

برخی ویژگیهای متغیرهای تصادفی وابسته

محمد امینی دهک^۱

چکیده

هدف اصلی این مقاله، معرفی برخی از ویژگیهای متغیرهای تصادفی، و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی است، که مشابه آنها برای متغیرهای تصادفی مستقل برقرار است. کاربرد این خواص در رابطه با قضایای حدی متغیرهای تصادفی وابسته، [۱] و [۲] و ارائه مثالهای متنوع در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است.

۱ مقدمه و تعاریف

مقاله تنظیم و ارائه می شود.

تعریف ۱-۱

الف) دو متغیر تصادفی Y, X به طور منفی وابسته مربعی (NQD)^۲ هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی y, x

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x].P[Y \leq y] \quad (۱)$$

ب) دو متغیر تصادفی Y, X به طور مثبت وابسته مربعی (PQD)^۳ هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی y, x

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x].P[Y \leq y] \quad (۲)$$

به سادگی می توان نشان داد که نامساویهای (۱) و (۲) به

وابستگی منفی بین متغیرهای تصادفی، موضوع مورد علاقه بسیاری از آماردانان در سالهای اخیر بوده است. چون در بسیاری از مدل های تصادفی، فرض استقلال متغیرهای تصادفی برقرار نیست و در واقع افزایش در بعضی از متغیرها با کاهش متغیرهای دیگر در ارتباط است، بنابراین فرض وابستگی منفی مناسبتر خواهد بود. به عنوان مثال در توزیع نرمال چند متغیره با ضرایب همبستگی منفی ($\rho_{ij} \leq 0$) مسلماً وابستگی مثبت بین متغیرهای تصادفی برقرار نمی باشد. علاوه بر این، کمیت های تصادفی متعددی در آمار احتمال وجود دارند که وابستگی منفی بین آنها برقرار می باشد، نمونه های متنوعی را می توان در مراجع ([۴] و [۵] و [۶]) پیدا نمود. در نتیجه با توجه به اهمیت این خصوصیت متغیرهای تصادفی در ادامه مقاله [۸]، این

^۱ محمد امینی دهک، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

^۲ Negative quadratic dependent

^۳ Positive quadratic dependent

بنابراین (۵) ≠ (۶). همچنین اگر تابع احتمال X_3, X_2, X_1 بصورت زیر باشد

$$p(1, 0, 0) = p(0, 1, 0) = p(0, 0, 1) = p(1, 1, 1) = \frac{1}{4}$$

آنگاه نامساوی (۵) برقرار است اما نامساوی (۶) برقرار نیست بنابراین (۵) ≠ (۶).

تعریف ۱-۴

پیشامدهای تصادفی $A_n, \dots, A_2, A_1$ به طور منفی وابسته اند اگر توابع نشانگر آنها وابسته منفی باشند.

مثال زیر نشان می دهد که دویبدو وابسته منفی بودن متغیرهای تصادفی، همواره وابستگی منفی را نتیجه نمی دهد.

مثال ۱.۲ فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 8\}$ با $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $p[\{i\}] = \frac{1}{8}, i = 1, 2, \dots, 8$ و $A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $A_3 = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ و $X_i = I_{A_i}, i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} P[X_i \leq 0, X_j \leq 0] &= \frac{1}{8} \\ &\leq P[X_i \leq 0].P[X_j \leq 0] \\ &= \frac{9}{64} \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

بنابراین، X_3, X_2, X_1 دویبدو به طور منفی وابسته اند، ولی برای وابستگی منفی داریم:

$$\begin{aligned} P[X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0] &= \frac{2}{8} \\ &> \prod_{i=1}^3 P[X_i > 0] \\ &= \left(\frac{5}{8}\right)^3 \end{aligned}$$

مثال فوق، همچنین نشان می دهد که پیشامدهای A_3, A_2, A_1 به طور منفی وابسته نیستند ولی دویبدو به طور منفی وابسته اند. مثال بعد نشان می دهد که X_3, X_2, X_1 به طور منفی وابسته هستند ولی X_3 و $Y = X_1 + X_2$ به طور منفی وابسته نیستند.

ترتیب با نامساویهای (۳) و (۴) معادلند

$$P[X > x, Y > y] \leq P[X > x].P[Y > y] \quad (3)$$

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x].P[Y > y] \quad (4)$$

تعریف ۱-۲

دو پیشامد A و B به طور منفی وابسته اند اگر توابع نشانگر آنها NQD باشند.

تعریف ۱-۳

الف) متغیرهای تصادفی $X_n, \dots, X_2, X_1$ به طور منفی وابسته اند، اگر برای تمام اعداد حقیقی $x_n, \dots, x_2, x_1$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)\right] \leq \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \quad (5)$$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i > x_i)\right] \leq \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i) \quad (6)$$

ب) متغیرهای تصادفی $X_n, \dots, X_2, X_1$ دویبدو به طور منفی وابسته اند، اگر برای هر $X_i, X_j (i \neq j)$ NQD باشند. نامساویهای (۵) و (۶) برای $n = 2$ معادلند، ولی مثال زیر نشان می دهد که برای $(n \geq 3)$ همواره معادل نیستند.

ج) یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ به طور منفی وابسته است اگر هر زیرمجموعه متناهی از آن وابسته منفی باشد.

مثال ۱.۱ (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱): فرض کنید متغیرهای تصادفی X_3, X_2, X_1 دارای توزیع توأم زیر باشند

$$p(0, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(1, 1, 0) = p(0, 0, 0) = \frac{1}{4}$$

داریم

$$P[X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0] = 0 < \prod_{i=1}^3 P[X_i > 0] = \frac{1}{8}$$

و

$$P[X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0] = \frac{1}{4} > \prod_{i=1}^3 P[X_i \leq 0] = \frac{1}{8}$$

مثال ۱.۳ فرض کنید X_1, X_2, X_3 دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$p(0, 0, 0) = p(1, 0, 1) = 0$$

$$p(0, 0, 1) = p(0, 1, 0) = 0/2$$

$$p(0, 1, 1) = p(1, 1, 0) = p(1, 1, 1) = 0/1$$

$$p(1, 0, 0) = 0/3$$

الف) X_1, X_2, X_3 به طور منفی وابسته‌اند. (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱).

ب) $Y = X_1 + X_2 + X_3$ به طور منفی وابسته نیستند زیرا برای $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 1$ داریم

$$P[Y \leq y, X_3 \leq x] = \frac{5}{10} > P[Y \leq y].P[X_3 \leq x] = \frac{48}{100}$$

۲ نتایج اصلی

در این بخش، قضایا و نتایج متنوعی که بیان‌کننده خواص متغیرهای تصادفی وابسته منفی و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی می‌باشد و همچنین مثالهای گوناگونی از متغیرهای تصادفی با توزیهای خاص چند متغیره که بطور منفی وابسته‌اند را ارایه می‌نماییم.

قضیه ۱.۱ ([۲]) فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته باشند آنگاه

$$E(\prod_{i=1}^n X_i) \leq \prod_{i=1}^n E(X_i) \quad \text{الف}$$

ب) برای توابع یکنوازی صعودی (نزولی) $f_1, f_2, \dots, f_n$ متغیرهای تصادفی $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ نیز به طور منفی وابسته‌اند.

ج) برای مقادیر حقیقی نامنفی $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$E(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}) \leq \prod_{i=1}^n E(e^{t_i X_i})$$

قضیه ۱.۲ دو پیشامد تصادفی A, B وابسته منفی هستند و اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) \leq P(A).P(B) \quad (۷)$$

اثبات:

شرط لازم. هرگاه $Y = I_B, X = I_A$ آنگاه بنا به تعریف (۲) $NQD Y, X$ هستند. در نتیجه برای مقادیر حقیقی y, x که $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ داریم

$$P(A \cap B) = P[X = 1, Y = 1] = P[X > x, Y > y] \\ \leq P[X > x].P[Y > y] = P(A)P(B)$$

شرط کافی. فرض کنید نامساوی (۷) برقرار باشد و $0 \leq x, y \leq 1$ داریم:

$$P(X > x, Y > y) = P[X = 1, Y = 1] = P(A \cap B) \\ \leq P(A)P(B) = P(X = 1)P(Y = 1) \\ = P[X > x, Y > y]$$

بنابراین برای تمام اعداد حقیقی y, x نامساوی (۳) برقرار است. پس $NQD Y, X$ هستند و در نتیجه حکم ثابت است.

نتیجه. اگر دو پیشامد تصادفی A و B وابسته منفی باشند آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که الف) A^c, B^c به طور منفی وابسته‌اند. ب) A^c, B به طور مثبت وابسته‌اند. ج) A, B^c به طور مثبت وابسته‌اند.

قضیه ۱.۳ فرض کنید f, f_1, f_2 به ترتیب توابع چگالی توأم و چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی Y, X باشند و

$$f(x, y) \leq f_1(x)f_2(y) \quad \forall x, y \in R \quad (۸)$$

آنگاه

الف) $NQD Y, X$ هستند.

ب) اگر Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی باشند آنگاه

$$E[X | Y = y] \leq E(X) \quad w.p. 1$$

و

$$E[Y | X = x] \leq E(Y) \quad w.p. 1$$

$$F_{x+y} \leq F_1 * F_2 \quad \text{ج}$$

اثبات:

فرض کنید Y, X مطلقاً پیوسته باشند، برای تمام اعداد حقیقی

y, x داریم

(الف)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(t, s) dt ds \\ &\leq \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_1(t) f_2(s) dt ds \\ &= F_1(x) F_2(y) \end{aligned}$$

بنابراین $NQD Y, X$ هستند.

(ب)

$$\begin{aligned} E[Y | X = x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y | x) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy \\ &= E[Y] \quad w.p. 1 \end{aligned}$$

و متشابهاً داریم:

$$E[X | Y = y] \leq E(X) \quad w.p. 1$$

(ج)

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \int \int_{[x+y \leq t]} f(x, y) dx dy \\ &\leq \int \int_{[x+y \leq t]} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-y} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-y) f_2(y) dy \\ &= F_1 * F_2 \end{aligned}$$

می‌دانیم که اگر متغیرهای تصادفی Y, X مستقل از هم باشند، آنگاه متغیرهای تصادفی $g(Y), h(X)$ نیز برای هر دو تابع حقیقی g, h مستقل از هم هستند. این خاصیت در مورد متغیرهای تصادفی وابسته منفی همواره برقرار نیست.

مثال زیر ضمن نشان دادن این موضوع، همچنین نشان می‌دهد، که عکس قسمت (الف) قضیه ۱.۳ نیز همواره برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱.۴ فرض کنید Y, X دارای تابع احتمال توأم زیر باشند.

$$\begin{aligned} p(-1, -1) &= p(1, 0) = 0 \\ p(0, 0) &= p(0, -1) = p(-1, 0) = p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{9} \\ p(1, -1) &= p(-1, 1) = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(الف) می‌توان به سادگی نشان داد که زوج تصادفی $NQD (X, Y)$ هست ولی هیچکدام از زوجهای $NQD (X^2, Y), (X, Y^2), (X^2, Y^2), (|X|, |Y|)$ نیستند.

(ب) $p(-1, 1) = \frac{2}{9} > p_1(-1)p_2(1) = \frac{1}{9}$ بنابراین شرط (۸) برقرار نیست.

تبصره. مثال فوق همچنین نشان می‌دهد اگر $NQD Y, X$ باشند آنگاه قسمت (ب) قضیه ۱.۳ همواره برقرار نیست زیرا

$$E[X | Y = -1] = \frac{2}{9} > E(X) = 0$$

و

$$E[Y | X = -1] = \frac{2}{9} > E(Y) = \frac{1}{9}$$

بنابراین (۸) یک شرط لازم برای قسمت (ب) قضیه است.

لم. فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با $E[\frac{1}{Y}] < \infty, P[Y > 0] = 1$ آنگاه

$$E[\frac{1}{Y}] \geq \frac{1}{E(Y)}$$

قضیه ۱.۴ فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با

$$E(|X|) < \infty, E[\frac{1}{Y}] < \infty, P[Y > 0] = 1$$

(الف) اگر $NQD X, Y$ باشند آنگاه

$$PQD \frac{1}{Y}, X - 1 \text{ هستند.}$$

$$E[X] \geq 0 \text{ اگر } E[\frac{X}{Y}] \geq \frac{E(X)}{E(Y)} - 2$$

(ب) اگر $PQD X, Y$ باشند آنگاه

$$NQD \frac{1}{Y}, X - 1 \text{ هستند.}$$

$$E[X] \leq 0 \text{ اگر } E[\frac{X}{Y}] \leq \frac{E(X)}{E(Y)} - 2$$

اثبات:

(الف) برای هر دو عدد حقیقی $y > 0, x$ داریم

$$1) \quad P[X \leq x, \frac{1}{Y} \leq y] = P[X \leq x] - P[X \leq x, Y < \frac{1}{y}]$$

می توان پیدا نمود.

مثال ۱.۵ الف) فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n x_i! (N - \sum_{i=1}^n x_i)!} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - \sum_{i=1}^n p_i)^{N - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq N, p_i \geq 0, 0 < \sum_{i=1}^n p_i < 1$$

آنگاه $X_1, X_2, \dots, X_n$ به طور منفی وابسته اند.

ب) فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک بردار تصادفی نرمال متقارن با $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho < 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq n$ آنگاه

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1} \quad (۱)$$

(۲) $X_1, X_2, \dots, X_n$ به طور منفی وابسته اند.

ج) (توزیع توأم رتبه ها): فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه باشد و R_i رتبه X_i رتبه $i = 1, \dots, n$ آنگاه $R_1, R_2, \dots, R_n$ به طور منفی وابسته اند.

د) (فوق هندسی چند متغیره): فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{M_i}{x_i} \binom{M - \sum_{i=1}^n M_i}{N - \sum_{i=1}^n x_i}}{\binom{M}{n}}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq N, \sum_{i=1}^n M_i \leq M$$

آنگاه $X_1, X_2, \dots, X_n$ به طور منفی وابسته اند.

ذ) (توزیع دیرلکت): فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای چگالی توأم زیر باشند،

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \theta_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\theta_i)} (1 - \sum_{i=1}^n x_i)^{\theta_0 - 1} \prod_{i=1}^n x_i^{\theta_i - 1}$$

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, \theta_i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\geq P[X \leq x] - P[X \leq x].P[Y < \frac{1}{y}]$$

$$= P[X \leq x].P[\frac{1}{Y} \leq y]$$

$$۲) \text{COV}(X, \frac{1}{Y}) = E(\frac{X}{Y}) - E(X).E(\frac{1}{Y}) \geq 0$$

بنابراین ۰ اگر $E(X) \geq \frac{E(X)}{E(Y)}$ آنگاه

ب) متشابهاً قسمت «ب» نیز اثبات می شود.

قضیه ۱.۵ پیشامدهای تصادفی $A_1, A_2, \dots, A_n$ به طور منفی وابسته اند اگر برای هر $2 \leq m \leq n$ و هر جایگشت $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ از اعداد طبیعی $(1, 2, \dots, n)$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}) \leq \prod_{j=1}^m P(A_{i_j}) \quad (۹)$$

$$P(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}^c) \leq \prod_{j=1}^m P(A_{i_j}^c)$$

اثبات:

شرط لازم. تعریف می کنیم، $X_i = I_{A_i}, i = 1, 2, \dots, n$ بنا به تعریف (۱.۴) متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ و در نتیجه $X_1, X_2, \dots, X_n$ برای هر $2 \leq m \leq n$ به طور منفی وابسته اند، بنابراین برای هر $0 \leq x_i \leq 1$ داریم:

$$P[\bigcap_{j=1}^m A_j] = P[\bigcap_{j=1}^m (X_j > x_j)]$$

$$\leq \prod_{j=1}^m P[X_j > x_j] = \prod_{j=1}^m P(A_j)$$

$$P[\bigcap_{j=1}^m A_j^c] = P[\bigcap_{j=1}^m (X_j \leq x_j)]$$

$$\leq \prod_{j=1}^m P[X_j \leq x_j] = \prod_{j=1}^m P(A_j^c)$$

شرط کافی. اگر نامساویهای (۹) برای هر $2 \leq m \leq n$ برقرار باشند آنگاه به سادگی می توان نشان داد که $I_{A_1}, I_{A_2}, \dots, I_{A_n}$ به طور منفی وابسته اند، در نتیجه حکم ثابت است.

مثالهای زیر که نمونه هایی از متغیرهای تصادفی وابسته منفی با توزیع چند متغیره خاص هستند را، در مراجع [۴] الی [۶]

الف) $X_n, \dots, X_r, X_1$ به طور نامنفی وابسته اند.

ب) هرگاه $X_n, \dots, X_r, X_1$ نامنفی باشد آنگاه برای هر $j \neq i$

آنگاه $X_n, \dots, X_r, X_1$ به طور منفی وابسته اند.

قضیه ۱.۶ ([۲]) فرض کنید $f_n, \dots, f_r, f_1, f$ به ترتیب

توابع چگالی توأم و حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی

$X_n, \dots, X_r, X_1$ باشند و برای تمام مقادیر حقیقی

$x_n, \dots, x_r, x_1$

$$E[X_i | X_j = x_j] \leq E(X_i)$$

$$f(x_1, x_r, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

-
- [1] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). The almost sure convergence of weighted sums of uniformly bounded random variables. *Journal of sciences Islamic Republic of Iran* P:112-115.
 - [2] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). Some cintributions to lilmit Theorems for ND random variable. Ph.D of Thesis.
 - [3] Bozorgnia, A. Patherson, R. F. and Taylor, R. l. (1996). Limit theorems for dependent random variables. *World Congress Nonlinear Analysis'92*. P. 1639-1650.
 - [4] Block, H. W, Savits, T. H. and Shaked, M. (1982). Some concepts of negative dependence. *Ann. Probab* Vol. 10, No. 3, P. 765-772.
 - [5] Ebrahimi, N. and Ghosh, M. (1981). Multivariate negative dependence. *comm.statist*, A10(4). 307-337.
 - [6] Joag-Dev, K. and Proschan, F.(1983). Negative association of random variable's with applications. *The Annals of statistics*. Vol. 11, No. 1. P. 286-295.
 - [7] Lemann, E. L.(1966). some Conepts of dependence. *Ann.math.statist*. 43, P. 1137-1153.

[۸] امینی و بزرگنیا (۱۳۷۵)، انواع پیوندهای منفی و روابط بین آنها، اندیشه آماری، سال اول، شماره اول، صفحه ۲۴-۲۷.