

قضیه‌هایی در آنالیز ترکیبی و کاربردهایی از آنها در احتمال

حمزه ترابی^۱

چکیده

بیشتر مسائل کاربردی احتمال به رابطه‌هایی زیبا در مبحث آنالیز ترکیبی می‌انجامد که بیشتر این رابطه‌ها را می‌توان به صورت تحلیلی، و برخی دیگر را با استقرای ریاضی به اثبات رسانید. ولی آن چه زیبایی این رابطه‌ها را دو چندان می‌سازد، برهانهای ترکیباتی است که برای آنها ارائه می‌شود که راه اثبات چنین قضیه‌هایی، خود می‌تواند دیدگاه‌های خوبی برای مسائل مشابه در اختیارمان بگذارد. در این مقاله چند قضیه پیرامون آنالیز ترکیبی بیان، و سپس برای هر یک، برهانهای ترکیباتی ارائه می‌شود و در پایان، به کاربردهایی از آنها و برهانهایشان، در احتمال پرداخته می‌شود. گفتنی است برای سادگی فهم مطلب، در برهان قضیه‌ها، مسائل آشنای آوند و مهره به کار برده شده است که البته در هر کاربرد ویژه‌ای، می‌توان آنها را به دلخواه تعبیر کرد.

پیشگفتار

در آغاز پیش از پرداختن به هر بحثی، به دلیل بهره‌گیری مکرر از تابع δ ، به معرفی آن می‌پردازیم. تابع δ ، $\delta: \mathcal{K}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

قضیه ۱- برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$\sum_{i=1}^{\min(m, n)} \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_i): \sum_{j=1}^i n_j = n, n_j \geq 1, j=1, 2, \dots, i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_i} = m^n.$$

برهان - پنداریم از آوندی دارای m مهره متمایز که مهره‌ها را از ۱ تا m شماره گذاری کرده ایم، با جایگذاری و یک به یک، یک نمونه مرتب n مهره ای بیرون آورده ایم. در آغاز نشان

می‌دهیم که اگر تعداد حالت‌هایی که در این نمونه، درست i گونه مهره باشد، را با $N_{m,n}(i)$ ، نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$N_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_i): \sum_{j=1}^i n_j = n, n_j \geq 1, j=1, 2, \dots, i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_i}.$$

به عنوان مثال، $N_{4,2}(2)$ ، تعداد حالت‌هایی است که در یک نمونه با جایگذاری و مرتب ۲ تایی از ۴ مهره شماره گذاری شده از ۱ تا ۴، درست دو شماره دیده شود. با استفاده از رابطه بالا داریم:

$$N_{4,2}(2) = \binom{4}{2} \binom{2}{1,1} = 6 \times 2 = 12.$$

این ۱۲ نمونه، عبارت اند از:

$$(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3).$$

^۱ دانشجوی دکترا، بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} N_{m,n}(i) = m^n.$$

پس حکم ثابت می شود.

قضیه ۲- برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{n_1=1}^n \sum_{n_2=1}^n \dots \sum_{n_i=1}^n \delta(n, \sum_{j=1}^i n_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+i-j-1}{n} = \binom{m+n-1}{n}$$

برهان - بار دیگر آوند مطرح شده در برهان قضیه ۱ را در نظر بگیریم. پنداریم یک نمونه نامرتب n تایی از این آوند بیرون آورده ایم. در آغاز نشان می دهیم که اگر تعداد حالتی که درست i گونه مهره در نمونه باشد، با $N'_{m,n}(i)$ ، نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$N'_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{n_1=1}^n \sum_{n_2=1}^n \dots \sum_{n_i=1}^n \delta(n, \sum_{j=1}^i n_j). \quad (2)$$

و همچنین،

$$N'_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+i-j-1}{n} \quad (3)$$

در یک نمونه نامرتب آن چه اهمیت دارد، تعداد هر کدام از i مهره دیده شده از m مهره است. آن چنان که در برهان قضیه ۱ گفته شد، تنها شرطی که n_j ها دارند، شرط (۱) است. ولی با داشتن i گونه مهره، تعداد حالتی که n_j ها می توانند در شرط (۱) صدق کنند، برابر:

$$\sum_{n_{j_1}=1}^n \sum_{n_{j_2}=1}^n \dots \sum_{n_{j_i}=1}^n \delta(n, \sum_{j=1}^i n_{j_k})$$

و یا برابر هم ارز آن، یعنی،

$$\sum_{n_1=1}^n \sum_{n_2=1}^n \dots \sum_{n_i=1}^n \delta(n, \sum_{j=1}^i n_j),$$

است و بنابراین با در نظر گرفتن تعداد راههای گزینش i مهره از m مهره، (۲) ثابت می شود. اینک به اثبات (۳) می پردازیم:

می دانیم که تعداد راه های گزینش i گونه مهره برابر $\binom{m}{i}$

است. اینک پنداریم گونه های $j_1, j_2, \dots, j_i$ گزیده شده باشند. بنابراین، در یک نمونه n تایی شامل این i گونه مهره، باید به ترتیب $n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_i}$ مهره داشته باشیم، به شرط اینکه،

$$\sum_{k=1}^i n_{j_k} = n, \quad n_{j_k} \geq 1 \quad (1)$$

اینک یکی از این حالتیهای صادق در شرط (۱) را در نظر

بگیریم. چون نمونه مرتب است، تعداد آرایشهای گوناگون این i گونه مهره، برابر تعداد جایگشتیهای آنها و بنابراین برابر:

$$\binom{n}{n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_i}}$$

است. در نتیجه، با در نظر گرفتن همه حالتیهای صادق در (۱)، تعداد همه جایگشتیها برابر:

$$\sum_{\{(n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_i}) : \sum_{k=1}^i n_{j_k} = n, n_{j_k} \geq 1, k=1, 2, \dots, i\}} \binom{n}{n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_i}}$$

و یا برابر هم ارز آن، یعنی،

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_i) : \sum_{j=1}^i n_j = n, n_j \geq 1, j=1, 2, \dots, i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_i} = m^n,$$

می شود. اینک با در نظر گرفتن تعداد گزینشهای i گونه مهره از m مهره، خواهیم داشت:

$$N_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_i) : \sum_{j=1}^i n_j = n, n_j \geq 1, j=1, 2, \dots, i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_i}$$

ولی روشن است که تعداد نمونه های n تایی مرتبی که می توان از آوند بیرون آورد، برابر m^n است. از طرفی، در یک نمونه n تایی، تعداد گونه ها می تواند یکی از اعداد $1, 2, \dots, \min(m,n)$ باشد، و بنابراین:

بلکه از مقدار واقعی آن بیشتر است. در نتیجه، باید حاصل ضرب را با تعداد حالتی که از n_j ها درست دو تا برابر صفر است، جمع کنیم. ولی گزینش دو n_j برای صفر بودن به $\binom{i}{2}$ راه انجام می‌گیرد و هم چنین $\binom{n+i-2-1}{n}$ نیز برابر تعداد حالتی که n_j ها، $j=1,2,\dots,i-2$ می‌توانند همه مقادیر صحیح نامنفی نایبتر از n را بگیرند. در نتیجه در این حالت، این تعداد برابر

$$\binom{i}{2} \binom{n+i-2-1}{n}$$

می‌شود. با دنبال کردن روش بالا و با توجه به داشتن $\binom{m}{i}$ راه برای گزینش i گونه مهره از m مهره، (۳) ثابت می‌شود. نتیجه ۱- برای هر $i, i=n+1, n+2, \dots, n \in N$ داریم:

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+i-j-1}{n} = 0$$

برهان - بنابر استدلال گفته شده در قضیه ۲، مجموع بالا تعداد حالتی است که در یک نمونه نامرتب، درست i گونه ویژه داشته باشیم که روشن است این مجموع به دلیل بزرگتر بودن i از n ، صفر است. در زیر به مثالی احتمالاتی که کاربردی از قضیه‌های بالاست، می‌پردازیم.

مثال - یک چهار وجهی را چهار بار مستقلاً پرتاب می‌کنیم. پنداریم متغیر تصادفی X ، گوناگونی وجه‌ها (تعداد وجه‌های گوناگونی که نمایان شده است) باشد. تابع جرم احتمال X را بیابید. **حل** - با توجه به نمادهایی که در برهان قضیه‌های ۱ و ۲ به کار رفته‌اند، داریم: $m=4$ و $n=4$.

در آغاز پنداریم ترتیب پرتابها مهم باشد. روشن است که تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر 4^4 است و لذا، بنابر استقلال پرتابها، احتمال هر پیشامد ساده برابر $\frac{1}{4^4} (= \frac{1}{256})$ است. در نتیجه، با توجه به نمادهای معرفی شده در قضیه ۱ داریم:

تعداد بردارهای پاسخ معادله $n_1 + n_2 + \dots + n_i = n$ ، $n_j = 1, 2, \dots, n$ ، $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ را با $N_n(i)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که اگر n_j ها مجاز به گرفتن همه مقادیر صحیح نامنفی نایبتر از n باشند، $N_n(i)$ برابر $\binom{n+i-1}{n}$ می‌شود. بنابراین $N_n(i)$ برابر ترکیب بالا منهای تعداد حالتی است که دست کم یکی از n_j ها برابر صفر باشد. در نتیجه، بنابر تعریف $N_n(i)$ داریم:

$$N_n(i) = \binom{n+i-1}{n} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} N_n(i-j); \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$$

که یک رابطه بازگشتی برای $N_n(i)$ است. ولی می‌توانستیم $N_n(i)$ را نیز به صورت دیگری به دست آوریم:

چنان که گفتیم $N_n(i)$ برابر $\binom{n+i-1}{n}$ منهای تعداد حالتی است که دست کم یکی از n_j ها صفر باشد، $j=1, 2, \dots, i$. اینک در آغاز حالتی را در نظر می‌گیریم که درست یکی از n_j ها برابر صفر باشد. در این حالت می‌توان نوشت:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} = n;$$

(توجه می‌کنیم که در تعداد بالا، فرقی ندارد که کدام یک از n_j ها برابر صفر باشد، برای سادگی n_i را صفر می‌گیریم). اکنون اگر n_j ها، $j=1, 2, \dots, i-1$ ، می‌توانستند همه مقادیر صحیح نامنفی نایبتر از n را بگیرند، می‌توانستیم ادعا کنیم که تعداد این حالتها برابر

$$\binom{n+i-1-1}{n} \quad (4)$$

است. بنابراین، با توجه به این که $\binom{i}{1}$ راه نیز برای گزینش یک n_j بی که برابر صفر است داریم، این تعداد برابر

$$\binom{i}{1} \binom{n+i-1-1}{n}$$

می‌شود. ولی چنان که گفتیم در فرمول (۴)، برخی از n_j ها، $j=1, 2, \dots, i-1$ ، نیز برابر صفرند. بنابراین حاصل ضرب بالا، تعداد واقعی حالتی است که دست کم یکی از n_j ها برابر صفر است، نیست؛

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{30}, & x=1 \\ \frac{18}{30}, & x=2 \\ \frac{12}{30}, & x=3 \\ \frac{1}{30}, & x=4 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تذکره ۱- به آسانی می توان دریافت که تعداد حالت هایی که می توان n مهره متمایز را در m آوند نهاد به گونه ای که درست $(m-i)$ آوند خالی باشد، در دو حالت متمایز بودن و یکسان بودن آوندها، به ترتیب برابر $N'_{m,n}(i)$ و $N_{m,n}(i)$ است.

تذکره ۲- روشن است که تعداد حالت هایی که می توان یک نمونه n تایی از آوندی دارای m گونه مهره (n_1 مهره از گونه اول، n_2 مهره از گونه دوم، $\dots$ ، n_m مهره از گونه m ام) بیرون آورد به صورتی که در نمونه، درست i گونه مهره باشد، $i=1,2,\dots,\min(m,n)$ ، $n \leq n_j$ ، $j=1,2,\dots,m$ ، در دو حالت نمونه مرتب و نامرتب، به ترتیب برابر $N'_{m,n}(i)$ و $N_{m,n}(i)$ است.

مثال ۲- آوندی دارای ۳۰ مهره قرمز، ۴۰ مهره سفید و ۵۰ مهره سبز است. از این آوند به تصادف یک نمونه ۳ تایی بیرون می آوریم. احتمال آن را بیابید که،
الف) درست ۲ رنگ دیده شود؛

ب) تنها دو رنگ سفید و قرمز دیده شود.

حل = الف) بنابر تذکره ۲، احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب

و نامرتب، به ترتیب برابر $\frac{N'_{r,r}(y)}{\binom{32}{30}}$ و $\frac{N_{r,r}(y)}{320}$ است. ولی،

$$\begin{aligned} N_{r,r}(y) &= \binom{3}{2} \left[\binom{30}{1,29} + \dots + \binom{30}{1,29} \right] \\ &= \binom{3}{2} [2^{30} - 2] = 3221225666 \end{aligned}$$

و

$$N_{i,i}(x) = \begin{cases} \binom{4}{1} \binom{4}{4} & x=1 \\ \binom{4}{2} \left[\binom{4}{1,3} + \binom{4}{2,2} + \binom{4}{3,1} \right] & x=2 \\ \binom{4}{3} \left[\binom{4}{1,1,2} + \binom{4}{1,2,1} + \binom{4}{2,1,1} \right] & x=3 \\ \binom{4}{4} \binom{4}{1,1,1,1} & x=4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و بنابراین، تابع جرم احتمال گوناگونی وجه ها، به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{64}, & x=1 \\ \frac{21}{64}, & x=2 \\ \frac{36}{64}, & x=3 \\ \frac{6}{64}, & x=4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اینک پنداریم ترتیب پرتابها مهم نباشد. در این حالت تعداد

عضوهای فضای نمونه ای برابر $\binom{4+4-1}{4} = 35$ است و لذا، بنابر

نماد معرفی شده در برهان قضیه ۲ داریم:

$$N'_{i,i}(x) = \begin{cases} \binom{4}{1} \binom{4}{4} & x=1 \\ \binom{4}{2} \left[\binom{4}{0} - \binom{2}{1} \binom{4}{4} \right] & x=2 \\ \binom{4}{3} \left[\binom{4}{0} - \binom{3}{1} \binom{4}{4} + \binom{3}{2} \binom{4}{4} \right] & x=3 \\ \binom{4}{4} \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} \binom{4}{4} + \binom{4}{2} \binom{4}{4} - \binom{4}{3} \binom{4}{4} \right] & x=4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و بنابراین تابع جرم احتمال گوناگونی وجه ها به صورت زیر است:

$$N'_{r,r}(2) = \binom{3}{2} \times \left[\binom{32}{30} - \binom{2}{1} \right] = 87$$

بنابراین احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب و نامرتب، به ترتیب $1/56 \times 10^{-6}$ و $0/175$ است. (توجه می کنیم که بنابر تذکر ۱، در جایگذاری ۳ مهره متمایز در ۳۰ آوند، احتمال آن که درست یک آوند تهی باشد نیز برای حالت های آوندهای متمایز و یکسان، به ترتیب برابر $1/56 \times 10^{-6}$ و $0/175$ است.)

ب) در این حالت به دلیل مشخص بودن رنگ مهره های نمونه، احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب و نامرتب، به ترتیب برابر

$$\frac{N'_{r,r}(2) / \binom{3}{2}}{\binom{32}{30}} \text{ و } \frac{N_{r,r}(2) / \binom{3}{2}}{3^3}$$

و بنابراین، به ترتیب برابر $5/2 \times 10^{-6}$ و $0/08$ می شوند. (توجه می کنیم که بنابر تذکر ۱ در جایگذاری ۳ مهره متمایز در ۳ آوند، احتمال آن که یک آوند ویژه، تهی باشد نیز برای حالت های آوندهای متمایز و یکسان، به ترتیب برابر $5/2 \times 10^{-6}$ و $0/08$ است.)

در دنباله بحث، برای تعداد افرازی های یک مجموعه n عضوی که برابر

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_i) : \sum_{j=1}^i n_j = n, n_j \geq 1, j=1, 2, \dots, i\}} \frac{1}{i!} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_i}$$

است، یک رابطه بازگشتی ارائه می دهیم که محاسبات آن برای رایانه، به آسانی امکان پذیر است.

قضیه ۳- اگر تعداد افرازی های یک مجموعه n عضوی را با $NP(n)$ نشان دهیم، خواهیم داشت: $NP(1) = 1$ ، $NP(2) = 20$ ، و هم چنین:

$$NP(n) = \quad (5)$$

$$2 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{n-j} \left(-\frac{1}{2} \delta(j, \frac{n}{2}) + NP(j) \right) ; n \geq 3.$$

برهان - پنداریم مجموعه ای n عضوی به صورت

$\{1, 2, \dots, n\}$ داشته باشیم. روشن است که تعداد افرازی های مجموعه

تک عضوی $\{1\}$ ، یک، یعنی خود مجموعه $\{1\}$ است. همچنین

$NP(2) = 2$ ؛ زیرا افرازی های این مجموعه به صورت

$\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1, 2\}$

است که یکی خود مجموعه و دیگری افرازی است که در آن همه

زیر مجموعه ها تک عضوی اند. اینک برای پی بردن به چگونگی

برهان، درباره حالت های $n=3$ و $n=4$ بحث می کنیم.

افرازی های مجموعه ۳ عضوی $\{1, 2, 3\}$ به صورت زیر است:

$\{1, 2, 3\}$ ، یعنی خود مجموعه؛ $\{3\}$ ، $\{1, 2\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{1\}$ ،

$\{2, 3\}$ یعنی مجموعه افرازی هایی که در آنها دست کم یک زیر

مجموعه ۲ عضوی وجود دارد و $\{3\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1\}$ ؛ یعنی افرازی که

تنها دارای زیر مجموعه های تک عضوی است.

به آسانی دریافت می شود که در افرازی های یک مجموعه n

عضوی، $n \geq 2$ دو افراز ویژه همواره وجود دارند، خود مجموعه

و افرازی که در آن همه زیر مجموعه ها تک عضوی اند.

برای حالت $n=4$ نیز بنابر بحث بالا داریم:

تعداد افرازی های یک مجموعه ۴ عضوی $= 2 +$ (تعداد افرازی هایی

که در آنها دست کم یک زیر مجموعه ۳ عضوی وجود دارد)

$+ ($ تعداد افرازی هایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه ۲

عضوی وجود دارد).

ولی تعداد افرازی های یک مجموعه ۴ عضوی که در آنها دست

کم یک زیر مجموعه ۳ عضوی وجود دارد، برابر $\binom{4}{3}$ است. این

افرازاها عبارت اند از:

$\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{3\}$ ، $\{1, 2, 4\}$ ، $\{4\}$ ، $\{1, 2, 3\}$ ، $\{1\}$ ، $\{2, 3, 4\}$.

همچنین افرازی هایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه ۲

عضوی وجود دارد، شامل افرازی هایی است که در آنها به جز زیر

مجموعه های ۲ عضوی، ممکن است زیر مجموعه های دیگری نیز

باشند؛ یعنی زیر مجموعه های تک عضوی. بنابراین برای شمردن

این افرازاها، در آغاز باید دو عضو از ۴ عضو را برگزینیم و سپس

$$NP(n) = 2 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{n-j} \left(NP(j) - \frac{1}{2} \delta(j, \frac{n}{2}) \right)$$

قضیه ۴ = برای یک مجموعه n عضوی، اگر تعداد افزاهایی را که در آنها همه زیر مجموعه ها، ۲ عضوی باشند با $NP_2(n)$ نشان دهیم، رابطه بازگشتی زیر برای $n = 6, 8, \dots$ برقرار است:

$$NP_2(n) = NP_2(n-2) + (n-2)(n-3).NP_2(n-4),$$

و همچنین برای $n = 2, 4, \dots$ داریم:

$$NP_2(n) = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{2i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\binom{n}{2, 2, \dots, 2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! 2^{n/2}} \quad (V)$$

برهان = مجموعه ای n عضوی مانند $\{1, 2, \dots, n\}$ ، $n = 6, 8, \dots$ را در نظر می گیریم. برای دو عضو ویژه $n-1$ و n این دو مجموعه، دو حالت پیش می آید: یا هر دو در یک زیر مجموعه ۲ عضوی اند و یا نیستند. بنابراین:

$$NP_2(n) = (\text{تعداد حالت هایی که این دو عضو ویژه با هم در یک زیر مجموعه باشند}) + (\text{تعداد حالت هایی که این دو عضو ویژه با هم در یک زیر مجموعه نباشند}).$$

ولی تعداد حالت هایی که این دو عضو ویژه با هم هستند برابر تعداد حالت های گزینش این دو عضو ویژه، ضربدر تعداد حالت هایی است که $n-2$ عضو باقی مانده می توانند زیر مجموعه هایی دو عضوی تشکیل دهند. بنابراین برابر $\binom{n}{2} NP_2(n-2)$ است. همچنین حالتی که این دو عضو ویژه با هم نیستند، حالتی است که از $(n-2)$ عضو باقیمانده، دو عضو را برای این دو عضو ویژه برمی گزینیم (این ۴ عضو با هم دو زیر مجموعه ۲ عضوی را تشکیل می دهند)، که تعداد این حالتها برابر $(n-2)(n-3)$ است. اینک $(n-4)$ عضو باقی می ماند که آنها نیز باید زیر مجموعه های ۲ عضوی تشکیل دهند که تعداد این حالتها برابر $NP_2(n-4)$ است. بنابراین تعداد حالت هایی که این دو عضو ویژه با هم نیستند، برابر $NP_2(n-4)$ است. پس:

افزاهای ۲ عضوی باقیمانده را نیز با این مجموعه در نظر بگیریم. ولی تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی برابر $\binom{4}{2} = 6$ است. با گزینش این دو عضو، دو عضو دیگر باقی می ماند که باید افزاهای گوناگون این دو عضو را نیز با زیر مجموعه ۲ عضوی بالا در نظر بگیریم. بنابراین، در این حالت باید $12 (= 6 \times NP(2))$ افزاز داشته باشیم. ولی می توان به آسانی دریافت که افزاهایی که از دو زیر مجموعه ۲ عضوی تشکیل شده اند، دوبار به حساب آمده اند. بنابراین از تعداد بالا، یعنی ۱۲، باید عدد ۳ $(= \frac{1}{2} \binom{4}{2})$ کم شود.

$$NP(4) = 9$$

برای هر $n \geq 3$ ، داریم:

$$NP(n) = 2 + (\text{تعداد افزاهایی که در آنها درست دست کم یک زیر مجموعه $(n-1)$ عضوی وجود دارد}) + (\text{تعداد افزاهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه $(n-2)$ عضوی وجود دارد}) + \dots + (\text{تعداد افزاهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه $(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ عضوی وجود دارد}).$$

(۶)

ولی تعداد افزاهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه $(n-j)$ عضوی وجود دارد، $1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ برابر

$$\binom{n}{n-j} NP(j),$$

است و همچنین تعداد بالا برای $(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ ، در دو حالت n فرد و n زوج به ترتیب برابر

$$\binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} NP\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - \frac{1}{2} \binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{و} \quad \binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} NP\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

است و بنابراین برای هر $n \geq 3$ ، این تعداد برابر

$$\binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(NP\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - \frac{1}{2} \delta\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \frac{n}{2}\right) \right)$$

است. در نتیجه بنابر مطالب بالا،

مثال ۳- فردی به تصادف یک مجموعه ۶ عضوی را افراز

می‌کند، احتمال آن را بیابید که در این افراز:

(الف) دست کم یک زیر مجموعه ۳ عضوی وجود داشته باشد؛

(ب) تنها زیر مجموعه‌های ۲ عضوی وجود داشته باشد.

حل = الف) بنابر مسئله ۲، تعداد عضوهای فضای نمونه ای

آزمایش به صورت زیر به دست می‌آید؛

$$NP(6) = 2 + \sum_{j=1}^2 \binom{6}{6-j} \left(NP(j) - \frac{1}{2} \delta(j, 3) \right)$$

$$= 2 + \binom{6}{0} (1-0) + \binom{6}{1} (2-0) + \binom{6}{2} (0-\frac{1}{2}) = 128$$

ولی تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعه

۳ عضوی وجود دارد، برابر $\binom{6}{3} (0-\frac{1}{2}) = 90$ است. بنابراین

احتمال خواسته شده برابر $\frac{40}{64}$ است.

(ب) بنابر قضیه ۴، داریم: $NP_r(6) = 10$. بنابراین احتمال

خواسته شده برابر $\frac{10}{128}$ می‌شود.

$$NP_r(n) = NP_r(n-2) + (n-2)(n-3)NP_r(n-4).$$

روشن است که باید n بیشتر از ۶ باشد. به آسانی دریافت

می‌شود که $NP_r(2) = 1$ و هم چنین $NP_r(4) = 3$ ، زیرا همه

افرازهای خواسته شده به صورت زیر است:

$$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}$$

که البته از (۷) نیز $NP_r(2)$ و $NP_r(4)$ به ترتیب برابر ۱ و ۳ به دست

می‌آیند. بنابراین برای اثبات (۷) کافی است نشان دهیم که این

رابطه با (۸) سازگاری دارد؛ یعنی نشان دهیم که،

$$\frac{\prod_{i=1}^n \binom{y_i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\prod_{i=1}^{n-2} \binom{y_i}{1}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} + (n-2)(n-3) \frac{\prod_{i=1}^{n-4} \binom{y_i}{2}}{\left(\frac{n-4}{2}\right)!}; n = 6, 8, \dots$$

و یا هم ارز آن،

$$\frac{\prod_{i=1}^n \binom{y_i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\prod_{i=1}^{n-2} \binom{y_i}{1}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} + (n-2)(n-3) \frac{\prod_{i=1}^{n-4} \binom{y_i}{2}}{\left(\frac{n-4}{2}\right)!}; n = 6, 8, \dots$$

که درستی این دو برابری، به روشنی پیداست.

مراجع

[۱] ترابی، حمزه، چند روش پیشنهادی برای آزمون CSR در الگوهای نقطه ای فضایی، پایان نامه کارشناسی ارشد ۱۳۷۵.

[۲] بالاکریشنان، ریاضیات گسسته، ترجمه دکتر فاروقی، چاپ دانشگاه یزد.