معرفی روشهایی برای ارزشیابی

ماشاالله ماشین‌چی [۱]

چکیده

یکی از مسائل مهم تصمیم گیری، ارزشیابی است؛ مثل ارزشیابی دانشجویان یک رشته تحصیلی، کارگران یا کارمندان یک اداره یا محصولات یک کارخانه. اما این ارزشیابی بر اساس داده های استخراج شده انجام می گیرد و این داده ها می توانند عددی نباشند، بلکه به‌صورت اطلاعات ناقص و فاقد دقّت ارایه گردند. از طرفی دقیق نبودن داده‌ها، لزوماً به مفهوم احتمالی بودن آنها نیست و اغلب از نوع مفاهیم زبانی اند که ما در زندگی روزمره نیز از آنها استفاده می کنیم ، مانند بد، خوب، خیلی خوب، و غیره. در این مقاله روشهایی برای ارزشیابی یک پاسخنامه هنگامی که داده ها به صورت نادقیق باشند، ارایه می‌کنیم که در آنها مجموعه‌های مشکک ، عملگرهای همسوساز، یا تلفیقی از این دو را به کار خواهیم برد. البته این روشهای ارزشیابی می توانند در سایر زمینه‌ها مثل استخدام، آزمون استعداد، ارتقا، مهارت ، یادگیری و غیره نیز کاربرد داشته باشند.

۱ مقدمه

در ارزشیابی ورقه امتحانی دانشجویان ، در صورتی‌که سؤالها به‌صورت چند گزینه ای نباشند و پاسخها، تشریحی ارایه شوند، مدرسین با مطالعه‌ی پاسخنامه برای هر سؤال که بارم آن از قبل معلوم است ، نمره ای عددی منظور می کنند. سپس با معدل گرفتن از این اعداد توسط شاخص میانگین ، که روش معمول در آمار است ، توانایی دانشجو را محاسبه کرده و ارزشیابی خود را انجام می دهند. اما روش دیگری که می‌توان برای ارزشیابی به‌کار برد، استفاده از نمره‌های الفبایی است. در این روش برای هر سؤال نمره‌ای الفبایی ، به جای نمره عددی منظور می کنند. مثلاً در جدول زیر در ردیف اول، نمره‌ی (ارزش) الفبایی است که مدرس با مطالعه هر سؤال یکی از آنها را در نظر می گیرد. ردیف دوم نمره‌ی زبانی است که برداشت و دیدگاه وی را در مورد نمره‌ی حرفی بیان می کند و ردیف سوم نمره‌ی عددی است که با توجه به ذهنیت مدرس منظور می‌شود و یا این‌که این عدد از قبل تعیین گردیده است.

---

[۱] دکتر ماشاالله ماشین‌چی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

نمره الفبایی	A	B	C	D	F
نمره زبانی	عالی	خیلی خوب	خوب	قانع کننده	غیرقابل قبول
نمره عددی	۹۵	۸۰	۶۰	۴۰	۵

این نمره‌ی عددی برای عددی‌سازیِ نمره‌ی الفبایی یا نمره‌ی زبانی به‌کار می‌رود. حال باتوجه به نمره‌ی الفبایی یا زبانی به‌دست آمده و در نظر گرفتن اهمیت یا به عبارتی وزن هر سؤال معدل گیری پاسخنامه را انجام داده و شاخص میانگین توانایی دانشجو را به‌دست آورده، ارزشیابی را انجام می‌دهند. مثلاً این روش برای معدل گیری کارنامه های تحصیلی دانشجویان نیز به‌کار می‌رود. در هر حال سرنوشت دانشجو و قضاوت نهایی در مورد وی توسط این چنین روشهای نمره دهی ، معدل گیری‌شده و در آخر ارزشیابی می شود. هر گونه عدم کارایی این ارزشیابی ها به تصمیم گیریهای غلط می‌انجامد که عواقب نامناسبی در پی دارد.
اخیراً در گزارشی، که توسط شورای ملی دبیران ریاضی امریکا [۹] در مورد برنامه درسی و ارزشیابی انجام شده، آمده است که: « معدل گیریِ صِرف از نمره‌های امتحانی، تصویر درستی از معلومات یک دانش آموز به دست نمی‌دهد.» بنابراین ارایه روشهای جدید ارزشیابی و بررسی آنها می تواند، هم از دید نظری و هم از جنبه‌ی کاربردی ، جالب باشد. یکی از روشهایی که اخیراً برای این کار در نظر گرفته شده، استفاده از مجموعه‌های مشکک است [۱۸]. این مجموعه‌ها دارای قابلیت بیان و مدل سازی مفاهیم فاقد دقّت و زبانی اند. لذا بسیاری از پژوهشگران کاربرد مجموعه های مشکک را برای ارزشیابی پاسخنامه دانشجویان [۲،۵،۱۷]، سیستمهای تسلیحاتی [۸]، کیفیت کتاب [۶]، کیفیت تدریس [۱۴،۱۵]، مسأله انتخاب [۷] و سایر زمینه ها[۴،۱۰،۱۱،۱۶] به‌کار برده اند. از شبکه های عصبی [۱،۱۲] نیز در ارزشیابی اهداف مشکک استفاده شده است. اخیراً هم نویسنده‌ی این مقاله [۱۹] استفاده از عملگرههای همسوساز را به عنوان روشی نو برای معدل گیری از داده های فاقد دقت معرفی کرده است. برای بررسی روشهای معمولیِ اندازه گیری و ارزشیابی تحصیلی، مطالعه‌ی کتابِ [۲۰] پیشنهاد می شود.

در این مقاله با پی گیری روش ارایه شده در مقاله‌ی [۲] ارزشیابی یک پاسخنامه را هنگامی که نمره‌ها به شکل نادقیق الفبایی یا زبانی باشند، با استفاده از مجموعه های مشکک، عملگرهای همسوساز [۱۹] یا تلفیقی از این دو، ارایه می کنیم. البته این روشهای جدید می توانند در زمینه‌های دیگری مانند استخدام، آزمون استعداد، ارتقا، مهارت، یادگیری و غیره نیز کاربرد داشته باشند[۲].

۲ پیشنیاز

تعریف ۲.۱ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. مجموعه‌ی مشکک A در X توسط یک تابع عضویت $A : X \to [۰,۱]$ مشخص می‌شود. مقدار $A(x)$ بیانگر میزان عضویت x در مجموعه‌ی مشکک A است [۱۸].

مجموعه X می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. در این مقاله فرض می کنیم که X متناهی باشد. لذا با فرض $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$، مجموعهٔ مشکک A در X را به یکی از دو صورت زیر نشان می دهیم:

$$A = \frac{A(x_۱)}{x_۱} + \frac{A(x_۲)}{x_۲} + \cdots + \frac{A(x_n)}{x_n}$$
$$A = (A(x_۱), \ldots, A(x_n))\cdot$$

دقت کنید که به ازای هر i، $\frac{A(x_i)}{x_i}$ به معنی این است که میزان عضویت x_i در A برابر با $A(x_i)$ است.
در صورت لزوم، اگر $A(x_i)$ برابر با صفر باشد، آنگاه جمله $\frac{A(x_i)}{x_i}$ را نمی نویسیم.

مثال ۲.۱ فرض کنید $X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۲۰\}$. اگر مجموعه‌ی مشکک A به‌صورت زیر باشد

$$A = \frac{۰/۷}{۱۸} + \frac{۱}{۱۹} + \frac{۰/۸}{۲۰}$$

در این صورت اگر X فضای نمره باشد، می توان A را به عنوان مفهومی نادقیق برای نمره‌ی یک دانش آموز در نظر گرفت که حدود ۱۹ را مشخص می کند.

تعریف ۲.۲ فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی مشکک در X باشند. آنگاه درجه‌ی تشابه مابین A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$S(A,B)=\frac{A.B}{\max(A.A,B.B)}$$

که در آن $A.B=\sum_{i=1}^{m}A(x_i)B(x_i)$ حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $A=(A(x_1),\ldots,A(x_n))$ و $B=(B(x_1),\ldots,B(x_n))$ است.

از تعریف فوق به‌راحتی ملاحظه می‌شود که:

الف) $\text{۰}\leq S(A,B)$،

ب) $S(A,B)=S(B,A)$،

ج) $S(A,A)=\text{۱}$ برای هر زیر مجموعه‌ی مشکک A در X،

د) $S(A,X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}A(x_i)}{n}$. بخصوص اگر A یک مجموعه‌ی معمولی باشد $S(A,X)=\frac{Card(A)}{Card(X)}$،

ه) $S(A,A^c)=\text{۰}$، برای هر مجموعه‌ی A در X که A^c متمم آن است.

مثال ۲.۲ اگر $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$، دو مجموعه مشکک A و B را به‌صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A=\frac{\text{۰/۴}}{x_1}+\frac{\text{۰/۸}}{x_2}+\frac{\text{۰/۹}}{x_3},$$
$$B=\frac{\text{۰/۶}}{x_1}+\frac{\text{۰/۳}}{x_2}$$

در این‌صورت درجه‌ی تشابه مابین A و B برابر است با

$$S(A,B)=\frac{\text{۰/۴۸}}{\max(\text{۱۶/۱},\text{۱/۲۶})}=\text{۰/۳۸}\cdot$$

در خصوص درجه‌ی تشابه یا اندازه‌ی تشابه مابین دو مجموعه‌ی مشکک، مقاله های زیادی وجود دارد که در آنها تعریف های دیگری به‌جای تعریف ۲.۲، به‌کار رفته است. به عنوان مثال [۱۳] را ملاحظه کنید. البته مفهوم همبستگی بین دو مجموعه مشکک نیز می تواند معیار دیگری در این رابطه باشد[۳]. در این مقاله ما همان تعریف ۲.۲ را که در دو مقاله‌ی [۲] و [۱۲] نیز به‌کار رفته، می‌پذیریم.

یکی از مفاهیم دیگری که در ادامه‌ی مقاله بدان نیاز داریم، مفهوم مشبکه است که در زیر ارایه می کنیم :

تعریف ۲.۳ یک مشبکه $(L,\leq,\vee,\wedge)$ عبارت‌است از یک مجموعه‌ی بطور جزئی مرتب P با ترتیب $\leq$، که در آن هر دو عنصر دلخواه $x,y\in L$ دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا باشند، که به ترتیب به $x\vee y$ و $x\wedge y$ نشان می‌دهیم. کوچکترین و بزرگترین عنصر مشبکه را در صورت وجود، به ترتیب به ۰ و ۱ نشان می دهیم.

به عنوان مثال $(p(X),\subseteq,\cap,\cup)$ یک مشبکه است که در آن X مجموعه‌ای ناتهی، $p(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های X است و به علاوه $\subseteq$، $\cap$ و $\cup$ به ترتیب نمادهای زیرمجموعه، اشتراک و اجتماع هستند. در اینجا عنصر ۰ همان $\emptyset$ و عنصر ۱ همان X است.

یکی از روشهای معدل گیری که اخیراً در مقاله [۱۹] ارایه شده است استفاده از عملگرهای همسوساز مشبکه‌ای است که در زیر به آن می‌پردازیم.

تعریف ۲.۴ هر تابع $h\ :\ L^n\to L$ را یک عملگر همسوساز وابسته به مشبکه L، یا به طور مختصر یک همسوساز گوییم. در واقع یک همسوساز عبارت است از عملی n تایی روی شبکه L. چنانچه $h\ :\ L^2\to L$ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی L باشد، آنگاه می توان h را به یک همسوساز روی L توسیع داد. فرض می‌کنیم $h(a,b,c)=h(a,h(b,c))$ به ازاء هر $a,b,c\in L$ برقرار است. برای به‌دست آوردن یک همسوساز مناسب برای معدل گیری لازم است شرایطی معقول را بر h اعمال کرد که از

جمله شرایط زیر هستند:

ش ۱. $h(۱,\dots,۱,۱) = h(۰,۰,\dots,۰,۰) = ۰$

ش ۲. اگر $\underline{a} = (a_۱,\dots,a_n)$, $\underline{b} = (b_۱,\dots,b_n) \in L^n$ به طوری که برای هر $i = ۱,۲,\dots,n$، $a_i \le b_i$، آنگاه $h(\underline{a}) \le h(\underline{b})$.

ش ۳. h متقارن است، یعنی برای هر $\underline{a} \in L^n$ داریم:

$$h(a_۱,\dots,a_n) = h(a_{p(۱)},\dots,a_{p(n)})$$

که در آن p یک جایگشت روی مجموعه‌ی $۱,۲,\dots,n$ است.

ش ۴. h خودتوان است. یعنی به ازاء هر $a \in L$ داریم:

$$h(a,a,\dots,a) = a\cdot$$

خواص همسوسازها در مقاله [۱۹] مورد بحث قرار گرفته است. ما در این مقاله در مثال ۳.۲ در حالتی که L یک زنجیر باشد یکی از همسوسازهای روی L را مورد استفاده قرار می دهیم.

۳ روشهای ارزشیابی

۱ — روش ارزیابی مشکک

در این بخش روش ارزشیابی پاسخنامه های تشریحی را با استفاده از مجموعه های مشکک که در [۲] پیشنهاد شده و در [۱۲] مجدداً مورد استفاده قرار گرفته است، مطرح می‌کنیم و آن را روش ارزشیابی مشکک (نام) می نامیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $X = ۰,۲۰,۴۰,۶۰,۸۰,۱۰۰$ فضای نمونه نمرات باشد. نمرات استانده مشکک (نام) در X را به‌صورت پنج نمره مشکک زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{A} = \text{عالی} = \frac{۰}{۰} + \frac{۰}{۲۰} + \frac{۰/۸}{۴۰} + \frac{۰/۹}{۶۰} + \frac{۱}{۸۰} + \frac{۱}{۱۰۰} = (۰,۰,۰/۸,۰/۹,۱,۱)$$

$$\tilde{B} = \text{خیلی‌خوب} = \frac{۰}{۰} + \frac{۰}{۲۰} + \frac{۰/۸}{۴۰} + \frac{۰/۹}{۶۰} + \frac{۰/۹}{۸۰} + \frac{۰/۸}{۱۰۰} = (۰,۰,۰/۸,۰/۹,۰/۹,۰.۸)$$

$$\tilde{C} = \text{خوب} = \frac{۰}{۰} + \frac{۰/۱}{۲۰} + \frac{۰/۸}{۴۰} + \frac{۰/۹}{۶۰} + \frac{۰/۴}{۸۰} + \frac{۰/۲}{۱۰۰} = (۰,۰/۱,۰/۸,۰/۹,۰/۴,۰/۲)$$

$$\tilde{D} = \text{قانع‌کننده} = \frac{۰/۴}{۰} + \frac{۰/۴}{۲۰} + \frac{۰/۹}{۴۰} + \frac{۰/۶}{۶۰} + \frac{۰/۲}{۸۰} + \frac{۰}{۱۰۰} = (۰/۴,۰/۴,۰/۹,۰/۶,۰/۲,۰)$$

$$\tilde{F} = \text{غیرقابل‌قبول} = \frac{۱}{۰} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۰/۴}{۴۰} + \frac{۰/۴}{۶۰} + \frac{۰}{۸۰} + \frac{۰}{۱۰۰} = (۱,۱,۰/۴,۰/۴,۰,۰)$$

در تعریف فوق نمرات نام از قبل توسط مؤسسه آموزشی مدلسازی شده اند و اینها چیزی نیستند مگر انتظار مربیان مؤسسه آموزشی از مفاهیم کم دقت عالی، خیلی خوب، خوب، قانع کننده و غیر قابل قبول که ممکن است در هر مؤسسه‌ای مدل خاص خود را داشته باشند و این بستگی به سطح علمی آن مؤسسه دارد. لزوماً نمرات نام نبایستی پنج عدد باشند و می توان تعداد آنها را بیشتر یا کمتر کرد. در حالت کلی یک نام عبارت‌است از مجموعه مشکک که به طور مناسبی در فضای نمونه نمرات X مدلسازی شده است. ضمناً عناصر X را نیز می توان، بر حسب سیستم آموزشی مورد بحث، تغییر داد. مثلاً در کشور خودمان می توان فرض کرد $X = ۰,۵,۱۰,۱۵,۲۰$ و نمرات نام را در این X طراحی کرد.

تعریف ۳.۲ در فضای نمونه نمرات X، یک مجموعه‌ی مشکک را که دارای یکی از خواص زیر باشد، نمره‌ی امتحانی مشکک (نامش) گوییم:

الف) نزولی باشد،

ب) صعودی باشد،

ج) ابتدا صعودی و سپس نزولی باشد.

به عنوان مثال هر نام که در تعریف ۳.۱ ارایه شد، خود یک نامش است. بنابراین اگر نمره‌ی نامش برای سئوال i ام، که توسط یک مدرس تصحیح شده، به‌صورت

$$G_i = \frac{۰}{۰} + \frac{۰/۱}{۲۰} + \frac{۰/۲}{۴۰} + \frac{۰/۴}{۶۰} + \frac{۰/۴}{۸۰} + \frac{۰/۶}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

باشد، در این صورت به اعتقاد این مدرس درجه‌ی اعتماد به

این‌که این سئوال ۱۰۰٪ حل شده است، ۰/۶ است. لذا قدم بعدی این است که این نمره‌ی G_i به کدام یک از نمرات نام تشابه دارد که این عمل با استفاده از درجه‌ی تشابه در تعریف ۲.۲ انجام می شود.

تعریف ۳.۳ یک ورقه‌ی نمره‌ی مشکک عبارت است از یک فرم ماتریسی شامل نُه ستون و n سطر(تعداد کل سؤالات امتحانی)، که در شکل ۱ نشان داده شده‌است.

در این ورقه، ستون اول شماره سؤال را مشخص می‌کند. در ستون دوم تا هفتم در مقابل هر ردیف، مثلاً i ام، نمره امتحانی مشکک (نامش) مطابق تعریف ۳.۲ برای سؤال Q_i به‌صورت آنچه که در (۱) آمده است، وارد می شود. در ستون نمره‌ی سؤال الفبایی با استفاده از تشابه نمره‌ی امتحانی مشکک برای هر سؤال با نمرات نام مطابق با تعریف ۲.۲ به‌دست می آید. چگونگی محاسبه نمره کل در ادامه توضیح داده خواهد شد و نیاز به جدول ۱ دارد که شامل نمره‌ی الفبایی، فاصله‌ی نمره‌ی الفبایی و نقطه‌ی وسط نمره الفبایی است.

نمره الفبایی g_i	فاصله نمره الفبایی	نقطه وسط نمره الفبایی $P(g_i)$
A	$۹۰ \leq A \leq ۱۰۰$	$P(A) = ۹۵$
B	$۷۰ \leq B < ۹۰$	$P(B) = ۸۰$
C	$۵۰ \leq C < ۹۰$	$P(C) = ۸۰$
D	$۳۰ \leq D < ۵۰$	$P(D) = ۴۰$
F	$۰ \leq F < ۳۰$	$P(F) = ۱۵$

جدول ۱: عددی سازی نمره الفبایی

حال می توانیم روش محاسبه نمره‌ی کل را به‌صورت روند ارزشیابی مشکک به‌صورت زیر بیان کنیم:

۱) ورقه‌ی نمره‌ی مشکک را آماده می کنیم (شکل ۱).

۲) نامش را برای هر سؤال مطابق با تعریف ۳.۲ وارد می‌کنیم. فرض کنید که G_i نامش سؤال Q_i باشد.

۳) درجه‌ی تشابه نامش G_i را با استفاده از تعریف ۲.۲ با هر کدام از نمرات نام در تعریف ۳.۱ به‌صورت زیر به‌دست می آوریم

$$S(G_i,\tilde{A}), S(G_i,\tilde{B}), S(G_i,\tilde{C}), S(G_i,\tilde{D}), S(G_i,\tilde{F})$$

و فرض می کنیم که بیشترین مقدار این درجات، مثلاً $S(G_i,\tilde{B})$ باشد.

۴) با توجه به مرحله ۳ که $S(G_i,\tilde{B})$ بیشترین مقدار است، نمره‌ی سؤال Q_i را B وارد می کنیم. در صورتی‌که در مرحله ۳ حداکثر مقدار چند عدد، مثلاً $S(G_i,\tilde{A})$ و $S(G_i,\tilde{B})$ باشد در این صورت نمره‌ی سؤال Q_i را بیشترین نمره؛ یعنی $\tilde{A}$ می گیریم.

۵) نمره کل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{نمره‌کل} = \frac{۱}{۱۰۰}\sum_{i=۱}^{n} T(Q_i)P(g_i)$$

شماره سؤال Q_i	نمره امتحانی مشکک سؤال G_i						نمره سؤال الفبایی	امتیاز سؤال $T(Q_i)$
سؤال اول $Q_۱$								$T(Q_۱)$
سؤال دوم $Q_۲$								$T(Q_۲)$
$\vdots$								
سؤال nام Q_n								$T(Q_n)$
	= نمره کل از ۱۰۰ نمره							$۱۰۰ = \sum_{i=۱}^{n} T(Q_i)$

شکل ۱: ورقه نمره مشکک

که در آن $T(Q_i)$ امتیاز سؤال Q_i است که $\sum_{i=۱}^{n} T(Q_i) = ۱۰۰$ و g_i نمره‌ی الفبایی مربوط به سؤال Q_i به‌دست آمده در مرحله ۳ و $P(g_i)$ نقطه وسط نمره‌ی الفبایی، مطابق جدول ۱ است.

مثال ۳.۱ در یک امتحان فرض کنید که جمع کل امتیاز نمره ۱۰۰ است که به‌صورت زیر بین ۴ سؤال موجود در ورقه سؤال توزیع شده است. حال ورقه نمره مشکک را که به‌صورت زیر پرشده است در نظر بگیرید:

امتیاز سؤال $T(Q_i)$	نمره سؤال الفبایی	نمره امتحانی مشکک سؤال G_i						شماره سؤال Q_i
۲۰	C	۰	۰/۲	۰/۸	۰/۶	۰	۰	سؤال اول $Q_۱$
۴۰	B	۱	۰/۸	۰/۴	۰	۰	۰	سؤال دوم $Q_۲$
۱۰	C	۰	۰/۲	۰/۶	۰/۴	۰/۲	۰	سؤال سوم $Q_۳$
۳۰	F	۰	۰	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۸	سؤال چهارم $Q_۴$
۱۰۰	۵۵ = نمره کل از ۱۰۰ نمره							

شکل ۲

محاسبه ستون مربوط به g_i نمره‌ی الفبایی به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$S(G_۱,\tilde{A}) = \frac{۱۴۰}{۲۴۵}$, $S(G_۱,\tilde{B}) = \frac{۱۳۸}{۲۹۰}$, $S(G_۱,\tilde{C}) = \frac{۱۲۸}{۱۶۶}$, $S(G_۱,\tilde{D}) = \frac{۱۰۶}{۱۵۳}$, $S(G_۱,\tilde{F}) = \frac{۴۰}{۲۲۰}$

$S(G_۱,\tilde{C})$ ماکسیمم است. پس $g_۱$ نمره‌ی الفبایی سؤال اول C است.

$S(G_۲,\tilde{A}) = \frac{۲۱۶}{۲۴۵}$, $S(G_۲,\tilde{B}) = \frac{۱۸۸}{۲۹۰}$, $S(G_۲,\tilde{C}) = \frac{۸۸}{۱۸۰}$, $S(G_۲,\tilde{D}) = \frac{۴۰}{۱۸۰}$, $S(G_۲,\tilde{F}) = \frac{۸}{۲۲۰}$

لذا $g_۲$ برابربا B است.

$S(G_۳,\tilde{A}) = \frac{۱۰۶}{۲۴۵}$, $S(G_۳,\tilde{B}) = \frac{۱۰۴}{۲۹۰}$, $S(G_۳,\tilde{C}) = \frac{۹۶}{۱۶۶}$, $S(G_۳,\tilde{D}) = \frac{۸۲}{۱۵۳}$, $S(G_۳,\tilde{F}) = \frac{۴۸}{۲۲۰}$

لذا $g_۳$ برابربا C است.

$S(G_۴,\tilde{A}) = \frac{۸}{۲۴۵}$, $S(G_۴,\tilde{B}) = \frac{۸}{۲۹۰}$, $S(G_۴,\tilde{C}) = \frac{۱۳}{۱۶۶}$, $S(G_۴,\tilde{D}) = \frac{۶۱}{۱۵۳}$, $S(G_۴,\tilde{F}) = \frac{۱۳۴}{۲۲۰}$

لذا $g_۴$ برابربا F است. پس

$$
\begin{aligned}
\text{نمره‌کل‌از۱۰۰} &= \\
&\frac{۱}{۱۰۰}[۲۰ \times ۶۰ + ۴۰ \times ۸۰ + ۱۰ \times ۶۰ + ۳۰ \times ۱۵] \\
&= ۵۴/۵
\end{aligned}
$$

تذکر ۳.۱

الف — در این روش ممکن است ارزیابِ هر سؤال متفاوت باشد.

ب — در این روش ممکن است جمع کل امتیاز هر سؤال یعنی $\sum_{i=۱}^{n} T(Q_i)$ برابر ۱۰۰ نباشد.

ج — اگر امتیاز همه‌ی سؤالات مساوی باشند استفاده از عملگرهای همسوساز مشبکه‌ای نیز امکان دارد، که در

زیر به آن می پردازیم.

۲ — روش ارزیابی مشبکه‌ای

این روش را ابتدا برای حالتی که امتیاز همه‌ی سئوالات مساوی باشد ارایه می‌دهیم. برای این کار با انتخاب یک زنجیر مناسب L برای نمرات و انتخاب یک جدول مناسب برای همسوساز h به‌راحتی یک ورقه‌ی نمره‌ی مشبکه‌ای به‌صورت زیر می‌سازیم.

شماره سؤال	نمره امتحانی به صورت عنصری از L
Q_1 سؤال اول	a_1
Q_2 سؤال دوم	a_2
$\vdots$	$\vdots$
Q_n سؤال nام	a_n
نمره‌کل $= h(a_1, \ldots, a_n)$	

حال در صورتی که نمره، عددی مورد نظر باشد با استفاده از جدول مشابه جدول ۳.۱، این عددی‌سازی را انجام می‌دهیم.

مثال ۳.۲. فرض کنید L زنجیر نمرات و h همسوساز ارایه شده در مثال ۲.۲ از مقاله [۱۹] به‌صورت شکل ۳ باشند.

فرض کنید سؤالها دارای امتیاز مساوی بوده و امتحان فقط چهار سؤال داشته باشد. اگر ورقه‌ی نمره‌ی مشبکه‌ای را به‌صورت شکل زیر به‌دست آورده باشیم:

شماره سؤال	نمره امتحانی به صورت عنصری از L
Q_1 سؤال اول	b
Q_2 سؤال دوم	c
Q_3 سؤال سوم	d
Q_n سؤال n ام	1
نمره‌کل $= h(b, c, d, 1) =$ کمی‌خوب	

محاسبه‌ی نمره‌ی کل با استفاده از جدول همسوساز در شکل ۲.۳.۲(ب) به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} h(a, b, c, 1) &= h(h(b, c, d), 1) \\ &= h(b, c, d) \\ &= h(b, h(c, d)) \\ &= h(b, c) \\ &= c \end{aligned}$$

که در آن c معادل کمی خوب است.

تذکر ۳.۲ روش ارزشیابی مشبکه‌ای را می‌توان در حالتی که بارم سؤالها یکسان نباشند نیز به‌کار برد. این تعمیم را در تعریف ۴.۲ آورده‌ایم.

۴ روشهای ارزشیابی تعمیم یافته

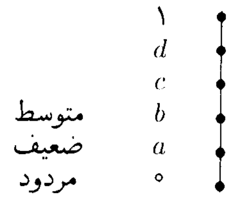
در این بخش روشهای معرفی شده در بخش ۳ را تعمیم می‌دهیم. برای این منظور ابتدا روش [۲] را ارایه می دهیم و به تعریف یک ورقه‌ی نمره‌ی مشکک تعمیم یافته می‌پردازیم.

تعریف ۴.۱ یک ورقه‌ی نمره‌ی مشکک تعمیم یافته، یک فرم ماتریسی به صورت شکل ۴ است.

در شکل ۴ برای هر سؤال Q_i چهار نمره مشکک G_{ij} منظور می‌کنیم که در آن نمره محصل را در روی ورقه به‌صورت زیر در نظر می گیریم:

- G_{i1} نمره مشکک برای دقت،
- G_{i2} نمره مشکک برای وسعت معلومات،
- G_{i3} نمره مشکک برای رعایت اختصار،
- G_{i4} نمره مشکک برای وضوح مطلب.

به‌علاوه g_{ij} و $T(Q_i)$ همان معانی قبلی خود را در تعریف ۳.۳ دارند و روش محاسبه نمره کل، همان روند ارزشیابی مشکک



(الف) زنجیر نمرات L

h	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	a	c	c	a
b	۰	a	b	c	c	b
c	۰	c	c	c	c	c
d	۰	c	c	c	d	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

(ب) جدول همسوساز

شکل ۳

شماره سؤال	نمره امتحانی G_{ij} مشکک تعمیم یافته	نمره الفبایی	نمره عددی	$T(Q_i)$ امتیاز سؤال iام
Q_1 سؤال اول	G_{11} G_{12} G_{13} G_{14}	g_{11} g_{12} g_{13} g_{14}	m_1	
Q_2 سؤال دوم			m_2	
	$\vdots$			
Q_n سؤال nام			m_n	$\sum_{i=1}^{n} T(Q_i)$
$m_i = \frac{1}{400} T(Q_i) \sum_{j=1}^{4} P(g_{ij})$		$\sum m_i =$ نمره از ۱۰۰		

شکل ۴: ورقه‌ی نمره‌ی مشکک تعمیم یافته

است که بعد از تعریف ۳.۳ ارایه شد.

به عنوان مثال برای یک سؤال Q_i، نمره امتحانی مشکک تعمیم یافته می تواند به صورت زیر باشد:

شماره سؤال	نمره امتحانی مشکک تعمیم یافته G_{ij}					
Q_i سؤال iام	۱	۰/۸	۰/۶	۰	۰	۰
	۰/۲	۰/۵	۰/۹	۰	۰	۰
	۰	۰/۵	۰/۷	۰/۳	۰/۱	۰
	۰/۲	۰/۵	۰/۹	۰/۸	۰/۶	۰

تذکر ۴.۱. تعداد مؤلفه‌های نمره سؤال Q_i لزوماً نباید چهار باشد و می تواند k تا به‌صورت G_{ij} باشد که $j = 1, 2, \ldots, k$. در این صورت مقدار m_i نیز به‌صورت

$$m_i = \frac{1}{100k} T(Q_i) \sum_{j=1}^{k} P(g_{ij})$$

حساب می شود.

روش دیگری که می توان به‌کار برد روش ارزشیابی مشبکه‌ای است که در تعریف زیر بیان می کنیم.

تعریف ۴.۲. یک ورقه‌ی نمره‌ی مشبکه‌ای تعمیم یافته در مشبکه L، یک فرم ماتریسی به صورت شکل ۵ است.

که د رآن h یک همسوساز در مشبکه مفروض نمرات L است. به‌علاوه g_i نمره‌ی الفبایی متناظر با $h(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ است. روش محاسبه نمره‌ی کل، مانند روند ارزشیابی مشکک است.

$T(Q_i)$ امتیاز سؤال	m_i نمره عددی	g_i نمره‌الفبایی سؤال	نمره همسوشده سؤال	G_{ij} نمره‌امتحانی سؤال از L	شماره‌سؤال
$T(Q_1)$	m_1	g_1	$h(a_{11},\ldots,a_{1k})$	a_{11} a_{12} $\vdots$ a_{1k}	Q_1 سؤال اول
$T(Q_2)$	m_2	g_2		a_{21} $\vdots$ a_{2k}	Q_2 سؤال دوم
				$\vdots$	
$T(Q_n)$	m_n	g_n	$h(a_{n1},\ldots,a_{nk})$	$\vdots$	Q_n سؤال n ام
$m_i = \frac{1}{100}T(Q_i)\sum_{i=1}^{k} P(g_{ij})$ ، نمره‌کل $= \sum_{i=1}^{n} m_i$					

شکل ۵: ورقه نمره مشبکه‌ای تعمیم یافته

۵ نتیجه گیری

در این مقاله عموماً دو روش برای نمره دادن به اوراق امتحانی را مطرح کردیم. روش اول روش ارزشیابی با استفاده از نمره‌های امتحانی مشکک است. در این روش هر کدام از نمره‌ها بایستی به‌صورت یک مجموعه مشکک بیان شود و سپس روند ارزشیابی برای به‌دست آوردن نمره کل انجام گیرد. این روش در مقاله [۲] پیشنهاد شده است. روش دوم ارزشیابی با استفاده از نمره‌های امتحانی مشبکه‌ای است. در ابتدا حالتی را که همه‌ی سؤالها دارای امتیاز یکسانی بودند، بررسی کردیم. سپس در انتهای مقاله این روش را به حالتی که سؤالها دارای امتیاز متفاوت بودند تعمیم دادیم. در هر دو روش به‌کار بردن نرم‌افزار تهیه شده‌ی مناسب، ضروری به نظر می‌رسد. یادآوری این نکته نیز ضروری است که روشهای دیگری برای ارزشیابی، توسط سایر پژوهشگران ارایه شده است که مقاله های آنان در مراجع آمده است. در هر حال اعتبار و قابلیت همه این روشها را بایستی در عمل ملاحظه کرد.

مراجع

[1] W.Amin and Zhou Mao Ren Zeng, *A study on the application of neural network in fuzzy comprehensive evaluation*, BUSEFAL 69(1996/1997), 192-200.

[2] R. Biswas, *An application of fuzzy sets in students' evaluation*, Fuzzy Sets and Systems 74(1995), 187-194.

[3] H. Bustince and P. Burillo, *Correlation of intrval-valued intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 74(1995), 237-244.

[4] Z. Bao-yu, *The study of judgmatic method of fuzzy evaluation of anaerobic threshold about exercise load of cardio-pulmontary function*, BUSEFAL 67(1996), 109-112.

[5] C-K. Law, *Using fuzzy numbers in educational grading system* , Fuzzy Sets and Systems 83(1996), 311-323.

[6] L. Guitting, *A mathematical model of evaluation on quality of book*, BUSEFAL 37(1988), 158-161.

[7] M. Mashinchi and Sh. Salili, *A System selection method*, The international conference on application of fuzzy system, ICAFS-94, Editors R. A. Aliev and R. Kenarangui, Tabriz University Press, Iran, (1994), 250-253.

[8] D-L. Mon, C-H. Cheng and J-C. Lin, *Evaluating weapon systen using fuzzy analytic hierarchy process based on entropy weight*, Fuzzy Sets and Systems 62(1994), 127-134.

[9] National Council Teachers of mathematics, *Curriculum and Evaluation: Standards for school mathematics*, NCTM, Reston, Va, 1992.

[10] S. Rulin, *The study of fuzzy evaluation method about soft targets of physical constitution of the students*, BUSEFAL 63(1995), 90-95.

[11] S. Rulin, *The study of fuzzy evaluation method about sport of general university*, BUSEFAL 63(1995), 113-116.

[12] G-P. Trajkovski and Biljana Janeva, *Towards a standardized personal fuzzy criterion for student evaluation*, Proceedings of Seventh IFSA Word Congress, Prague (1997), 62-67.

[13] Wen-June Wang, *New similarity measures on fuzzy sets and on elements*, Fuzzy Sets and Systems 85(1997), 305-309.

[14] Xie Sheng-xian, *Theory of interval-valued fuzzy comprehensive evaluation and its application to teaching competition*, BUSEFAL 70(1997), 85-93.

[15] Xu Lai Yun, *Fuzzy evaluation of teaching level of physical teachers*, BUSEFAL 44(1990), 172-180.

[16] Zhang Zezeng and Zhao Qingli, *The fuzzy judgment on the quality of the university department refrence room*, BUSEFAL 69(1996/1997), 201-207.

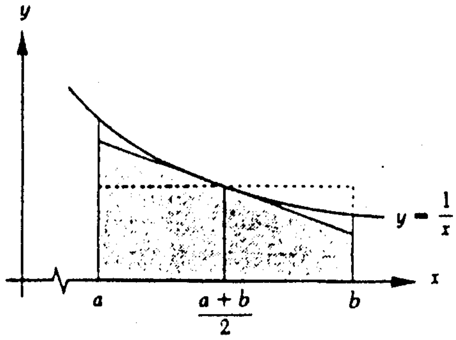
[17] Zhang Zezeng, *The mathematical model for evaluating students' ability and level and its application*, BUSEFAL 71(1997), 111-116.

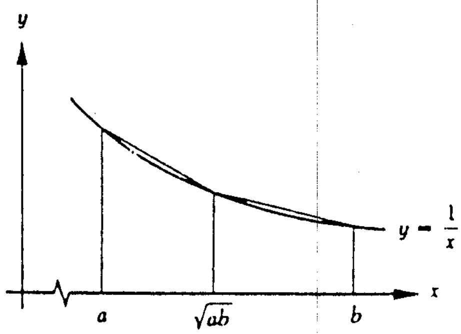
[18] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. and Control 8 (1995), 338-353.

[۱۹] ماشاالله ماشین‌چی، معدل‌گیری ازداده‌های نادقیق ، اندیشه آماری، شماره ۴، سال ۱۳۷۶، صفحات ۳۰–۲۳.

[۲۰] علی‌اکبر سیف، اندازه‌گیری و ارزیابی پیشرفت تحصیلی، مؤسسه انتشارات آگاه، چاپ سیزدهم، زمستان ۱۳۷۶.

اثبات صوری نابرابری میانگینهای حسابی و هندسی





$$\ln b - \ln a > \frac{2}{a+b}(b-a) \qquad \ln b - \ln a < \frac{ab-a^2}{2a\sqrt{ab}} + \frac{b^2-ab}{2b\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b-\ln a} \qquad \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a}$$

$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b-\ln a} > \sqrt{ab}$$

تذکر : تقریبهای نقصانی و اضافی انتگرال را به ترتیب از طریق مساحت مستطیلها و ذوزنقه ها حساب کنید.

اقتباس از مجلهٔ :

College Mathematics Journal V. 24, no. 2 (March 1993), P. 165
Roger B. Nelsen
Lewis and Clark College
Portland, OR 92719