچیده که در حجم وسیعی از علوم و صنعت و... مشاهده می شوند، احتیاج به تحلیل آماری دارند. ساختارهای مورد مطالعه در زمین شناسی، محیطهای متخالخ و بافت‌های زیستی نمونه هایی از این الگوهای آماری هستند. در تحلیل چنین الگوهایی، به مدل‌های ریاضی و روش‌های آماری مناسب، احتیاج داریم. گستره ای از مطالعات و تحقیقات که چنین مدل‌هایی را جستجو می کند به هندسه تصادفی معروف است. هندسه تصادفی به مطالعه ساختارهای هندسی ای می پردازد که تصادفی اند و برای مدل بندی و تحلیل این ساختارها از هندسه، احتمال و آمار استفاده می کند. هندسه تصادفی مدرن، درباره رده وسیعی از مدل‌های احتمال مدل مجموعه های تصادفی در \mathbb{R}^d یا فضاهای خاص دیگر به بحث می پردازد. مدلها یا توزیعهای مربوط به مجموعه های تصادفی

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

^۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

- گویی به مرکز ثابت و شعاع تصادفی.
- گودالهای ایجاد شده بر اثر اصابت شهاب سنگها به سطح کره ماه، که اصطلاحاً به آنها کراترهای قمری می‌گویند.
- تومورهای سرطانی.

می‌دانیم اگرتابع توزیع یک متغیر تصادفی معلوم باشد، رفتار احتمالی آن متغیر نیز معلوم است. تابع اصابت در نظریه مجموعه های تصادفی، نقش مشابه تابع توزیع در متغیرهای تصادفی دارد. بنابر قضیه شوکه که در ادامه به آن اشاره می‌شود، توزیع یک مجموعه تصادفی منحصرآ توسط تابع اصابت متناظرش، مشخص می‌شود.

تعریف ۱: تابع اصابت مجموعه بسته تصادفی X را با $T_X(K)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$T_X(K) = P_X(\{F : F \cap K \neq \emptyset\}) ; \quad K \in \mathcal{K} \quad (1)$$

اگر مقدار $(.) T_X$ به ازای هر $K \in \mathcal{K}$ معلوم باشد آنگاه احتمال P روی \sum کاملاً معلوم است. تابع $(K) X$ را بایه صورت $T_X(K)$ - ۱ تعریف می‌کیم، یعنی

$$Q_X(K) = 1 - T_X(K) = P(X \cap K = \emptyset) ; \quad K \in \mathcal{K}$$

مثال ۱: فرض کنید X یک متغیر تصادفی و $X = (-\infty, x]$ یک مجموعه تصادفی در R باشد آنگاه $T_X(K) = P(x > \inf K)$ برای هر $K \in \mathcal{K}$.

مثال ۲: فرض کنید $\{x\} X =$ یک مجموعه تصادفی تک عنصری در R^d باشد آنگاه $T_X(K) = P(x \in K)$.

تابع اصابت متناظر با یک RACS دارای خواصی مشابه خواص تابع توزیع یک متغیر تصادفی، مانند صعودی و از راست پیوسته بودن، است. قضیه شوکه وجود این دو خاصیت را به همراه دو خاصیت دیگر شرط لازم و کافی برای وجود یک RACS با تابع اصابت داده شده ای می‌داند (مترون [۴]).

لازم به تذکر است که در طبقه بندی موضوعی احتمال، توسعه انجمان ریاضی آمریکا، یکی از طبقات به احتمال هندسی، هندسه احتمالی و مجموعه های تصادفی اختصاص یافته است، همچنین نظریه مجموعه های تصادفی ابتدا توسط مترون^۳ [۴] و کندال^۴ [۳] ۱۹۷۴ ارائه شده است.

۲ مجموعه بسته تصادفی

برای الگوهای هندسی نامنظم می‌توان به کمک مجموعه های بسته تصادفی (به اختصار RACS ها) مدل‌های ریاضی ارائه داد. RACS ها در نظریه هندسه تصادفی نقش مهمی ایفا می‌کنند. می‌توان با تعریف یک توبولوژی یا متريک بر روی \mathcal{K} ، مجموعه زیر مجموعه های بسته R^d ، یک RACS را از دید نظریه اندازه به طور دقیق تعریف کرد (مترون [۴] را ببینید). برای پرهیز از پیچیدگی به طور ساده هر شیء تصادفی که مقادیرش را از \mathcal{K} می‌گیرد یک RACS نامیده و به ذکر چند مثال اکتفا می‌کیم. در بخش ۳ حالت خاص مجموعه های بسته تصادفی یعنی مدل بولی را بررسی خواهیم کرد.

- اگر یک لیوان آب را روی سطحی بریزیم که اثر آب بر آن سطح قابل مشاهده باشد مجموعه حاصل از اثر آب یک مجموعه تصادفی است.
- اگر در جنگلی با چشمان بسته، درجه تصادفی حرکت کنیم، سپس چشمان خود را باز کنیم آنچه مشاهده می‌شود یک مجموعه تصادفی است.
- فرایندهای نقطه ای.
- اگر (x) تابع تصادفی پیوسته ای روی R^d باشد آنگاه $\{x = t, t \in R\}$ یک مجموعه تصادفی است.
- مجموعه تصادفی $[U, -\infty)$ که در آن U متغیری تصادفی است که دارای توزیع یکنواخت در فاصله دلخواه $[a, b]$ است.

انواع چند ضلعیهای تصادفی، پاره خطهایی با طول و جهت تصادفی، خوشهایی تصادفی از نقاط با تعداد متناهی و

وقتی مجموعه تصادفی از مدل بولی پیروی می‌کند، $T_X(K)$ را وقتی مجموعه تصادفی از مدل بولی نسبتاً ساده، به صورت زیر بیان کرد:

$$T_X(K) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(X_0 \oplus \check{K})]\} \quad (2)$$

تعريف ۲: مجموعه بسته تصادفی مانا و همسانگرد- مجموعه بسته تصادفی X را مانا می‌گوییم اگر X و مجموعه انتقال یافته $X_x = X \oplus \{x\}$ برای هر $x \in R^d$ دارای توزیع یکسان باشند. طبق قضیه شوکه، X_x با X هم توزیع است اگر و تنها اگر تابع اصابت تحت انتقال پایا باشد. یعنی:

$$T_X(K) = T_{X_x}(K), \quad \forall x \in R^d; K \in \mathcal{K}$$

$$T_X(K) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(\check{X}_0 \oplus K)]\} \quad (3)$$

تساوی بالا معادل است با:

$$T_X(K) = T_X(K_x)$$

اگر X مانا باشد، برای x متعلق به R^d ، $P(x \in X)$ به x بستگی ندارد و $P(x \in X) = P(0 \in X)$. همچنین مجموعه تصادفی X را همسانگرد می‌گوییم اگر توزیع X تحت دوران پایا باشد.

۳ مدل بولی

مدلها یا توزیعهای مربوط به مجموعه های تصادفی انداک هستند، لذا در نظریه مجموعه های تصادفی و در نتیجه استباط آماری برای مجموعه های تصادفی دچار مشکل هستیم. انتظار داریم مدل مناسب برای مجموعه های تصادفی به راحتی شبیه سازی شود و طیف وسیعی از اشکال را پوشش دهد، همچنین توزیع چنین مدلی صریح باشد تا در مسائل محاسباتی کمتر دچار مشکل شویم. در واقع تا به حال فقط یک مدل برای مجموعه های تصادفی با چنین خصوصیاتی شناسایی شده که به مدل بولی معروف است.

تعريف ۳: مدل بولی- فرض کنید $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$ فرایند نقطه ای پواسون مانا باشد λ در R^d باشد. همچنین X_1, X_2, \dots دنباله ای از مجموعه های فشرده تصادفی مستقل و هم توزیع در R^d باشند که از فرایند پواسون Φ مستقل‌اند. مدل بولی با استفاده از جرمهای x و مجموعه های مقدماتی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n + x_n)$$

در تعریف مدل بولی می‌توان از مجموعه های زیر به عنوان مجموعه های مقدماتی استفاده کرد. قرصهایی با شعاعهای تصادفی،

۳-۱ مشخصه های اصلی مدل بولی

در این قسمت مشخصه های اصلی مدل بولی را به اختصار معرفی می‌کنیم:

(۱) کسر حجمی- کسر حجمی یک مجموعه بسته تصادفی مانا، که آن را با p نشان می‌دهیم، نقشی همانند شدت یک فرایند نقطه ای ایفا می‌کند. اگر B ناحیه ای با حجم واحد باشد، کسر حجمی میانگین نسبتی از ناحیه B است که توسط X پوشانده می‌شود.

$$p = E(v_d(X \cap B)) \quad ; \quad v_d(B) = 1$$

وقتی X از مدل بولی پیروی می‌کند، به دلیل مانایی X مقدار p به ناحیه انتخابی B بستگی ندارد و همچنین داریم:

$$p = P(0 \in X) = T_X(\{0\}) \quad ; \quad x \in R^d$$

(۲) تخلخل- تخلخل را با q نشان می‌دهیم و احتمال آن است که نقطه ای از فضای مکمل X واقع شود (یعنی در حفره‌ها). فرض کنید $\{x\} = K$ باشد آنگاه:

$$q = Q_X(\{x\}) = P(x \in X') = \exp\{-\lambda E[v_d(X_0)]\}.$$

در واقع R کمترین زمانی است که بالاترین مانای X به B می‌اصابت می‌کند به شرط آن که بالا با حجم اولیه صفر در زمان $t=0$ ، شروع به رشد کرده باشد.

وقتی B پاره خطی با طول واحد است، تابع توزیع برخورد خطی H_B و هنگامی که B گویی در \mathbb{R}^d با حجم واحد است، تابع توزیع اصابت کروی H_B را پیش رو داریم.

برای مدل بولی از رابطه (۵) داریم:

$$H_B(r) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(\check{X}_0 \oplus rB) - v_d(X_0)]\} \quad (4)$$

توضیحات بیشتر راجع به کاربرد تابع توزیع اصابت در استنباط آماری مدل بولی در بخش بعد از آن خواهد شد.

۴ استنباط آماری برای مدل بولی

اولین گام در استنباط آماری برای هر مجموعه بسته تصادفی از جمله مدل بولی، برآوردهای پارامتری مانند کسر حجمی، تابع کوواریانس، تابع اصابت و تابع توزیع برخورد است. در استنباط آماری برای مجموعه های تصادفی همانند استنباط برای فرایندهای نقطه ای مرسوم است که برآوردهای پارامترها را برای مجموعه های تصادفی مشاهده شده در پنجره W به دست می آورند. مسئله اصلی در تحلیل مدل بولی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

به شرط داشتن یک مشاهده از مدل بولی، پارامترهای آن شامل شدت فراینده نقطه ای پواسون و توزیع مجموعه های مقدماتی را برآورد کنید.

مسئله دیگر، تصمیم گیری درباره این مهم است که به شرط داشتن یک مشاهده، آیا از لحاظ آماری مجازیم مدل بولی را برای توصیف این مشاهده به کار ببریم یا خیر؟ در ادامه فقط مدل بولی مانا و همسانگرد با مجموعه های مقدماتی محدب را مورد بررسی قرار می دهیم.

(۳) کوواریانس - کوواریانس مجموعه تصادفی مانای X را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$c(r) = P(o \in X, r \in X) ; \quad \forall r \in \mathbb{R}^d$$

که در آن r نقطه ای دلخواه در \mathbb{R}^d است. در واقع کوواریانس، احتمال پوشش دو نقطه ای است که به فاصله r از یکدیگر واقع شده اند. لازم به تذکر است که اگر مجموعه تصادفی مانای X ، همسانگرد هم باشد، آن گاه $c(r) = c(r) = \|r\|$ بستگی دارد.

(۴) پایانی تحت توسعی - اگر X یک مجموعه بسته تصادفی و L مجموعه ای فشرده باشد، طبق رابطه (۵) مجموعه بسته تصادفی $X \oplus L = \{x + l | x \in X, l \in L\}$ نیز یک مدل بولی است.

۲-۳ تابع توزیع برخورد

در تحلیل آماری مجموعه های بسته تصادفی، تابع توزیع اصابت نقش بسزایی دارد. حتی در مواردی که تعیین نواحی تخلخل غیر ممکن یا نامناسب است، تابع توزیع اصابت، توصیفی مناسب از ساختار مکانی مجموعه بسته تصادفی، به دست می دهد. تابع توزیع برخورد برای مجموعه بسته تصادفی X با به کارگیری مجموعه های آزمون B تعریف می شود که B یک مجموعه محدب و فشرده، شامل مبدأ در \mathbb{R}^d است. قرار می دهیم:

$$H_B(r) = 1 - \frac{P(X \cap rB = \emptyset)}{1-p} = 1 - \frac{P(o \notin (X \oplus rB))}{1-p} ; \quad r \geq 0$$

که p کسر حجمی X است.

لازم به تذکر است H_B را می توان به عنوان تابع توزیع متغیر تصادفی R تعریف کرد به این مفهوم که اگر آنگاه: $R = \inf\{t : X \cap tB \neq \emptyset\}$

$$H_B(r) = P(R \leq r | R > 0)$$

که $(.)$ تابع کوواریانس است. برآوردگر \hat{p}_W با احتمال یک به p همگراست. یعنی:

$$W \uparrow R^t \quad \text{هنگامیکه: } p_W \rightarrow p \quad \text{a.s.}$$

طول مرز ویژه: ابتدا فرایند خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
فرایند خطی Φ مجموعه‌ای از خطوط غیر مستقیم مانند $\{l_1, l_2, \dots, l_n\} = l$ در R^t است. فرایند خطی Φ برای مجموعه بورل دلخواه B یک اندازه تصادفی به صورت زیر را القاء می‌کند:

$$\Phi(B) = \sum_{l \in \Phi} h_l(l \cap B)$$

که در آن h_l معرف طول است. اگر اندازه تصادفی Φ مانا باشد، شدت آن را با L_A نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$E(\Phi(B)) = L_A \cdot v_t(B)$$

در واقع L_A میانگین طول فرایند خطی در واحد سطح است که اصطلاحاً آن را طول مرز ویژه می‌نامیم. اکنون مدل بولی X را در نظر بگیرید که در پنجره $W \subset R^t$ مشاهده شده است. مرزهای Φ در پنجره W فرایند خطی مانایی تشکیل می‌دهند که آن را Φ^W نشان دهیم. اگر مرز W را با ∂W و مجموعه نقاط داخلی آن را با W° نشان دهیم، رابطه زیر برقرار است:

$$\Phi(X \cap W) = \Phi(X \cap W^\circ) + \Phi(X \cap \partial W).$$

برآورد ناریب $L_{A,W}$ به صورت زیر است:

$$\hat{L}_{A,W} = \frac{\Phi(X \cap W) - \Phi(X \cap \partial^+ W)}{A(W)} \quad (5)$$

که در آن $\partial^+ W$ برای پنجره W برابر است با:

$$\partial^+ W = \{(x_i, x_j) \in W : \max x_i = 1\}.$$

عدد تحدب ویژه: فرض کنید به مجموعه مقدماتی X نقطه مسامس آن در جهت \mathbf{n} یعنی (X_0, n) را نسبت دهیم (\mathbf{n} برداری

وبل 0] حالتی را مطالعه کرده است که فرض همسانگردی برقرار نیست. قبل از ارائه روشهای استنباطی، پارامترهای مدل بولی را به دو گروه عمدۀ تقسیم می‌کنیم:

- پارامترهای ماکروسکوپی: پارامترهایی از قبیل کسر حجمی، تابع کوواریانس و تابع اصابت به این گروه متعلق‌اند. این پارامترها میانگینهایی مکانی هستند که می‌توان آنها را مستقیماً به کمک نمونه مشاهده شده از مدل بولی برآورد کرد. وقتی پنجره W توسعه یافته به R^d میل می‌کند این برآوردگرها با احتمال یک به مقادیر نظری متاظرشان میل می‌کنند.

- پارامترهای میکروسکوپی: پارامترهایی از قبیل توزیع مجموعه‌های مقدماتی، میانگین محیط و مساحت این مجموعه‌ها، توزیع X به عنوان یک مجموعه تصادفی (که به وسیله $(.)$ T_X معلوم می‌شود) و λ ، شدت فرایند نقطه‌ای پواسون به این گروه متعلق‌اند. با وجود این که هدف ما از برآش مدلی مناسب به داده‌های واقعی، برآورد این پارامترهاست، این پارامترها را نمی‌توان مستقیماً برآورد کرد و برای این منظور ابتدا باید برآورد پارامترهای ماکروسکوپی را به دست آورد.

۴-۱ برآورد پارامترهای ماکروسکوپی

کسر حجمی: کسر حجمی ساده ترین پارامتر مدل بولی است که آن را با p نشان می‌دهیم. فرض کنید مجموعه تصادفی X که از مدل بولی پیروی می‌کند، در پنجره W مشاهده شده باشد، آنگاه:

$$\hat{p}_W = \frac{A(X \cap W)}{A(W)}$$

که در آن مساحت را با $(.)$ A نشان داده ایم. همچنین داریم:

$$E(\hat{p}_W) = \frac{1}{A(W)} \int_W P(x \in X) dx = p,$$

$$\text{Var}(\hat{p}_W) = \frac{1}{A(W)^2} \int_W \int_W (c(x-y) - p^2) dx dy.$$

با استفاده ازتابع کوواریانس و برای جهت های مختلف π می توان فرض همسانگردی مجموعه تصادفی را از روی نمونه مشاهده شده بررسی کرد.

احتمال پوشش و تابع اصابات: طبق قضیه شوکه توزیع مجموعه تصادفی X منحصرآ توسط $P(K \subset X')$ مشخص می شود که $X = X'$ (نماد ابر تفاضل مجموعه ها دلالت می کند). برای برآورد تابع اصابات، ابتدا برآورد $P(K \subset X)$ را در نظر می گیریم. یک برآورد گر ناریب برای $P(K \subset X)$ تابع نشانگر $I(K \subset X)$ است، به خاطر مانای X می توانیم نشانگر $I(K_x \subset X)$ نیز استفاده کنیم (K_x انتقال یافته K به اندازه از $x \in R^r$ است). با میانگین گیری از این برآورد گرهای ناریب روی $\{x | K_x \subset W\}$ برآورد گری ناریب به فرم زیر برای $P(K \subset X)$ به دست می آید:

$$\hat{P}(K \subset X) = \frac{A\{x | K_x \subset X \cap W\}}{A\{x | K_x \subset W\}}$$

اکنون می خواهیم تابع اصابات یعنی $T_X(K)$ را به ازای $K \in \mathcal{K}$ برآورد کنیم:

$$T_{X,W}(K) = 1 - \hat{P}(K \subset X')$$

$$= 1 - \frac{A\{x | K_x \subset X' \cap W\}}{A\{x | K_x \subset W\}}$$

۴-۳- برآورد پارامترهای میکروسکوپی

استباط آماری مدل بولی از برآورد λ ، شدت فرایند پواسون و برآورد میانگین مقادیر تابعکهای مینکوفسکی مجموعه های مقدماتی مثل میانگین مساحت، میانگین محیط و... شروع شده است. در ادامه به دو روش معمول در برآورد پارامترهای میکروسکوپی مدل بولی اشاره می کنیم.

لازم به تذکر است که اشیتی^۷ [۸] روشی برای برآورد پارامتر λ هنگامی که فرض محدب بودن مجموعه های مقدماتی برقرار نیست، ارائه کرده است. روش اشیتی را می توان برای مدل بولی با

متعلق به دایره واحد است). اگر جهت π به سمت بالا باشد $(X_u)_n$ را نقطه مماس مثبت پایینی X می نامیم. فرض کنید برای جهت دلخواه π و برای همه مجموعه های مقدماتی مدل بولی نقاط مماس را تعیین کنیم، تعدادی از این نقاط توسط مجموعه های مقدماتی دیگر پوشانده می شوند. نقاط باقیمانده یک فرایند نقطه ای شکل می دهند که آن را با $N^+(u)$ نشان می دهیم. سولچانوف^۸ [۵] نشان داده است که شدت فرایند نقطه ای (u) به جهت π بستگی ندارد. اگر این شدت را با N_A^+ نشان دهیم و آن را عدد تحدب ویژه بنامیم، داریم:

$$N_A^+ = \lambda(1-p)$$

حال فرض کنید مدل بولی X در پنجره W مشاهده شده باشد، برای برآورد N_A^+ می توان به صورت زیر عمل کرد. ابتدا π را با جهت دلخواه در نظر می گیریم و در پنجره W تعداد نقاط مماس را در جهت π شمارش می کنیم (تعداد این نقاط را اصطلاحاً عدد تحدب می نامیم)، آنگاه:

$$\hat{N}_{A,W}^+ = \frac{N(N^+(u) \cap W)}{A(W)}$$

در واقع عدد تحدب ویژه برابر است با متوسط عدد تحدب در واحد سطح.

۴-۲- برآورد پارامترهای ماکروسکوپی تابعی

تابع کوواریانس لازم به π از آوری است که (r) را احتمال پوشش دو نقطه ای تعریف کردیم که به فاصله $\|r\| = r$ از یکدیگر واقع شده اند. برای برآورد r در نقطه دلخواه $(r) \in R^r$ می توان از عبارت زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \hat{c}(r) &= \frac{A\{x | x \in X \cap W, x+r \in X \cap W\}}{A\{x | x \in W, x+r \in W\}} \\ &= \frac{A((X \cap W) \oplus \{0, r\})}{A(W \oplus \{0, r\})} \end{aligned} \quad (7)$$

مجموعه های مقدماتی کراندار به کار برد و فرض محدب بودن و مجموعه های مقدماتی ضروری نیست.

$$A(W)^{\frac{1}{\lambda}}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\lambda}{1-p})$$

برآوردگرهای به دست آمده از این روش اگرچه ارباب اند ولی با احتمال یک همگرا و به طور مجانبی دارای توزیع نرمال اند.

۵ یک مثال

در ادامه مدل بولی باشد $\lambda = 50$ را که در پنجره $W = [5, 1]^T$ شبیه سازی شده است مورد بررسی قرار می دهیم. در این مثال مجموعه های مقدماتی فرصهایی به شاعع تصادفی R دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $[0/128, 20/128]$ هستند. برای ملاحظه برنامه های مورد استفاده در این بخش که در نرم افزار S-plus نوشته شده اند، به [۱۰] مراجعه شود. طبق نمادگذاری بخشها قبل، مساحت مجموعه های مقدماتی را با $A(X_0)$ و محیط آنها را با $U(X_0)$ نشان می دهیم. برای داده های شبیه سازی شده داریم:

$$\bar{A}(X_0) = E(A(X_0)) = \pi E(R^2) = 0.0339$$

$$\bar{U}(X_0) = E(U(X_0)) = 2\pi E(R) = 0.6184$$

داده های شبیه سازی شده را به ماتریس X با ابعاد

128×128 تبدیل کرده ایم. لذا در این بخش پنجره W ماتریسی با درایه های یک و مدل بنولی شبیه سازی شده X ماتریسی با درایه های صفر و یک اند. اگر K یک مجموعه محدب و فشرده در R باشد، طبق فرمول داده شده، برای X محدب داریم:

$$E(A(X_0 \oplus K)) = \bar{A}(X_0) + \frac{1}{4\pi} \bar{U}(X_0) U(K) + A(K)$$

$$Q_X(K) = \exp\{-\lambda \bar{A}(X_0) + \frac{1}{4\pi} \bar{U}(X_0) U(K) + A(K)\}$$

مجموعه های آزمون K را می توان به صورتهای مختلفی در نظر

گرفت:

(الف) اگر $\{x\} = K = \{\hat{x}\}$:

$$Q_X(K) = \exp\{-\lambda \bar{A}(X_0)\}$$

روش کمترین تقابل: در این روش به کمک فرمول اشتاینر، تابع توزیع برخورده یا تابع اصابت را بحسب یک چند جمله ای می نویسیم. ضرایب این چند جمله ای، توابعی از پارامترهای مجھول اند که آنها را می توان با روش های آماری نظیر رگرسیون برآورد کرد. کریسی ولاست^۱ [۱] دقیقاً از همین روش در برآورد پارامترهای مدل بولی استفاده کرده اند. برای جزئیات محاسباتی به بخش ۵ مراجعه کنید. هنریش^۲ [۲] ثابت کرده است که برآوردگرهای به دست آمده از این روش، با احتمال یک به مقادیر نظری متاظرشان همگرا هستند و به طور مجانبی دارای توزیع نرمال اند.

روش شدتها: رایجترین روش در برآورد پارامترهای مدل بولی به خصوص λ ، روش شدتهاست. این روش همانند روش گشاورها در نظریه آمار کلاسیک است. مولچاخف [۵] نشان داده است که برای مدل بولی که در R مشاهده می شود روابط زیر برقرارند:

$$L_A = (1-p)\bar{U}(X_0)\lambda \quad (7)$$

$$N_A^+ = (1-p)\lambda \quad (8)$$

که در آن L_A طول مرز ویژه X در واحد سطح و N_A^+ عدد تحدب ویژه و $\bar{U}(X_0)$ میانگین محیط مجموعه های مقدماتی اند. از طرفی می دانیم:

$$p = 1 - \exp\{-\lambda \bar{A}(X_0)\} \quad (9)$$

که در آن $\bar{A}(X_0)$ میانگین مساحت مجموعه های مقدماتی است. در روابط ۸، ۷ و ۹ برآورد پارامترهای p ، L_A و N_A^+ جایگزین می شوند و پارامترهای λ ، $\bar{U}(X_0)$ و $\bar{A}(X_0)$ برآورد می شوند. اگر برآوردگر λ را با $\hat{\lambda}$ نشان دهیم، آن گاه:

$$\hat{\lambda} = \frac{N_A^+}{1 - \hat{p}}$$

$$-\log Q_X(tC) = \lambda \{\bar{A}(X_0) + \frac{\epsilon t}{\pi} \bar{U}(X_0)t + \epsilon t'\}$$

$$= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_1 t'$$

اگر معادله درجه ۲ بالا را به داده ها برآورش دهیم، داریم:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\beta}_1}{\epsilon}, \quad \hat{U}(X_0) = \frac{\pi \hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_1}, \quad \hat{A}(X_0) = \frac{\epsilon \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

برای مقادیر $-\log Q_X(tC)$ که در جدول ۲ آمده است داریم:

$$\hat{\beta}_0 = 1/2124, \quad \hat{\beta}_1 = -0/2111, \quad \hat{\beta}_1 = 0/0182$$

لذا

$$\hat{U}(X_0) = \frac{\pi \hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_1} = 37/3021, \quad \hat{A}(X_0) = \frac{\epsilon \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} = 266/46$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\beta}_1}{\epsilon} = 0/004$$

واحد برآوردهای بالا پیکسل است، پس از تبدیل واحد داریم:

$$\hat{\lambda} = 74/54, \quad \hat{U}(X_0) = 0/2914, \quad \hat{A}(X_0) = 0/0162$$

لازم به تذکر است که برآورش گشتاورهای نظری به گشتاورهای نمونه ای (روش گشتاورها) به منظور برآورد پارامترها، روش شناخته شده در تحلیل آماری است. معمولاً وقتی از این روش استفاده می شود که روشهای دیگر مثل حداکثر درستنمایی جواب نمی دهند. علت عدم استفاده از این روش به جز موضع ضروری این است که برای بررسی خواص برآوردگرهای به دست آمده، نظریه آماری عمومی، وجود ندارد. مطالب بالا وقتی که از روش گشتاورها برای مجموعه های تصادفی استفاده کنیم، هنوز به قوت خود باقی است. آیا برآوردگرهای به دست آمده از رابطه ۹ اریبند؟ واریانس و کوواریانس آنها چیست؟ این برآوردگرهای تحت کدام شرایط مجانباً دارای توزیع نرمال اند؟ لازم به تذکر است هنریش [۲] نشان داده است که برآوردگرهای به دست آمده از روش کمترین تقاضاً با احتمال یک به مقادیر متضادشان همگرا و مجانباً دارای توزیع نرمال اند.

ب) اگر K پاره خطی به طول l باشد آنگاه:

$$Q_X(K) = \exp \{-\lambda \bar{A}(X_0) + \frac{l}{\pi} \bar{U}(X_0)\}$$

ج) اگر K گوئی به مرکز صفر و شعاع ثابت t باشد آنگاه:

$$Q_X(K) = \exp \{-\lambda [\bar{A}(X_0) + \bar{U}(X_0)t + \pi t^2]\}$$

د) اگر K مربعی به ضلع t باشد آنگاه:

$$Q_X(K) = \exp \{-\lambda [\bar{A}(X_0) + \frac{t}{\pi} \bar{U}(X_0)t + t^2]\} \quad (4)$$

در عمل به وسیله یک اسکنر مجموعه مشاهده شده را رقومی می کنند. به عبارت دیگر بعد از اسکن، تصویر به ماتریسی مانند W تبدیل می شود که درایه های آن اعداد یک و صفرند (در واقع اسکنر در اینجا مانند یکتابع نشانگر عمل می کند، اگر نقطه متناظر در این ماتریس روی تصویر، توسط مدل بولی پوشیده شده باشد، آن درایه مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر را اختیار می کند). سپس با استفاده از تحلیلگرهای تصویری که به این منظور طراحی شده اند، برآورد $Q_X(K)$ را برای مجموعه های مختلف K که در بالا به آنها اشاره شد، به دست می آورند. در ادامه تابع کوواریانس، تابع اصابت و پارامترهای میکروسکوپی مدل بولی را برای مدل بولی شبیه سازی شده برآورد کرده ایم. طبق مطالعه ارائه شده در بخش ۴، اهمیت برآورد تابع کوواریانس، به دلیل بررسی فرض همسانگردی است. ما تابع کوواریانس را با استفاده از فرمول ۶ برای دو جهت افقی و عمودی برآورد کرده ایم. مقادیر برآورد شده در جدول ۱ آمده اند. با توجه به اینکه برای ۲ های یکسان، تفاوتی معنی داریم مقادیر برآورد شده وجود ندارد، فرض همسانگردی برای مجموعه تصادفی معقول به نظر می رسد. همچنین با در نظر گرفتن مجموعه آزمون مربعی $C = tC$ که $t = \sqrt{C}$ مربعی به ضلع ۲ است و با استفاده از فرمول ۹ تابع اصابت $T_X(tC)$ را به ازای مقادیر مختلف ۲ برآورد کرده ایم (جدول ۲).

با توجه به رابطه ۹:

جدول ۲: برآورد تابع احتمال

t	$\hat{T}_X(tC)$	$-\log \hat{Q}_X(tC)$
۰	۰/۷۱۹۷	۱/۲۷۷۷
۱	۰/۷۰۰۳	۱/۳۰۸۰
۲	۰/۷۱۶۶	۱/۱۹۶۳
۳	۰/۷۶۴۰	۱/۹۹۴۹
۴	۰/۹۰۲۸	۲/۱۳۲۱
۵	۰/۹۳۰۱	۲/۷۳۲۷
۶	۰/۹۰۹۱	۳/۱۹۶۴
۷	۰/۹۷۰۰	۳/۷۸۷۷
۸	۰/۹۸۴۷	۴/۱۸۱۸
۹	۰/۹۹۰۰	۴/۶۰۶۹
۱۰	۰/۹۹۳۹	۵/۱۰۶۰
۱۱	۰/۹۹۶۰	۵/۶۰۶۸
۱۲	۰/۹۹۸۰	۶/۰۳۰۳

جدول ۱: برآورد تابع کوواریانس

$r = \ r\ $	$\hat{c}(r)$	$\hat{c}(r)$
۱	۰/۷۰۰۶	۰/۷۰۶۸
۲	۰/۶۹۲۲	۰/۶۹۴۳
۳	۰/۶۷۹۱	۰/۶۸۲۴
۴	۰/۶۶۸	۰/۶۷۱۲
۵	۰/۶۰۴۹	۰/۶۶۰۰
۶	۰/۶۴۳۰	۰/۶۰۴
۷	۰/۶۳۲۴	۰/۶۴۰۸
۸	۰/۶۲۱۷	۰/۶۳۱۶
۹	۰/۶۱۱۳	۰/۶۲۲۹
۱۰	۰/۶۰۱۲	۰/۶۱۱۴

برای برآورد پارامترها به روش شدت‌ها با توجه به روابط پس از تبدیل واحد داریم:

$$\hat{\lambda} = ۶۶/۳۲ , \quad \hat{U}(X_0) = ۰/۴۹۰۳ , \quad \hat{A}(X_0) = ۰/۰۱۹۲ .$$

۸، ۷ و ۹ داریم:

$$\hat{\lambda} = ۰/۰۴۷ , \quad \hat{U}(X_0) = ۶۷/۷۱ , \quad \hat{A}(X_0) = ۳۱۴/۱۱۰۹$$

مراجع

- [1] Cressie, N. and G. M. Laslett (1987). *Random Set Theory and Problems of Modelling*. SIAM Reu. 29, 557-574.
- [2] Heinrich, L. (1993). *Asymptotic Properties of Minimum Contrast Estimators for Parameters of Boolean Models*. Metrika 40, 67-94.
- [3] Kendall, D. G. (1974). *Foundations of a Theory of Random Sets*. In: Stochastic Geometry (eds, E. F. Harding and D. G. Kendall). John Wiley & Sons, New York. pp 322-376.
- [4] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geodetery*. John Wiley & Sons, New York, London.
- [5] Molchanov, I. (1994). *Asymptotic Properties of Estimation of Parameters of the Boolean Model*. Adv. Appl. Prob. 56, 301-323.
- [6] Stoyan, D., Kendall, W. S. & Mecke, J. (1987). *Stochastic Geometry and Its Application*. J. Wiley & Sons.

- [7] Serra, J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, New York.
- [8] Schmidt M. (1991). *Estimation of the Density in a Stationary Boolean Model*. J. Appl. Probab. 28, 702-708.
- [9] Weil, W. (1995). *The Estimation of Mean Shape and Mean Particle Number in Overlapping Particle System in the Plan*. Adu. Appl. Prod. 27, 102-119.
- [10] حمید قربانی (۱۳۷۹). استنباط آماری برای مدل‌های بولی، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی.