کارآیی بین میانگین و میانه در نمونه‌های بزرگ از چند توزیع پیوسته مهم

علیرضا سلیمانی خیری [۱]

چکیده

هدف از این نوشتار، پرداختن به کارآیی مجانبی میانگین حسابی و میانه دو معیار مرکزی نمونه‌ای، با توجه به ساختار تابع چگالی مورد نظر و بررسی برتری هر کدام نسبت به دیگری و سرانجام استنباط یک نتیجه کلی می‌باشد.

۱ مقدمه

نخست به بیان چند تعریف می‌پردازیم:

تعریف ۱—۱: $\bar{X}_n$ را میانگین حسابی نمونه $X_1, \ldots, X_n$ می‌خوانیم هرگاه:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

تعریف ۱—۲: نماد $\tilde{X}_n$ را میانه نمونه‌ای بر اساس نمونه $X_1, \ldots, X_n$، و $\tilde{\mu}$ را میانه جامعه می‌نامیم.

تعریف ۱—۳: ϕ_n را یک برآوردگر نااریب از θ می‌خوانیم چنانچه برای تمام مقادیر θ:

$$E_\theta(\phi_n) = \theta$$

تعریف ۱—۴: ϕ_n برآوردگری سازگار (به طور ضعیف) برای θ است هرگاه برای $\epsilon > 0$،

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|\phi_n - \theta| > \epsilon) = 0$$

در این صورت می‌گوییم $\phi_n \overset{pr}{\to} \theta$ (گرایش احتمالی).

تعریف ۱—۵: ξ_p را چندک مرتبه pام [۲] توزیع متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F_X(.)$ خوانیم هرگاه:

$$F_X(\xi_p) \le p, \qquad F_X(\xi_p) + Pr(X = \xi_p) \ge p$$

تعریف ۱—۶: برآوردگری نااریب را کارا خوانیم هرگاه دارای مینیم واریانس ممکن باشد. کارایی یک برآوردگر نااریب، نسبت مینیم واریانس ممکن به واریانس برآوردگر است.

تعریف ۱—۷: [۳] اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، گوییم

---

[۱] علیرضا سلیمانی خیری، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت معلم سبزوار

[۲] $p \in (0, 1)$

[۳] از تعریف ۱—۷ نتیجه می‌شود که X حول α نسبت به Y متمرکزتر است هرگاه $var_\alpha(X) \le var_\alpha(Y)$

متغیر تصادفی X حول مثلاً α نسبت به Y متمرکزتر (more concentrated) یا به طور اختصار m.co. می‌باشد، هرگاه برای هر $t > ۰$:

$$Pr(|X-\alpha| \le t) \ge Pr(|Y-\alpha|) \le t)$$

تعریف ۱–۸: اگر برای برآوردگر ϕ_n از θ، $\sqrt{n}(\phi_n - \theta)$ به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس متناهی (تابعی نامنفی از θ) باشد، آنگاه ϕ_n یک برآوردگر سازگار به طور مجانبی نرمال (به‌طور اختصارCAN) برای θ نامیده می‌شود.

۲ روابط

حال به بیان دو قضیه که در ادامه بحث مورد استفاده قرارمی‌گیرند، می‌پردازیم.

قضیه ۲–۱: فرض کنیم $X_۱, \ldots, X_n$، n متغیر تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع $F_X(.)$ و چگالی پیوسته $f_X(.)$ باشند که در ξ_p تعریف شده‌اند، آنگاه:

$$\sqrt{n}(\hat{\xi}_p - \xi p) \xrightarrow{L} N(۰, \frac{p(۱-p)}{[f(\xi_p)]^۲})$$

اثبات: داریم

$$\begin{aligned} Pr(\hat{\xi}_p \le x) &= Pr(\text{حداقل } np \text{ مشاهده} \le x) \\ &= \sum_{r=np}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}[F(x)]^r[۱-F(x)]^{n-r} \end{aligned}$$

حال اگر np صحیح باشد $m = np$، در غیر اینصورت $m = [np] + ۱$. بنابراین [۴]

$$Pr(\hat{\xi}_p \le x) = \frac{n!}{(m-۱)!(n-m)!}\int_۰^{F(x)} t^{m-۱}(۱-t)^{n-m}\,dt$$

در نتیجه با مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$g_{\hat{\xi}_p}(x) = \frac{n!}{(m-۱)!(n-m)!}[F(x)]^{m-۱}[۱-F(x)]^{n-m}f(x)$$

حال توزیع $Y = F(\hat{\xi}_p)$ را می‌یابیم که به قرار زیر خواهد بود:

$$g_Y(y) = \frac{n!}{(m-۱)!(n-m)!}y^{m-۱}(۱-y)^{n-m}; \quad ۰ < y < ۱$$

با تعریف $Z = \frac{\sqrt{n}(Y-p)}{\sqrt{p(۱-p)}}$، خواهیم داشت:[۵]

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{۱}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n!}{(m-۱)!(n-m)!} \\ &\times p^{m-\frac{۱}{۲}}q^{n+m-\frac{۱}{۲}} \\ &\times [۱+z\sqrt{\frac{q}{np}}]^{m-۱}[۱-z\sqrt{\frac{p}{nq}}]^{n-m} \end{aligned}$$

با میل دادن $n \to \infty$، خواهیم داشت: $-\infty < z < \infty$. با توجه به این و ساختار متغیر تصادفی Z، نشان می‌دهیم که دارای توزیع حدی نرمال است. برای سادگی از طرفین $f_Z(z)$ نسبت به z لگاریتم می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \log f_Z(z) &= \log(\frac{۱}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n!}{(m-۱)!(n-m)!}p^{m-\frac{۱}{۲}}q^{n+m-\frac{۱}{۲}}) \\ &+ (m-۱)\log[۱+z\sqrt{\frac{q}{np}}] \\ &+ (n-m)\log[۱-z\sqrt{\frac{p}{nq}}] \end{aligned}$$

با میل دادن $n \to \infty$، جمله اول که مستقل از Z است به مقدار ثابت مثلاً C میل می‌نماید. اما با استفاده از بسط مک‌لورن $\log(۱+x)$ و $\log(۱-x)$ و توجه به اینکه $m = nq$ یا $m = [np] + ۱$ داریم:

$$(m-۱)\log[۱+z\sqrt{\frac{q}{np}}] + (n-m)\log[۱-z\sqrt{\frac{p}{nq}}] \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{z^۲}{۲}$$

بنابراین:

$$\log f_Z(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} c(-\frac{z^۲}{۲})$$

در نتیجه:

$$f_Z(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} de^{-\frac{z^۲}{۲}}; \qquad (d \text{ ثابت})$$

[۴] با انتگرال گیری جزء به جزء مکرر از انتگرال بتای ناقص، تساوی محرز می‌گردد.

[۵] $q = ۱ - p$

یعنی توزیع حدی Z، $N(۰,۱)$است.
پس $\sqrt{n}(Y-p) \xrightarrow{L} N(۰,pq)$. اما $Y=F(\hat{\xi}_p)$ و $p=F(\xi_p)$،
بنابراین: $\sqrt{n}(F(\hat{\xi}_p)-F(\xi_p)) \xrightarrow{L} N(۰,pq)$

از طرفی با توجه به بسط تیلور $F(.)$ حول ξ_p داریم:

$$F(\hat{\xi}_p)-F(\xi_p)=f(\xi_p)(\hat{\xi}_p-\xi_p)+\epsilon_n$$

با توجه به اینکه وقتی $\hat{\xi}_p \xrightarrow{P_r} \xi_p$، $\epsilon_n \xrightarrow{P_r} ۰$. [۶] پس:

$$\sqrt{n}f(\xi_p)(\hat{\xi}_p-\xi_p) \xrightarrow{L} N(۰,pq)$$

و سرانجام:

$$\sqrt{n}(\hat{\xi}_p-\xi_p) \xrightarrow{L} N(۰,\frac{pq}{[f(\xi_p)]^۲})$$

قضیه ۲–۲: اگر $X_۱,\ldots,X_n$، n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع $F_X(x;\theta)$، $\theta \in \Theta$، باشند آنگاه با فرض موجود بودن $E_\theta(X)$،

۱) $\bar{X}_n$ برآوردگری نااریب و سازگار برای $E_\theta(X)$ است.

۲) $\tilde{X}_n$ برآوردگری سازگار برای $\tilde{\mu}$ بوده که در حالت کلی نااریب نمی‌باشد، مگر توزیع حول $\tilde{\mu}$ متقارن باشد.

برای اثبات می‌توانید به منبع شماره [۱] مراجعه نمایید.

۳ کارایی

حال به بررسی کارایی مجانبی بین $\tilde{X}_n$ و $\bar{X}_n$ در توزیعهای پیوسته خاص می‌پردازیم. به عنوان محور اصلی بحث، توزیع نرمال را نخست بررسی نموده و از طریق گرایش برخی توزیعها، حتی نامتقارن پیوسته را به توزیع نرمال تحت شرایط خاص نشان می‌دهیم.

۳–۱ توزیع نرمال

اگر $X_۱,\ldots,X_n$، نمونه‌ای تصادفی از $N(\mu,\sigma^۲)$ ($\sigma^۲$ معلوم) باشند، می‌دانیم که $\mu=\tilde{\mu}$ (بدلیل متقارن بودن). با توجه به قضیه (۲–۲) و با توجه به تقارن حول $\tilde{\mu}=\mu$، $\bar{X}_n$ و $\tilde{X}_n$ هر دو برآوردگرهای نااریب و سازگار μاند. بعلاوه:

$$\bar{X}_n \sim N(\mu,\frac{\sigma^۲}{n})$$

و با توجه به قضیه (۲–۱):

$$\tilde{X}_n \xrightarrow{L} N(\mu,\frac{\pi\sigma^۲}{۲n})$$

که برای nهای بزرگ مشاهده می‌شود، $\tilde{X}_n$ همچنان m.co. حول μ نسبت به $\bar{X}_n$ است. همچنین:

$$e(\tilde{X}_n,\bar{X}_n)=\frac{var(\bar{X}_n)}{var(\tilde{X}_n)} \simeq \frac{۲}{\pi} < ۱$$

از آنجا که $\frac{۲}{\pi}=۰/۶۴$. پس می‌توان گفت $\bar{X}_n$ در نمونه‌های بزرگ μ را با ۶۴٪ مشاهدات برآورد می‌نماید. چه موقع μ را توسط $\tilde{X}_n$ برآورد می‌نماییم؟

با توجه به اینکه میانگین حسابی تحت تأثیر مشاهدات بوده، ولی میانه حساسیت کمتری به مشاهدات در قیاس با میانگین داشته و تنها به یک یا دو داده وسطی (بعد از مرتب شدن به ترتیب افزایش داده‌ها) سروکار دارد، پس برای نمونه‌های بزرگ همانطور که مشاهده نمودیم $\tilde{X}_n$ قابلیت اعتماد بیشتری نسبت به $\bar{X}_n$ جهت برآورد μ دارد.

گاهی اوقات، استفاده از $\tilde{X}_n$ می‌تواند به این علت باشد که بخواهیم ترجیحاً $\xi_{۰/۵}$ و نه EX را برآورد نماییم، زیرا در حالت کلی $EX \neq \xi_{۰/۵}$. بنابراین $\tilde{X}_n$ یک برآوردگر مناسب خواهد بود. تحت شرایط کلی، $\tilde{X}_n$ یک برآوردگر سازگار و CAN از $\xi_{۰/۵}$ است.

۳–۲ توزیع کشی

فرض نماییم $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی زیر باشند.

$$f_X(x;\theta)=\frac{۱}{\pi[۱+(x-\theta)^۲]}; \qquad x \in R, \theta > ۰$$

[۶] برای جزئیات بیشتر در مورد اثبات به صفحات ۳۸۶–۳۸۵، منبع [۴] مراجعه نمایید.

در این حالت EX وجود ندارد، پس $\bar{X}_n$ نمی‌تواند برآوردگری مناسب برای θ باشد. از این رو $\tilde{X}_n$ جانشینی مناسب برای θ خواهد بود، زیرا $\xi_{0/5} = \theta$، یعنی θ میانه و $\tilde{X}_n$، CAN برای θ می‌باشد. در مقایسه توزیع کشی با توزیع نرمال، هر چند هر دو دارای توزیع زنگوله‌ای شکل هستند، اما نرخ همگرایی به صفر در دو چگالی متفاوت است. به عبارت دیگر رفتار دمهای دو توزیع متفاوت است. از طرفی، چون در توزیع کشی تابع مشخصه میانگین نمونه $exp[-|t| + it\theta]$ برابر تابع مشخصه خود جامعه است، یعنی توابع میانگین نمونه با توزیع جامعه یکسان است، لذا مهم نیست که نمونه چقدر بزرگ باشد و این خود گواه بر عدم سازگاری $\bar{X}_n$ برای θ است.

۳–۳ توزیع استودنت t

در این توزیع اگر $\nu \to +\infty$، آنگاه توزیع استودنت t به توزیع نرمال میل می‌نماید. بر اساس یک نمونه تصادفی nتایی از این توزیع داریم:

$$var(\bar{X}_n) = \frac{\nu}{n(\nu - 2)}; \qquad \nu > 2$$

$$var(\tilde{X}_n) = \frac{\pi\nu[\Gamma(\frac{\nu}{2})]^2}{4n[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^2}$$

در نتیجه:

ν	3	4	5	8	10	∞
$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n)$	1/62	1/12	0/96	0/8	0/76	0/64

۴–۳ توزیع لجستیک (Logistic Distribution)

فرض کنیم $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشند (β معلوم).

$$f_X(x;\theta) = \frac{exp(\frac{x-\theta}{\beta})}{\beta[1 + exp(\frac{x-\theta}{\beta})]^2}; x \in R, \beta > 0, \theta \in R$$

داریم:

$$\mu = \tilde{\mu} = \xi_{0/5} = \theta$$

$$var(\bar{X}_n) = \frac{\beta^2\pi^2}{3n} \quad , \quad var(\tilde{X}_n) \approx \frac{4\beta^2}{n}$$

بنابراین:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx \frac{\pi^2}{12} = 0/82$$

که بیانگر ناارایبی و سازگاری و .m.co $\bar{X}_n$ برای θ می‌باشد.

۵–۳ توزیع نمایی مکرر(لاپلاس)

فرض کنیم $X_1, \ldots, X_n$، نمونه‌ای تصادفی از توزیع زیر باشند (β معلوم).

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\beta}exp\{-\frac{|x-\theta|}{\beta}\}; x \in R, \theta \in R, \beta > 0$$

داریم:

$$\mu = E\bar{X}_n = \theta \qquad , var(\bar{X}_n) = \frac{2\beta^2}{n}$$

$$\xi_{0/5} = \tilde{\mu} = \theta \qquad , var(\tilde{X}_n) \approx \frac{\beta^2}{n}$$

بنابراین:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx 2 > 1$$

یعنی $\bar{X}_n$ برآوردگری ناارایب، سازگار و .m.co برای θ[۷] می‌باشد و بیانگر دنباله طولانی (دم طولانی) در توزیع مورد نظر می‌باشد.

بنابراین، در توزیعهای متقارن تک نمایی، عموماً می‌توان چنین استنباط نمود که هر چه دنباله توزیع طولانی‌تر باشد کارآیی میانه بالاتر از میانگین و هرچه کمتر باشد، کارآیی میانگین بالاتر از میانه خواهد شد. همانگونه که مشاهده شد در توزیعهای نرمال، کشی، استونت t، لجستیک و نمایی مکرر این موضوع کاملاً مشهود بود.

با توجه به قضیه (۲–۱) داریم:

$$var(\hat{\xi}_{0/5}) = var(\tilde{X}_n) \approx \frac{1}{4[f(\tilde{\mu})]^2}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

[۷] می‌دانیم که MLEی θ نیز میانه داده‌های نمونه‌ای می‌باشد.

بنابراین:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx ۴\sigma^۲[f(\tilde{\mu})]^۲$$

بنابراین دلیل دیگر برای صحت ادعای بیان شده، با توجه به رابطه $e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx ۴\sigma^۲[f(\tilde{\mu})]^۲$ روشن می‌گردد. از آنجا که $[f(\tilde{\mu})]^۲$ اصولاً ثابت می‌باشد، لذا هر چه $\sigma^۲$ کمتر باشد، دنباله‌ها (دمها)ی توزیع کوتاهتر و هر چه $\sigma^۲$ بیشتر باشد، دنباله‌های توزیع طولانی‌تر و در نتیجه کارآیی میانه بالاتر خواهد بود. همچنین با توجه به اینکه میانگین حسابی به شدت تحت تأثیر داده‌ها قرار دارد، لذا هرچه پراکندگی در داده‌ها بیشتر باشد، نوسانات میانگین شدیدتر خواهد شد، حال آنکه در میانه زیاد محسوس نمی‌باشد. از اینرو در چنین وضعیتهایی میانه بر میانگین ترجیح داده می‌شود. دو توزیع زیر، گواه بیشتری بر این مدعا هستند.

۳—۶ توزیع نرمال بریده شده

فرض کنیم $X_۱, \ldots, X_n$، نمونه‌ای تصادفی از توزیع زیر باشند $(\alpha > ۰)$.

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{۲\Phi(a)-۱} & ; \ |x| \le a \\ ۰ & ; \ \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که در آن $\Phi(.)$ تابع توزیع نرمال استاندارد و

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} exp(-\frac{x^۲}{۲}) \qquad ; x \in R$$

$f_a(x)$ یک توزیع متقارن تک نمایی حول $x = ۰$ است. داریم:

$$\mu = \tilde{\mu} = ۰$$
$$Var(X) = ۱ - \frac{۲a}{\sqrt{۲\pi}(۲\phi(a) - ۱)} exp(-\frac{a^۲}{۲})$$

بنابراین:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx \frac{۲}{\pi(۲\Phi(a) - ۱)^۲} - \frac{۴a \ exp(-\frac{a^۲}{۲})}{(۲\Phi(a) - ۱)^۳\pi\sqrt{۲\pi}}$$

در نتیجه:

a	۱	۲	۳	∞
$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n)$	۰/۳۹۷	۰/۵۵	۰/۶۳	۰/۶۴

۳—۷ توزیع کشی بریده شده

فرض کنیم $X_۱, \ldots, X_n$، نمونه‌ای تصادفی از چگالی زیر باشند $(d > ۰)$.

$$f_d(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\tan^{-۱}(d) - \tan^{-۱}(-d)} f(x) & ; |x| \le d \\ ۰ & ; \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که در آن

$$f(x) = \frac{۱}{\pi(۱ + x^۲)} \qquad ; x \in R$$

داریم:

$$E_d X = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mu = \tilde{\mu} = ۰$$
$$var(x) = \frac{۲d}{\tan^{-۱}(d) - \tan^{-۱}(-d)} - ۱$$

و

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \simeq \frac{۴[۲d - \tan^{-۱}(d) + \tan^{-۱}(-d)]}{[\tan^{-۱}(d) - \tan^{-۱}(-d)]^۳}$$

بنابراین:

d	۱	۳	۴	۵	$+\infty$
$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n)$	۰/۴۴	۰/۸۹۶	۱/۱۳	۱/۴۱	$+\infty$

قضیه ۳—۱: برای چگالیهای متقارن تک نمایی یا بطور کلی‌تر چگالیهای متقارن حول صفر که برای هر x در برد متغیر تصادفی X، $f(x) \le f(۰)$ باشد، داریم:[۳]

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \ge \frac{۱}{۳}$$

تساوی زمانی برقرار می‌باشد که توزیع مورد نظر ما یکنواخت باشد. برای روشن شدن مطلب، به بررسی توزیع یکنواخت می‌پردازیم:

۳—۸ توزیع یکنواخت

فرض کنیم $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشند.

$$f_X(x; \theta) = \frac{۱}{\theta} \qquad ; ۰ \le x \le \theta$$

داریم:

$$\mu = \tilde{\mu} = \frac{\theta}{۲}$$

$$var(\bar{X}_n) = \frac{\theta^۲}{۱۲n}, var(\tilde{X}_n) \simeq \frac{\theta^۲}{۴n}$$

و در نتیجه:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \simeq \frac{۱}{۳} < ۱$$

تبصره: اگر واریانس دقیق $\tilde{X}_n$ را نیز بدست بیاوریم، باز هم کارآیی $\frac{۱}{۴}$ می‌گردد.

۳–۹ توزیع خی‌دو

فرض کنیم $X_۱, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از چگالی نامتقارن زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{۱}{\Gamma(\frac{\nu}{۲})۲^{\frac{\nu}{۲}}} x^{\frac{\nu}{۲}-۱} e^{-\frac{x}{۲}}; \qquad x \geq ۰$$

داریم:

$$\mu = \nu \quad , \quad var(\bar{X}_n) = \frac{۲\nu}{n}$$

همچنین[۸]:

$$\hat{\mu} = \nu - ۲$$

از طرفی در توزیع خی‌دو داریم:

$$\nu - ۲ \leq \tilde{\mu} \leq \nu$$

اگر فرضاً قرار دهیم $\tilde{\mu} = \nu - ۱$، خواهیم داشت:

$$var(\tilde{X}_n) \approx \frac{۱}{۴n[f(\nu - ۱)]^۲}$$

در نتیجه با توجه به:

$$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n) \approx ۸\nu[f(\nu - ۱)]^۲$$

داریم:

ν	۲	۳	۴	۵	۶	۱۰	۲۰
$e(\tilde{X}_n, \bar{X}_n)$	۱/۴۷	۱/۰۳	۰/۸۳۰/۸۹۶	۰/۷۸	۰/۷۲	۰/۶۹	

که بیانگر همان حقیقت گرایش توزیع خی‌دو به توزیع نرمال در حد (وقتی $\nu \to \infty$) است. به ازاء $\nu = ۲,۳$ برتری میانه بر میانگین نشان داده شده است. تقریباً $\tilde{\mu}$ هر مقداری در بازه $[\hat{\mu}, \mu]$ اختیار نماید، رفتار کارآیی مشابه جدول فوق خواهد بود.

۵ نتیجه

به طور کلی، می‌توان چنین استنباط نمود که به خصوص در توزیعهای متقارن تک نمایی بدون مقدمه و صرفنظر از ساختار چگالی توزیع، نمی‌توان میانه یا میانگین را برآوردگری m.co. و کارا جهت مرکزیت توزیع دانست. این موضوع حتی در توزیعهای نامتقارن هم مشهود است و دقیقاً به ساختار و چگونگی چگالی بستگی دارد.

مراجع

[1] DUDEWICZ, E.J. & MISHRA (1988), Modern mathematical Statistics, John Wiley & Sons.

[2] ROHATGI, V.K.,(1976), Introduction to probability theory and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.

[3] LEHMMAN, E.L.,(1983), Theory of point estimation, John Wiley & Sons

[4] RAO, C.R. (1973), Linear Statistical Inference and Its applications, John Wiley & Sons.

[۵] برنارد و. لیندگرن، نظریه آمار، جلد اول (ترجمه دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا) سال انتشار ۱۹۷۶.

[۸] $\hat{\mu}$ نمای توزیع خی‌دو با ν درجه آزادی می‌باشد.