

مدلهای چندمتغیری میانگین متحرک مرتبه q

عباس مقصودی

چکیده

در این مقاله مدلهای سری زمانی چندمتغیری میانگین متحرک معرفی شده، برخی خواص این مدلها به همراه یک حالت خاص مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مقدمه

می‌تواند خود عامل مهمی برای برآوردن یک مدل احتمالی به داده‌ها باشد.

قسمتی از روشهای آماری که به بررسی و تجزیه و تحلیل این گونه مشاهدات می‌پردازد، تجزیه و تحلیل سریهای زمانی نامیده می‌شود. این تحلیل می‌تواند با استفاده از یک متغیر یا بیش از یک متغیر صورت گیرد. اگر فقط با یک متغیر سروکار داشته باشیم، می‌توانیم ارتباط بین مشاهدات متوالی از این متغیر در طول زمان را با استفاده از تحلیل سریهای زمانی مشخص کنیم. در این صورت به این روش تحلیل سریهای زمانی یک متغیری می‌گویند.

اما اگر تعداد متغیرهای مورد بررسی بیش از یکی باشد، در این صورت هدف، پیدا کردن ارتباط همزمان بین مشاهدات متوالی هریک از متغیرها با یکدیگر و ارتباط متقابل بین متغیرها در هر لحظه از زمان است. مانند موارد زیر:

در اکثر روشها و محاسبات آماری معمولاً آمارشناسان به بررسی مشاهداتی می‌پردازند که فرض می‌شود این مشاهدات از هم مستقل هستند. در بسیاری از تکنیکها و روشهای آماری وابستگی بین مشاهدات به عنوان یک عامل مزاحم در نظر گرفته می‌شود. از این رو سعی می‌شود که با استفاده از روشهایی از جمله استفاده از اصل تصادفی کردن نمونه‌گیری، از این وابستگی احتراز شود. این در حالی است که بسیاری از داده‌ها و مشاهداتی که در طبیعت و اجتماع با آن روبرو هستیم طبیعی و وابسته دارند و به طور کاملاً مشخصی به هم مربوط هستند و نمی‌توان ارتباط این مشاهدات را نادیده گرفت. برای مثال مقدار زیادی از داده‌های مربوط به علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و تجارت به صورت سریهای زمانی رخ می‌دهند که در آنها مشاهدات به هم وابسته‌اند و نه تنها نمی‌توان در محاسبات آماری از این وابستگی صرف نظر کرد، بلکه این وابستگی

(۱) سربهای متوسط درجه حرارت ماهانه، متوسط بارندگی ماهانه، و متوسط رطوبت نسبی ماهانه

(۲) سربهای میزان مرگ و میر سالانه، و جمعیت سالانه

(۳) سربهای بیکاران فصلی و متخلفین از قانون فصلی

(۴) سربهای سرعت باد و درجه حرارت روزانه

که در آنها علاوه بر پیدا کردن ارتباط بین مشاهدات متوالی هر یک از سربها، باید ارتباط متقابل سربها نیز در نظر گرفته شوند. اصطلاحاً به این روش، تحلیل سربهای زمانی چند متغیری می‌گویند.

فرم کلی مدل یک سری زمانی چند متغیره به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi(B)Z_t = \theta(B)a_t + \mu_0$$

که در آن Z_t بردار مشاهدات و a_t بردار باقیمانده است؛ به طوری که a_t ها به طور مستقل و به صورت نرمال با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس Σ توزیع شده‌اند و $\Phi(B)$ و $\theta(B)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$$

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

Φ_i ها به ازای $(i = 1, 2, \dots, p)$ و θ_j ها به ازای $(j = 1, 2, \dots, q)$ ماتریسهای $k \times k$ هستند که به همراه Σ باید از روی مشاهدات برآورد شوند و p و q نیز به ترتیب، مرتبه‌های قسمت اتورگرسیو و قسمت میانگین متحرک مدل هستند که در عمل باید تعیین شوند.

عموماً مدل‌های سربهای زمانی چندمتغیری را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

(۱) مدل‌های میانگین متحرک مرتبه q با علامت اختصاری $MA(q)$

(۲) مدل‌های اتورگرسیو ایستای مرتبه p با علامت اختصاری $AR(p)$

(۳) مدل‌های ایستای مرکب اتورگرسیو- میانگین متحرک با علامت اختصاری $ARMA(p, q)$

(۴) مدل‌های نایستای مرکب اتورگرسیو- میانگین متحرک با علامت اختصاری $ARIMA(p, d, q)$

مدل‌های یک تا سه را می‌توان حالت‌های خاصی از مدل چهار در نظر گرفت. در ادامه در بخش اول این مقاله به معرفی مدل‌های دسته اول یعنی $MA(q)$ خواهیم پرداخت، در بخش دوم شرط عکس پذیری مدل‌های میانگین متحرک را مورد بررسی قرار خواهیم داد و بخش سوم را به معرفی ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل مدل $MA(q)$ اختصاص می‌دهیم و در بخش چهارم حالت خاصی از این دسته از مدل‌ها یعنی $MA(1)$ را از نظر خواهیم گذراند.

۱ معرفی مدل

در مدل‌های تصادفی که در این بخش بررسی می‌شوند، یک فرآیند چند متغیری را که در آن مقادیر متوالی فرآیند به هم وابسته‌اند، می‌توان به صورت یک فرآیند ناشی از q ضربه تصادفی مستقل، از بردار a_t در نظر گرفت. این ضربات تصادفی نمونه‌هایی از یک توزیع معین هستند که معمولاً نرمال چندمتغیری فرض می‌شود. همچنین فرض می‌شود که توزیع ضربات تصادفی دارای بردار میانگین 0 و ماتریس کوواریانس Σ است. به چنین دنباله‌ای از بردارهای تصادفی a_t و a_{t-1} و ...، فرآیند نوفه سفید می‌گویند.

در مدل‌های میانگین متحرک می‌توان بردار Z_t را به صورت یک تابع خطی از $q + 1$ بردار a_t و به شکل زیر در نظر گرفت:

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (1)$$

که $\theta^*(B)$ ماتریس همسازه $\theta(B)$ است و $\det \theta(B)$ یک چندجمله‌ای بر حسب B و از درجه kq است که آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\det \theta(B) = 1 - \eta_1 B - \dots - \eta_{kq} B^{kq} \quad (5)$$

ضرایب η_i را به ازای $(i = 1, \dots, kq)$ با استفاده از ماتریس‌های θ_j به ازای $(j = 1, 2, \dots, q)$ می‌توان به دست آورد.

مثال ۱. فرض کنیم که در مدل (۲) داریم:

$$k = 2 \text{ و } q = 1$$

در این صورت مدل را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\bar{Z}_t = \theta(B)a_t \text{ و } \theta(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} B$$

در نتیجه داریم:

$$\theta(B) = \begin{bmatrix} 1 - \theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1 - \theta_{22}B \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان $\det \theta(B)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \det \theta(B) &= (1 - \theta_{11}B)(1 - \theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 \\ &= 1 - (\theta_{11} + \theta_{22})B - (\theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22})B^2 \end{aligned}$$

پس در مقایسه با رابطه (۵) داریم:

$$\eta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} \text{ و } \eta_2 = \theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22}. \square$$

حال برای آنکه $\theta^{-1}(B)$ بسطی همگرا داشته باشد باید $[\det \theta(B)]^{-1}$ همگرا باشد، اما می‌توان با توجه به (۵) نوشت:

$$\begin{aligned} [\det \theta(B)]^{-1} &= (1 - \eta_1 B - \dots - \eta_{kq} B^{kq})^{-1} \\ &= [(1 - G_1 B)(1 - G_2 B^2) \dots (1 - G_{kq} B^{kq})]^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{kq} \frac{M_i}{(1 - G_i B)} \quad (6) \end{aligned}$$

که μ بردار میانگین Z_t و θ_j ها به ازای $(j = 1, 2, \dots, q)$ ماتریسهای $k \times k$ هستند که باید برآورد شوند. حال اگر قرار دهیم:

$$\bar{Z}_t = Z_t - \mu$$

می‌توانیم انحراف $\bar{Z}_t$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

اگر از اپراتور پسرو B که به صورت $Ba_t = a_{t-1}$ تعریف می‌شود استفاده کنیم داریم:

$$\bar{Z}_t = \theta(B)a_t \quad (2)$$

در مدل فوق $\theta(B)$ ماتریس $k \times k$ است و عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌هایی بر حسب B و از درجه q هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

در عبارت فوق I ماتریس $k \times k$ است. حال برای آنکه بتوان یک مدل میانگین متحرک از مرتبه q را به مشاهدات برازاند ابتدا لازم است که مرتبه مدل یعنی q را برآورد کرد. بعد از برآورد q باید پارامترهای مدل یعنی μ و θ_1 و $\dots$ و θ_q و Σ را با استفاده از مشاهدات برآورد نمود.

۱.۱ شرط عکس‌پذیری مدل‌های میانگین متحرک

اگر بخواهیم از روی مدل (۲) بردار تصادفی a_t را بر حسب انحراف $\bar{Z}_t$ بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$a_t = \theta^{-1}(B)\bar{Z}_t \quad (3)$$

بنابراین برای آنکه بتوان این عمل را انجام داد باید ماتریس $\theta^{-1}(B)$ وجود داشته باشد و همانطور که می‌دانیم ماتریس $\theta^{-1}(B)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta^{-1}(B) = (\det \theta(B))^{-1} \theta^*(B) \quad (4)$$

$$= E(Z_{jt} - \mu_j)(Z_{it} - \mu_i)$$

$$= \gamma_{ji}(-s)$$

اگر بخواهیم از روی $z_n, \dots, z_2, z_1$ برآوردهایی برای ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل بیابیم، برآوردهای زیر به عنوان کارآمدترین برآوردها به دست می آیند.

$$\hat{\Gamma}(S) = (\hat{\gamma}_{it}(s)) \quad (12)$$

$$\hat{\gamma}_{it}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-s} (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt+s} - \bar{z}_j) \quad (13)$$

$$\hat{P}(s) = (\hat{p}_{ij}(s)) \quad (14)$$

$$\hat{P}_{ij}(s) = \frac{\sum_{t=1}^{n-s} (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt+s} - \bar{z}_j)}{(\sum_{t=1}^n (z_{it} - \bar{z}_i)^2 \cdot \sum_{t=1}^n (z_{jt} - \bar{z}_j)^2)^{1/2}} \quad (15)$$

حال با استفاده از رابطه (۸) ماتریس کوواریانس متقابل برای یک مدل میانگین متحرک به صورت زیر بدست می آید:

$$\bar{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\bar{Z}_{t-s} = a_{t-s} - \theta_1 a_{t-s-1} - \dots - \theta_q a_{t-s-q} \quad (16)$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{Z}_{t-s} \bar{Z}_t' = \bar{Z}_{t-s} (a_t' - a_{t-1}' \theta_1' - \dots - a_{t-q}' \theta_q')$$

$$= \bar{Z}_{t-s} a_t' - \bar{Z}_{t-s} a_{t-1}' \theta_1' - \dots - \bar{Z}_{t-s} a_{t-q}' \theta_q'$$

حال اگر $s < q$ باشد، داریم:

$$\bar{Z}_{t-s} \bar{Z}_t' = \bar{Z}_{t-s} a_t' - \bar{Z}_{t-s} a_{t-1}' \theta_1' - \dots - \bar{Z}_{t-s} a_{t-s}' \theta_s'$$

$$- \bar{Z}_{t-s} a_{t-(s+1)}' \theta_{s+1}' - \dots - \bar{Z}_{t-s} a_{t-q}' \theta_q'$$

با توجه به رابطه (۸) می توان نوشت:

$$\Gamma(s) = E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)' = E(\bar{Z}_{t-s} \bar{Z}_t')$$

$$= E(\bar{Z}_{t-s} a_t' - \bar{Z}_{t-s} a_{t-1}' \theta_1' - \dots$$

$$- \bar{Z}_{t-s} a_{t-s}' \theta_s' - \bar{Z}_{t-s} a_{t-(s+1)}' \theta_{s+1}'$$

در نتیجه برای آنکه ماتریس $\theta^{-1}(B)$ وجود داشته باشد باید رابطه (۶) همگرا باشد و برای این منظور باید $|G_i| < 1$ باشد. اما با توجه به آنکه داریم:

$$\det \theta(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_{kq} B)$$

شرط معادل آن است که ریشه های معادله $\det \theta(B) = 0$ خارج دایره واحد قرار گیرند یعنی به ازای $|B| > 1$ داشته باشیم:

$$\det \theta(B) = 0 \quad (7)$$

در نتیجه شرط فوق را به عنوان شرط عکس پذیری مدل های میانگین متحرک می توان در نظر گرفت.

۲ ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل

اگر سری زمانی Z_t ، برداری شامل k سری زمانی یک متغیره به شکل $Z_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{kt})'$ باشد، تحت فرض نرمال بودن و شرط ایستایی ضعیف مرتبه دو، توزیع احتمالی $Pr(Z_{t_1}, Z_{t_2})$ برای تمام زمانهای t_1 و t_2 یکسان است. می توانیم ماتریس کوواریانس متقابل به فاصله S را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma(S) = E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)', (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$= (\gamma_{ij}(s)), (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (8)$$

به همین ترتیب می توانیم ماتریس همبستگی متقابل به فاصله S را هم به شکل زیر تعریف کنیم:

$$P(S) = (P_{ij}(s)), (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

$$P_{ij}(s) = \frac{\gamma_{ij}(s)}{(\text{Var}(Z_i) \cdot \text{Var}(Z_j))^{1/2}} \quad (10)$$

$$, (i, j = 1, 2, \dots, k)$$

با توجه به (۸) می توان نوشت:

$$\gamma_{ij}(S) = E(Z_{it-s} - \mu_i)(Z_{jt} - \mu_j) \quad (11)$$

مدل صفر است.

اگر $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(q)$ و Σ معلوم باشند، q معادله‌ی حاصل از رابطه (۱۸) به ازای $s = 1, 2, \dots, q$ را برای پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ می‌توان حل کرد. بنابراین اگر به جای $\Gamma(s)$ از برآورد آن یعنی $\hat{\Gamma}(s)$ استفاده کنیم و به ازای $s = 1, 2, \dots, q$ ماتریسهای $\hat{\Gamma}(s)$ در رابطه‌ی (۱۸) قرار دهیم می‌توانیم برآوردهایی برای پارامترهای میانگین متحرک به دست بیاوریم. اینک برای توضیح بیشتر حالت خاصی را در نظر می‌گیریم.

۳ فرآیند میانگین متحرک دو متغیری مرتبه اول

فرض کنیم که $\bar{Z}_t = (\bar{Z}_{1t}, \bar{Z}_{2t})'$ و در (۲) داشته باشیم $q = 1$ بنابراین مدل میانگین متحرک مرتبه اول را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (I - \theta_1 B) a_t$$

یا به طور گسترده:

$$\begin{pmatrix} \bar{Z}_{1t} & \bar{Z}_{2t} \end{pmatrix}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} B \right) \begin{pmatrix} a_{1t} & a_{2t} \end{pmatrix}'$$

از بسط رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{1t} &= (1 - \theta_{11} B) a_{1t} - \theta_{12} B a_{2t} \\ &= a_{1t} - \theta_{11} a_{1t-1} - \theta_{12} a_{2t-1} \\ \bar{Z}_{2t} &= -\theta_{21} B a_{1t} + (1 - \theta_{22} B) a_{2t} \\ &= -\theta_{21} a_{1t-1} + a_{2t} - \theta_{22} a_{2t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots - \bar{Z}_{t-s} a'_{t-s} \theta'_q) \\ &= E(\bar{Z}_{t-s} a'_t) - E(\bar{Z}_{t-s} a'_{t-1}) \theta'_1 - \dots \\ & \quad - E(\bar{Z}_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s - E(\bar{Z}_{t-s} a'_{t-(s+1)}) \theta'_{s+1} \\ & \quad - \dots - E(\bar{Z}_{t-s} a'_{t-q}) \theta'_q \end{aligned}$$

با توجه به این نکته که بردارهای تصادفی a_t از هم مستقل و دارای بردار میانگین صفر هستند و همچنین با توجه به رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= 0 - 0 - \dots - E(a_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s \\ & \quad + \theta_1 E(a_{t-(s+1)} a'_{t-(s+1)}) \theta'_{s+1} \\ & \quad + \dots + \theta_{q-s} E(a_{t-q} a'_{t-q}) \theta'_q \end{aligned}$$

یعنی:

$$\Gamma(s) = -\sum \theta'_s + \theta_1 \sum \theta'_{s+1} + \dots + \theta_{q-s} \sum \theta'_q$$

اما اگر $s > q$ باشد مثلاً اگر $s = q + 1$ باشد، در این صورت با توجه به (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{t-s} \bar{Z}'_t &= \bar{Z}_{t-s} a'_t - \bar{Z}_{t-s} a'_{t-1} \theta'_1 - \dots \\ & \quad - \bar{Z}_{t-s} a'_{t-s+1} \theta'_s - \bar{Z}_{t-s} a'_{t-s} \theta'_s \end{aligned}$$

که در رابطه‌ی فوق $\theta'_s = \theta'_{q+1}$ و برابر ۰ خواهد بود، بنابراین با توجه به (۱۶) داریم:

$$E(\bar{Z}_{t-s} \bar{Z}'_t) = 0 - 0 - \dots - 0 - E(a_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s$$

چون $\theta'_s = 0$ ، داریم $E(\bar{Z}_{t-s} \bar{Z}'_t) = 0$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\Gamma(s)$ برای $s = q + 2$ و $s = q + 3$ و ... نیز صفر است. بنابراین می‌توان فرم کلی $\Gamma(s)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-s} \theta_j \sum \theta'_j + s & s = 0, 1, \dots, q \\ 0 & s > q \end{cases} \quad (18)$$

که در رابطه فوق $-I = \theta_0$. با توجه به رابطه (۱۸) ملاحظه می‌کنیم که ماتریس کوواریانس متقابل، یک مدل $MA(q)$ به ازای مقادیر $s > q$ ، یعنی به ازای شناسه‌های بزرگتر از مرتبه

۱.۳ عکس پذیری

بنابراین می توان دید که دو شرط الف و ب در مورد مدل مزبور صدق می کنند.

$$\left| \frac{-0/2 + \sqrt{0/04 + 4 \times 0/56}}{-2 \times 0/56} \right| = |-1/16| = 1/16 \quad \text{الف:}$$

و

$$\left| \frac{-0/2 - \sqrt{0/04 + 4 \times 0/56}}{-2 \times 0/56} \right| = |-1/52| = 1/52 \quad \text{ب:}$$

یعنی مدل عکس پذیر است.
اما اگر داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/7 \\ 0/6 & -0/8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\det \theta_1 = -0/9 \quad \text{و} \quad \text{tr} \theta_1 = -0/2$$

و ملاحظه می کنیم که شرط الف در این مورد برقرار نیست.

$$\left| \frac{-0/2 + \sqrt{0/04 + 4 \times 0/9}}{-1/8} \right| = |-0/9| = 0/9$$

یعنی مدل عکس پذیر نیست.

برای اینکه مدل عکس پذیر باشد طبق رابطه (۷) باید برای $|B| > 1$ داشته باشیم:

$$\det \theta(B) = \begin{vmatrix} 1 - \theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1 - \theta_{22}B \end{vmatrix} = 0$$

در نتیجه با توجه به بسط دترمینان فوق داریم:

$$(1 - \theta_{11}B)(1 - \theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 = 0$$

که اگر معادله فوق را برحسب توان B مرتب کنیم، داریم:

$$1 - (\theta_{11} + \theta_{22})B + (\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})B^2 = 0$$

حال با اعمال شرط عکس پذیری، $|B| > 1$ ، داریم:

$$|B| =$$

$$\left| \frac{\theta_{11} + \theta_{22} \pm \sqrt{(\theta_{11} + \theta_{22})^2 - 4(\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})}}{2(\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})} \right| > 1$$

اما با توجه به:

$$\text{tr} \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} \quad \text{و} \quad \det \theta_1 = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}$$

می توان نوشت:

$$\left| \frac{\text{tr} \theta_1 \pm \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

در نتیجه داریم:

$$\left| \frac{\text{tr} \theta_1 + \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

الف:

و

$$\left| \frac{\text{tr} \theta_1 - \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

ب:

یعنی برای آنکه مدل دو متغیری $MA(1)$ عکس پذیر باشد باید دو شرط الف و ب به طور همزمان برقرار باشد.

مثال ۲. اگر در مدل دو متغیری $MA(1)$ داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/4 \\ 0/2 & -0/8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$\det \theta_1 = -0/56 \quad \text{و} \quad \text{tr} \theta_1 = -0/2$$

۲.۳ برآوردهای اولیه پارامتر

با استفاده از رابطه (۱۸) داریم:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{s-1} \theta_j \sum \theta'_j + s & s = 0, 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

و به ازای $s = 0, 1$ و با استفاده از برآوردهای $\Gamma(0)$ و $\Gamma(1)$ داریم:

$$\hat{\Gamma}(0) = \hat{\Sigma} + \hat{\theta}_1 \hat{\Sigma} \hat{\theta}'_1$$

$$\hat{\Gamma}(1) = \hat{\Sigma} + \hat{\theta}'_1$$

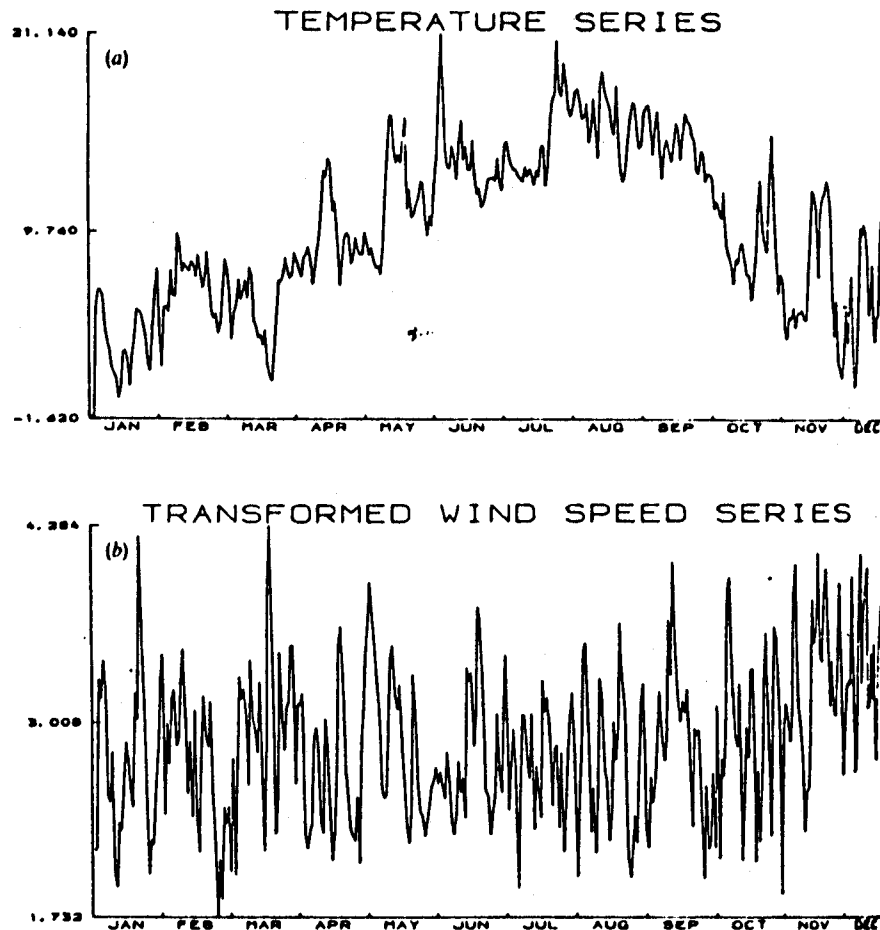
که می توان با حل دو معادله فوق، $\hat{\Sigma}$ و $\hat{\theta}_1$ را به دست آورد.

۴ یک مثال عملی [۳]

(۱) درجه حرارت : $MA(4)$

بعد از تفاضل گیری از سری درجه حرارت (∇T_t) برای ایجاد سکون، مدل میانگین متحرک مرتبه چهارم با واریانس باقیمانده‌ی ۲/۴۷۵ به صورت زیر برآورد شده است.

نمودار دوسری درجه حرارت روزانه (T_t) و ریشه‌ی دوم سرعت باد (W_t) در یک دوره‌ی یک ساله در شکل زیر نشان داده شده است.



$$\nabla T_t = a_{1t} + 0.07a_{1t-1} - 0.30a_{1t-2} - 0.15a_{1t-3} - 0.20a_{1t-4}$$

در این بخش ابتدا به کمک داده‌های مربوط، مدل‌های یک متغیری این دوسری را به دست آورده، سپس با توجه به همبستگی معنی‌داری که بین باقیمانده‌های دو مدل مشاهده می‌شود، یک مدل دومتغیری پیشنهاد خواهد شد.

(۲) ریشه دوم سرعت باد : $AR(2)$

برای سری W_t مدل پیشنهادی، اتورگرسیو مرتبه دو با واریانس باقیمانده‌ی ۰/۱۶۶ به صورت زیر

الف: مدل‌های یک متغیری

با استفاده از تکنیک سریهای زمانی یک متغیری [۴] مدل‌های زیر برای دوسری مورد بحث، حاصل شده است.

در این جدول علامت منفی نشان دهنده وجود همبستگی منفی معنی دار و علامت مثبت نشان دهنده وجود همبستگی مثبت معنی دار است.

با توجه به این جدول و با توجه به رابطه (۱۸) و روابط (۸) و (۹) و (۱۰) یک مدل دو متغیری میانگین متحرک مرتبه ۵ یعنی $MA(5)$ به صورت زیر، پیشنهاد می شود.

$$Z_t = \hat{\mu}_0 + \hat{\theta}(B)a_t^*$$

که در آن،

$$Z_t = \begin{bmatrix} \nabla T_t \\ W_t \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \hat{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

و

$$\hat{\theta}(B) = I - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \hat{\theta}_3 B^3 - \hat{\theta}_4 B^4 - \hat{\theta}_5 B^5$$

$$a_t^* = \begin{bmatrix} a_{1t}^* \\ a_{2t}^* \end{bmatrix}$$

برآورد پارامترهای مدل به صورت زیر است:

$$\hat{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/90 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -0/07 & 0/84 \\ -0/02 & -0/58 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0/28 & 0 \\ -0/04 & -0/25 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}_4 = \begin{bmatrix} 0/16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2/435 & 0 \\ 0/143 & 0/163 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است با توجه به صفر بودن ماتریس $\hat{\theta}_5$ می توان مدل آن را $MA(4)$ در نظر گرفت. برآورد ماتریس همبستگی متقابل باقیمانده‌ی مدل به ازای بیست مقدار از k به صورت شکل (۱) است.

صفر بودن ماتریسهای شکل (۱) نشان دهنده برتری دو متغیری نسبت به مدل های یک متغیری می باشد.

برآورده شده است.

$$W_t - 0/66W_{t-1} + 0/12W_{t-2} = 1/33 + a_{2t}$$

ب: آنالیز دو متغیری

با استفاده از مدل های یک متغیری قسمت الف، و محاسبه باقیمانده های این دو مدل، همبستگی نمونه ای بین باقیمانده های دو سری W_t و T_t ، محاسبه و در جدول (۱) نشان داده شده است.

در این جدول، x باقیمانده ی سری سرعت باد و y باقیمانده ی سری درجه حرارت و $\hat{\rho}_{xy}(k)$ همبستگی متقابل بین سری های x_t و y_{t+k} می باشد. برآورد انحراف معیار $\hat{\rho}_{xy}(k)$ تقریباً برابر با $\frac{1}{\sqrt{n}}$ بوده، با توجه به $n = 365$ می توان برای $\rho_{xy}(k) = 0$: مقدار H_0 مقدار Z را با توجه به فرمول $Z = \frac{\hat{\rho}_{xy}(k)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ به صورت جدول (۲) محاسبه نمود.

همان طور که ملاحظه می شود در سطح $\alpha = 0/05$ برای بعضی مقادیر k فرض صفر معنی دار است که نشان دهنده وجود رابطه ی معنی داری بین باقیمانده های دو سری W_t و T_t می باشد. بنابراین با توجه به این همبستگی بایست یک مدل دو متغیری را مورد نظر قرار داد. به این منظور به محاسبه برآورد ماتریسهای همبستگی متقابل $(\hat{\rho}(k))$ سری دو متغیری $Z_t' = [\nabla T_t, W_t]$ با توجه به رابطه (۱۰) اقدام شده است. نتیجه به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ به صورت زیر است.

	∇T_t	W_t
∇T_t	..- - - - - +	++ ..- - - - -
W_t	- - - - -	++++ ..- - - - -

	a_{1t}^*	a_{2t}^*
a_{1t}^*		
a_{2t}^*		++ ..

شکل ۱:

k	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\hat{\rho}_{xy}(k)$	-۰/۰۱	-۰/۰۷	-۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۰۸	۰/۲۱	-۰/۱۹	-۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۰۱	-۰/۰۲

جدول ۱:

k	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
Z	-۰/۱۹	-۱/۳۴	-۱/۵۳	۲/۲۹	۱/۵۳	۴/۰۱	-۳/۶۳	-۰/۷۶	۰/۰۰	۰/۱۹	-۰/۳۸

جدول ۲:

مراجع

- [1] Tiao, G. C. , and Box, G. E. P. (1981), *Modeling Multiple Time Series with Applications*, JASA. 76, 802-816.
- [2] Wie, W. W. S. (1989), *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*, Redwood City CA, Addison-Wesely.
- [3] Shea, B. L. (1987), *Estimation of Multivariate Time- Series*, Journal of Time Series Analysis Vol. 8, No. 1.

[۴] مشکانی، محمدرضا (۱۳۵۲)، تجزیه و تحلیل سریهای زمانی و پیش‌بینی، مؤسسه آموزش عالی آمار، تهران.

[۵] مقصودی، عباس (۱۳۷۰)، بررسی سریهای زمانی چندمتغیری سمت و سرعت بادهای خلیج فارس، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهیدبهشتی، تهران.