

برخی ویژگی‌های متغیرهای تصادفی وابسته

محمد امینی دهک^۱

چکیده

هدف اصلی این مقاله، معرفی برخی از ویژگی‌های متغیرهای تصادفی، و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی است، که مشابه آنها برای متغیرهای تصادفی مستقل برقرار است. کاربرد این خواص در رابطه با قضایای حدی متغیرهای تصادفی وابسته، [۱] و [۲] و ارائه مثالهای متنوع در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است.

۱ مقدمه و تعاریف

مقاله تنظیم و ارائه می‌شود.

تعریف ۱ – ۱

(الف) دو متغیر تصادفی X, Y به طور منفی وابسته مربعی هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی x, y ,

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x].P[Y \leq y] \quad (1)$$

(ب) دو متغیر تصادفی X, Y به طور مثبت وابسته مربعی هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی x, y ,

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x].P[Y \leq y] \quad (2)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که نامساوی‌های (۱) و (۲) به

وابستگی منفی بین متغیرهای تصادفی، موضوع مورد علاقه بسیاری از آماردانان در سالهای اخیر بوده است. چون در بسیاری از مدل‌های تصادفی، فرض استقلال متغیرهای تصادفی برقرار نیست و در واقع افزایش در بعضی از متغیرها با کاهش متغیرهای دیگر در ارتباط است، بنابراین فرض وابستگی منفی مناسبتر خواهد بود. به عنوان مثال در توزیع نرمال چند متغیره با ضرایب همبستگی منفی (z_i) مسلماً وابستگی مثبت بین متغیرهای تصادفی برقرار نمی‌باشد. علاوه بر این، کمیت‌های تصادفی متعددی در آمار احتمال وجود دارند که وابستگی منفی بین آنها برقرار می‌باشد، نمونه‌های متنوعی را می‌توان در مراجع ([۴] و [۵] و [۶]) پیدا نمود. در نتیجه با توجه به اهمیت این خصوصیت متغیرهای تصادفی در ادامه مقاله [۸]، این

^۱ محمد امینی دهک، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

^۲ Negative quadratic dependent

^۳ Positive quadratic dependent

بنابراین $(5) \neq (6)$. همچنین اگر تابع احتمال X_3, X_2, X_1 بصورت زیر باشد

$$p(1, 0, 0) = p(0, 1, 0) = p(0, 0, 1) = p(1, 1, 1) = \frac{1}{4}$$

آنگاه نامساوی (5) برقرار است اما نامساوی (6) برقرار نیست بنابراین $(6) \neq (5)$.

تعريف ۱-۴

پیشامدهای تصادفی $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ به طور منفی وابسته‌اند اگر توابع نشانگر آنها وابسته منفی باشند. مثال زیر نشان می‌دهد که دوبدو وابسته منفی بودن متغیرهای تصادفی، همواره وابستگی منفی را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۱.۲ فرض کنید $\{1, 2, \dots, 8\} = S$ با $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $p(\{i\}) = \frac{1}{8}, i = 1, 2, \dots, 8$ و $A_2 = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ و $A_3 = \{3, 4, 6, 8\}$ داریم $X_i = I_{A_i}, i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} P[X_i \leq 0, X_j \leq 0] &= \frac{1}{8} \\ &\leq P[X_i \leq 0].P[X_j \leq 0] \\ &= \frac{9}{64} \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

بنابراین، X_3, X_2, X_1 دوبدو به طور منفی وابسته‌اند، ولی برای وابستگی منفی داریم:

$$\begin{aligned} P[X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0] &= \frac{2}{8} \\ &> \prod_{i=1}^3 P[X_i > 0] \\ &= \left(\frac{5}{8}\right)^3 \end{aligned}$$

مثال فوق، همچنین نشان می‌دهد که پیشامدهای A_3, A_2, A_1 به طور منفی وابسته نیستند ولی دوبدهو به طور منفی وابسته‌اند. مثال بعد نشان می‌دهد که X_3, X_2, X_1 به طور منفی وابسته هستند ولی $X_3 = X_1 + X_2$ و $X_2 = X_1 + Y$ به طور منفی وابسته نیستند.

ترتیب با نامساوی‌های (3) و (4) معادلند

$$P[X > x, Y > y] \leq P[X > x].P[Y > y] \quad (3)$$

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x].P[Y > y] \quad (4)$$

تعريف ۱-۲

دو پیشامد A و B به طور منفی وابسته‌اند اگر توابع نشانگر آنها NQD باشند.

تعريف ۱-۳

الف) متغیرهای تصادفی X_n, X_2, X_1 به طور منفی وابسته‌اند، اگر برای تمام اعداد حقیقی x_n, x_2, x_1 هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P[\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)] \leq \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \quad (5)$$

$$P[\bigcap_{i=1}^n (X_i > x_i)] \leq \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i) \quad (6)$$

ب) متغیرهای تصادفی X_n, X_2, X_1 دوبدهو به طور منفی وابسته‌اند، اگر برای هر $(i \neq j)$ $n = 2$ برای (5) و (6) معادلند، ولی مثال زیر نشان می‌دهد که برای $(n \geq 3)$ همواره معادل نیستند. ج) یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ به طور منفی وابسته است اگر هر زیرمجموعه متناهی از آن وابسته منفی باشد.

مثال ۱.۱ (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱): فرض کنید متغیرهای تصادفی X_3, X_2, X_1 دارای توزیع توأم زیر باشند

$$p(0, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(1, 1, 0) = p(0, 0, 0) = \frac{1}{4}$$

داریم

$$P[X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0] = 0 < \prod_{i=1}^3 P[X_i > 0] = \frac{1}{8}$$

و

$$P[X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0] = \frac{1}{4} > \prod_{i=1}^3 P[X_i \leq 0] = \frac{1}{8}$$

اثبات:

شرط لازم. هرگاه $Y = I_B, X = I_A$ آنگاه بنا به تعریف (۲) هستند. در نتیجه برای مقادیر حقیقی x, y که $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ داریم

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P[X = 1, Y = 1] = P[X > x, Y > y] \\ &\leq P[X > x].P[Y > y] = P(A)P(B) \end{aligned}$$

شرط کافی. فرض کنید نامساوی (۷) برقرار باشد و $0 \leq x, y \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} P(X > x, Y > y) &= P[X = 1, Y = 1] = P(A \cap B) \\ &\leq P(A)P(B) = P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= P[X > x, Y > y] \end{aligned}$$

بنابراین برای تمام اعداد حقیقی x, y نامساوی (۳) برقرار است. پس X, Y NQD هستند و در نتیجه حکم ثابت است. نتیجه. اگر دو پیشامد تصادفی A و B وابسته منفی باشند آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که

- (الف) B^c, A^c به طور منفی وابسته‌اند.
- (ب) B, A^c به طور مثبت وابسته‌اند.
- (ج) B^c, A به طور مثبت وابسته‌اند.

قضیه ۱.۳ فرض کنید f_1, f_2, f به ترتیب توابع چگالی تؤام و چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی Y, X باشند و

$$f(x, y) \leq f_1(x)f_2(y) \quad \forall x, y \in R \quad (8)$$

آنگاه

(الف) Y, X NQD هستند.(ب) اگر Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی باشند آنگاه

$$E[X | Y = y] \leq E(X) \quad w.p. 1$$

$$E[Y | X = x] \leq E(Y) \quad w.p. 1$$

$$F_{x+y} \leq F_1 * F_2 \quad (ج)$$

مثال ۱.۳ فرض کنید X_1, X_2, X_3 دارای تابع احتمال تؤام زیر باشند:

$$p(0, 0, 0) = p(1, 0, 1) = 0$$

$$p(0, 0, 1) = p(0, 1, 0) = 0/2$$

$$p(0, 1, 1) = p(1, 1, 0) = p(1, 1, 1) = 0/1$$

$$p(1, 0, 0) = 0/3$$

(الف) X_1, X_2, X_3 به طور منفی وابسته‌اند. (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱).

(ب) X_2 و X_3 به طور منفی وابسته نیستند زیرا برای $1 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 1$ داریم

$$P[Y \leq y, X_2 \leq x] = \frac{5}{10} > P[Y \leq y].P[X_2 \leq x] = \frac{48}{100}$$

۲ نتایج اصلی

در این بخش، قضایا و نتایج متنوعی که بیان‌کننده خواص متغیرهای تصادفی وابسته منفی و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی می‌باشد و همچنین مثالهای گوناگونی از متغیرهای تصادفی با توزیعهای خاص چند متغیره که بطور منفی وابسته‌اند را ارایه می‌نماییم.

قضیه ۱.۱ ([۲]) فرض کنید X_n, X_2, X_1, \dots متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته باشند آنگاه

$$(الف) E(\prod_{i=1}^n X_i) \leq \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

(ب) برای توابع یکنواخت صعودی (نزولی) f_n, \dots, f_2, f_1 متغیرهای تصادفی $(X_n), \dots, f_2(X_2), f_1(X_1)$ f_n نیز به طور منفی وابسته‌اند.

(ج) برای مقادیر حقیقی نامنفی t_n, \dots, t_2, t_1

$$E(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}) \leq \prod_{i=1}^n E(e^{t_i X_i})$$

قضیه ۱.۲ دو پیشامد تصادفی B, A وابسته منفی هستند و اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) \leq P(A).P(B) \quad (7)$$

مثال ۱.۴ فرض کنید X, Y دارای تابع احتمال توان زیر باشند.

اثبات:

$$p(-1, -1) = p(1, 0) = 0 \quad \text{فرض کنید } X, Y \text{ مطلقاً پیوسته باشند، برای تمام اعداد حقیقی } y, x \text{ داریم}$$

$$p(0, 0) = p(0, -1) = p(-1, 0) = p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{9} \quad (\text{الف})$$

$$p(1, -1) = p(-1, 1) = \frac{2}{9}$$

(الف) می‌توان به سادگی نشان داد که زوج تصادفی NQD (X, Y) هست ولی هیچکدام از زوجهای NQD $(X^2, Y), (X, Y^2), (X^2, Y^2), (|X|, |Y|)$ نیستند.

(ب) بنابراین شرط (۸) برقرار نیست.

تبصره . مثال فوق همچنین نشان می‌دهد اگر NQD Y, X باشند آنگاه قسمت (ب) قضیه ۱.۳ همواره برقرار نیست زیرا

$$E[X | Y = -1] = \frac{2}{9} > E(X) = 0$$

و

$$E[Y | X = -1] = \frac{2}{9} > E(Y) = \frac{1}{9}$$

بنابراین (۸) یک شرط لازم برای قسمت (ب) قضیه است.

ل. فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با آنگاه $E[\frac{1}{Y}] < \infty, P[Y > 0] = 1$

$$E[\frac{1}{Y}] \geq \frac{1}{E(Y)}$$

قضیه ۱.۴ فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی با

$$E(|X|) < \infty, E[\frac{1}{Y}] < \infty, P[Y > 0] = 1$$

(الف) اگر Y NQD X, Y باشند آنگاه PQD $\frac{1}{Y}, X - 1$ هستند.

$$E[X] \geq E[\frac{X}{Y}] \geq \frac{E(X)}{E(Y)} - 2 \quad (\text{۲})$$

(ب) اگر Y باشند آنگاه PQD X, Y NQD $\frac{1}{Y}, X - 1$ هستند.

$$E[X] \leq E[\frac{X}{Y}] \leq \frac{E(X)}{E(Y)} - 2 \quad (\text{۲})$$

اثبات:

(الف) برای هر دو عدد حقیقی $x, y > 0$ داریم

$$1) \quad P[X \leq x, \frac{1}{Y} \leq y] = P[X \leq x] - P[X \leq x, Y < \frac{1}{y}]$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(t, s) dt ds \\ &\leq \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_1(t) f_2(s) dt ds \\ &= F_1(x) F_2(y) \end{aligned}$$

بنابراین NQD Y, X هستند.

(ب)

$$\begin{aligned} E[Y | X = x] &= \int_0^{+\infty} y f(y | x) dy \\ &\leq \int_0^{+\infty} y f(y) dy \\ &= E[Y] \quad w.p. 1 \end{aligned}$$

و متشابه‌اً داریم:

$$E[X | Y = y] \leq E(X) \quad w.p. 1$$

(ج)

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \int \int_{[x+y \leq t]} f(x, y) dx dy \\ &\leq \int \int_{[x+y \leq t]} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-y} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-y) f_2(y) dy \\ &= F_1 * F_2 \end{aligned}$$

می‌دانیم که اگر متغیرهای تصادفی Y, X مستقل از هم باشند، آنگاه متغیرهای تصادفی $(X, h(Y), g(Y))$ نیز برای هر دو تابع حقیقی g, h مستقل از هم هستند. این خاصیت در مورد متغیرهای تصادفی وابسته منفی همواره برقرار نیست.

مثال زیر ضمن نشان دادن این موضوع، همچنین نشان می‌دهد، که عکس قسمت (الف) قضیه ۱.۳ نیز همواره برقرار نمی‌باشد.

می‌توان پیدا نمود.

مثال ۱.۵ الف) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^n x_i!(N - \sum_{i=1}^n x_i)!} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - \sum_{i=1}^n p_i)^{N - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq N, p_i \geq 0, 0 < \sum_{i=1}^n p_i < 1$$

آنگاه X_1, X_2, \dots, X_n به طور منفی وابسته‌اند.

ب) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک بردار تصادفی نرمال مقارن با آنگاه $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho < 0, 1 \leq i \leq j \leq n$

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1} \quad (1)$$

آنگاه X_1, X_2, \dots, X_n به طور منفی وابسته‌اند. (۲)

ج) (توزیع توأم رتبه‌ها): فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از جامعه باشد و R_i رتبه $X_i, i = 1, \dots, n$, آنگاه R_1, R_2, \dots, R_n به طور منفی وابسته‌اند.

د) (فوق هندسی چند متغیره): فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{M_i}{x_i} \left(\frac{M - \sum_{i=1}^n M_i}{N - \sum_{i=1}^n x_i} \right)^{\sum_{i=1}^n M_i}}{\binom{M}{n}}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq N, \sum_{i=1}^n M_i \leq M$$

آنگاه X_1, X_2, \dots, X_n به طور منفی وابسته‌اند.

ذ) (توزیع دیرلکت): فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n دارای چگالی توأم زیر باشند،

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\frac{\Gamma(\sum_{i=0}^n \theta_i)}{\prod_{i=0}^n \Gamma(\theta_i)} (1 - \sum_{i=1}^n x_i)^{\theta_0 - 1} \prod_{i=1}^n x_i^{\theta_i - 1}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, \theta_i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\geq P[X \leq x] - P[X \leq x].P[Y < \frac{1}{y}]$$

$$= P[X \leq x].P[\frac{1}{Y} \leq y]$$

$$2) \quad \text{COV}(X, \frac{1}{Y}) = E(\frac{X}{Y}) - E(X).E(\frac{1}{Y}) \geq 0$$

بنابراین ۰ اگر $E(\frac{X}{Y}) \geq \frac{E(X)}{E(Y)}$ آنگاه $E(X) \geq 0$ ب) متشابه‌اً قسمت «ب» نیز اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۵ پیشامدهای تصادفی A_1, A_2, \dots, A_m به طور منفی وابسته‌اند اگر برای هر $2 \leq m \leq n$ هر i_1, i_2, \dots, i_n از اعداد طبیعی $(1, 2, \dots, n)$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}) \leq \prod_{j=1}^m P(A_{i_j}) \quad (9)$$

$$P(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}^c) \leq \prod_{j=1}^m P(A_{i_j}^c)$$

اثبات:

شرط لازم. تعریف می‌کنیم، $X_i = I_{A_i}, i = 1, 2, \dots, n$ بنا به تعریف (۱.۴) متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n در نتیجه X_m, \dots, X_2, X_1 برای هر $2 \leq m \leq n$ به طور منفی وابسته‌اند، بنابراین برای هر $1 \leq x_i \leq 0$ داریم:

$$P[\bigcap_{j=1}^m A_j] = P[\bigcap_{j=1}^m (X_j > x_j)] \leq \prod_{j=1}^m P[X_j > x_j] = \prod_{j=1}^m P(A_j)$$

$$P[\bigcap_{j=1}^m A_j^c] = P[\bigcap_{j=1}^m (X_j \leq x_j)] \leq \prod_{j=1}^m P[X_j \leq x_j] = \prod_{j=1}^m P(A_j^c)$$

شرط کافی. اگر نامساویهای (۹) برای هر $2 \leq m \leq n$ برقرار باشند آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که $I_{A_n}, \dots, I_{A_1}, I_{A_1}$ به طور منفی وابسته‌اند، در نتیجه حکم ثابت است.

مثالهای زیر که نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی وابسته منفی با توزیع چند متغیره خاص هستند را، در مراجع [۶] الی [۲۶]

الف) X_1, X_2, \dots, X_n به طور نامنفی وابسته‌اند.

ب) هرگاه X_1, X_2, \dots, X_n نامنفی باشند آنگاه برای هر $j \neq i$

$$E[X_i | X_j = x_j] \leq E(X_i)$$

آنگاه X_1, X_2, \dots, X_n به طور منفی وابسته‌اند.

قضیه ۱.۶ ([۲]) فرض کنید $f_{n, f_2, f_1, f} \dots, f_n, f_2, f_1, f$ به ترتیب

توابع چگالی توان و حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی
باشند و برای تمام مقادیر حقیقی

$$x_n, \dots, x_2, x_1$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

- [1] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). The almost sure convergence of weighted sums of uniformly bounded random variables. *Journal of sciences Islamic Republic of Iran* P:112-115.
- [2] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). Some contributions to limit Theorems for ND random variable. Ph.D. Thesis.
- [3] Bozorgnia, A. Patherson, R. F. and Taylor, R. I. (1996). Limit theorems for dependent random variables. *World Congress Nonlinear Analysis'92*. P. 1639-1650.
- [4] Block, H. W, Savits, T. H. and Shaked, M. (1982). Some concepts of negative dependence. *Ann. Probab* Vol. 10, No. 3, P. 765-772.
- [5] Ebrahimi, N. and Ghosh, M. (1981). Multivariate negative dependence. *comm.statist*, A10(4). 307-337.
- [6] Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983). Negative association of random variable's with applications. *The Annals of statistics*. Vol. 11, No. 1. P. 286-295.
- [7] Lemann, E. L. (1966). some Concepts of dependence. *Ann.math.statist*. 43, P. 1137-1153.
- [8] امینی و بزرگنیا (۱۳۷۵)، انواع پیوندهای منفی و روابط بین آنها، اندیشه آماری، سال اول، شماره اول، صفحه ۲۷-۳۴.