مروری بر توزیع بورل — تانر [۱]

علی عمیدی [۲]

چکیده

یکی از توزیعهای گسستهٔ احتمال که در نظریه صف‌بندی کاربرد فراوان دارد توزیع بورل — تانر است. متأسفانه، دایرةالمعارفهای موجود آمار، نظیر [۱]، توضیحات کافی دربارهٔ ویژگیهای این توزیع در اختیار مراجعان نمی‌گذارد. هدف این مرور، دادن شناختی بیشتر دربارهٔ ویژگیهای این توزیع به محققانی است که در پژوهشهای خود به آن نیاز دارند.

معرفی توزیع بورل — تانر

متغیر تصادفی گسستهٔ X دارای توزیع بورل — تانر با پارامترهای r و α است اگر داشته‌باشیم

$$\begin{cases} P(X=x) = p(x;r,\alpha) = C(x,r)e^{-\alpha x}\alpha^{x-r} \\ x = r, r+1, \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و r عدد صحیح مثبتی است و تابع C به صورت زیر است

$$C(x,r) = \frac{r}{(x-c)!}x^{x-r-1}$$

توضیح اینکه بورل ابتدا برای $r = 1$ نشان داد که (۱) معرف یک توزیع احتمال است و یازده سال بعد تانر اثبات کرد برای هر r صحیح و مثبت، (۱) مبین یک توزیع احتمال است. لازم به تذکر است که پنج سال بعد کندال، همتایی پیوسته برای (۱) معرفی کرد. بدیهی است که دامنهٔ تغییرات x در این توزیع از ویژگیهای ممتاز آن است. در اکثر توزیعهای گسستهٔ متداول نظیر پواسن، دو جمله‌ای، ابر هندسی و غیره آغاز دامنهٔ تغییرات متغیر x، مقدار صفر است مگر آنکه از توزیعهای بریدهٔ آنها استفاده شود ولی در این توزیع آغاز دامنه در مجموعهٔ N مقداری دلخواه است. در نظریهٔ صف، توزیع بورل — تانر به صورت توزیع تعداد متقاضیان سرویس شده در سیستم صفی است که ورودی آن، پواسن با پارامتر α بوده، زمان سرویس

---

[۱] Borel - Tanner

[۲] علی عمیدی ،گروه آمار دانشگاه شهید بهشتی

ثابت است و طول صف در زمان شروع سرویس برابر با r است. نمودار توزیع بورل — تانر دارای دمی بسیار طولانی است.

ویژگیهای توزیع بورل — تانر

الف: میانگین و واریانس X.

اگر قرار دهیم

$$\beta = \alpha e^{-\alpha} \qquad (۲)$$

در این صورت

$$\beta^{x-r} e^{-\alpha r} = \alpha^{x-r} e^{-\alpha x} \qquad (۳)$$

از (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\alpha}{\beta(۱-\alpha)} \qquad (۴)$$

$$\frac{d^۲\alpha}{d\beta^۲} = \frac{(۲-\alpha)\alpha^۲}{(۱-\alpha)^۳\beta^۲} \qquad (۵)$$

با استفاده از برابریهای (۴) و (۵) می‌توان میانگین و واریانس X را یافت:

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} xp(x;\alpha,r) = \sum_{x=r}^{\infty} xC(x,r)\beta^x \alpha^{-r}$$

و یا

$$\alpha^r E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} xC(x,r)\beta^x \qquad (٦)$$

از طرفی می‌دانیم

$$\sum_{x=r}^{\infty} C(x,r)e^{-\alpha x}\alpha^{x-r} = \sum_{x=r}^{\infty} C(x,r)\beta^{x-r}e^{-\alpha r} = ۱$$

اگر (۳) را در آخرین برابری منظور کنیم، نتیجه می‌شود

$$\alpha^r = \sum_{x=r}^{\infty} C(x,r)\beta^x \qquad (۷)$$

با دیفرانسیل‌گیری از دو لوی این برابری داریم

$$r\alpha^{r-۱}d\alpha = \sum_{x=r}^{\infty} C(x,r)x\beta^{x-۱}d\beta$$

و یا

$$\beta r\alpha^{r-۱}\frac{d\alpha}{d\beta} = \sum_{x=r}^{\infty} xC(x,r)\beta^x \qquad (۸)$$

با استفاده از (۴) و (٦) داریم

$$\beta r\alpha^{r-۱}\frac{\alpha}{\beta(۱-\alpha)} = \alpha^r E(X)$$

و سرانجام

$$E(X) = \frac{r}{۱-\alpha} \qquad (۹)$$

مقدار واریانس X را نیز می‌توان بدین صورت بدست آورد

$$E(X^{۲}) = \sum_{r=۱}^{\infty} x^{۲} p(x;\alpha,r)$$

اگر از (۸) $\frac{d^{۲}\alpha}{d\beta^{۲}}$ را حساب کنیم و آن را برابر با (۵) بگیریم می‌توان $E(X^{۲})$ و لاجرم واریانس X را محاسبه کرد که نتیجه می‌دهد

$$V(X) = \frac{\alpha r}{(۱-\alpha)^{۳}} \qquad (۱۰)$$

ب: تابع مولد.

اگر تابع مولد احتمال X را به صورت $\phi(t) = E(t^{x})$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\phi(t) = \sum_{x=r}^{\infty} t^{x} C(x,r) e^{-\alpha x} \alpha^{x-r}$$

با توجه به رابطهٔ (۲) ، داریم:

$$\alpha^{r}\phi(t) = \sum_{x=r}^{\infty} (t\beta)^{x} C(x,r) \qquad , ۰ < t < ۱ \quad (۱۱)$$

اگر در برابری (۷) به جای β مقدار $t\beta$ را قرار دهیم، و اگر رابطهٔ تابعی بین α و β را که از (۲) بدست می‌آید با نماد $\alpha(\beta)$ نشان دهیم، از برابری (۱۱) داریم:

$$\phi(t) = \left[\frac{\alpha(t\beta)}{\alpha(\beta)}\right]^{r} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود:

$$\phi(t) = t^{r} e^{r\alpha(t\beta) - r\alpha(\beta)} \qquad (۱۳)$$

می‌دانیم که چون تابع مولد احتمال به صورت $E(t^{x})$ تعریف می‌شود، همیشه $\phi(۱) = ۱$, $\phi'(۱) = E(X)$ و $\phi''(۱) = V(X) + [E(X)]^{۲} - E(X)$ است. بدین ترتیب می‌توان از (۱۳) مجدداً با مشتقگیری مقادیر $E(X)$ و $V(X)$ را بدست آورد. برای بدست آوردن گشتاورهای مراتب بالا استفاده از (۱۳) نسبتاً پیچیده است. فرمولی که ساده‌تر است عبارت است از

$$\log\phi - \alpha r \phi^{\frac{۱}{r}} - r\log t + \alpha r = ۰ \qquad (۱۴)$$

این رابطه از (۱۲) با توجه به رابطه بین α و β بدست می‌آید. اگر $K(t)$ معرف تابع مولد انباشتکها باشد، آنگاه (۱۴) هم‌ارز با

$$K(t) = \alpha r[M(t)]^{\frac{۱}{r}} + rt - \alpha r$$

است، که در آن M تابع مولد گشتاورهاست. با مشتقگیری از این برابری می‌توان گشتاورهای مراتب بالاتر X را بدست آورد. برای مقادیر خاص α و r که معمولاً در کارهای عملی نظریهٔ صف پیش می‌آیند جداول توزیع تجمعی X را تهیه کرده‌اند.

مراجع

[1] Frank A.Haight, Meluin a.Breuer (1966), biometrika, 47, P.143.

[2] Johnson, N.L , and Kotz ,s (1969), Discrete Distributions, wiely, PP.253-255.

[3] Kotz ,s & N.L. Johnson (1982) Encyclozedia of statistical sciences , V1, P,302.