

تعویض پارامترهای توزیع فوق هندسی

غلامحسین شاهکار^۱

پروفسور دیوید سون و پروفسور جانسن^۲ از دانشگاه ویکتوریای کانادا در مقاله‌ای تحت عنوان «تعویض پارامترهای توزیع فوق هندسی» در مجله ریاضی شماره ۶۶ سال ۱۹۹۳ می‌گویند: برای امتحان درس ریاضی گسسته مسأله‌ی زیر را به دانشجویان خود دادیم:

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{n}{i} \binom{N-n}{B-i}}{\binom{N}{B}}.$$

«آوندی شامل N مهره است که از آنها B مهره سیاه و بقیه سفید هستند. از این آوند، M مهره را به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر X را تعداد مهره های سیاه در بین M مهره انتخابی فرض کنیم، احتمال پیش آمد $X = i$ چقدر است؟»

با توجه به توزیع فوق هندسی جواب عبارتست از:

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{B}{i} \binom{N-B}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad i \leq \min(n, B)$$

اما بعضی دانشجویان جای B و M را اشتباهاً عوض کرده و

این دو عبارت با توجه به بسطشان به ازاء تمام مقادیر i با هم برابرند. دیوید سون و جانسون در این مقاله نشان می‌دهند که آنچه رخ داده است اتفاقی نیست؛ بلکه مبتنی بر دلیلی احتمالاتی است. اثبات زیبای آنها چنین است: آوندی شامل N مهره را در نظر بگیرید. فرض کنید پسر بچه‌ای (مثلاً سیاوش) B مهره از آنها را به تصادف بیرون آورده، سپس هر کدام را که رنگ سیاه دارد، به آوند برمی‌گرداند. پسر بچه دیگری (مثلاً آرش) نیز M مهره را به تصادف از آوند خارج کرده، بعد از برچسب زدن آنها را به آوند برمی‌گرداند. فرض کنید X تعداد مهره های سیاهی باشد که آرش از آوند بیرون آورده است (مهره‌های سیاه برچسب خورده). چون نتیجه کار سیاوش و آرش بستگی به تقدم و تأخر کار آنها ندارد، لذا چه اول سیاوش و بعد از او آرش و یا اول آرش و بعد از او سیاوش مهره ها را دستکاری کنند، توزیع احتمال X یکسان

^۱ دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ Davidson and Johnson. 1993 "Interchanging Parameters of Hypergeometric Distributions", Mathematics Magazine, vol. 66.

مهره برچسب خورده و $N - n$ مهره برچسب نخورده است. برای این که حاصل کار او به جا ماندن i مهره سیاه برچسب خورده در کیسه باشد؛ او باید i مهره برچسب خورده و $B - i$ مهره برچسب نخورده بیرون بیاورد. بنابراین،

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{n}{i} \binom{N-n}{B-i}}{\binom{N}{B}}$$

$$i = 0, 1, \dots, \min(n, B)$$

تعویض ترتیب انجام کار این دو نفر نشان می دهد که توزیع احتمال X وقتی M و B عوض می شوند، تغییر نمی کند.

است. اگر سیاوش اول شروع کند، در این صورت آرش n مهره از آوندی شامل B مهره سیاه و $N - B$ مهره سفید بیرون می کشد. برای این که حاصل کار او به جا ماندن i مهره سیاه برچسب خورده در کیسه باشد، او باید i مهره سیاه و $M - i$ مهره سفید استخراج کند. پس،

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{B}{i} \binom{N-B}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$i = 0, 1, \dots, \min(n, B)$$

از سوی دیگر اگر آرش ابتدا مهره ها را دستکاری کند، در این صورت سیاوش B مهره از آوندی خارج می کند، که شامل n