

## توزیع متغیرهای تصادفی مرکب

محمدحسین علامت‌ساز<sup>۱</sup>

## چکیده

هدف اصلی این مقاله، معرفی توزیع متغیرهای تصادفی مرکب تعمیم یافته (یا توزیع مجموعه‌های متوقف شده‌ی متغیرهای تصادفی)، بررسی خصوصیات توزیعی و بحث در مورد کاربردهای آنهاست. به علاوه، کاربرد این توزیع‌ها در رابطه با خاصیت مهم و معروف بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری مورد توجه قرار گرفته و نتایج مفیدی در این زمینه نشان داده خواهد شد. سرانجام، رابطه‌ی بین توزیع‌های مرکب و توزیع‌های آمیزه‌ای تشریح می‌گردد و نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان یکی را به دیگری تبدیل نمود و نتایج مفیدی به دست آورده می‌شود. به‌ویژه، با این روش نتیجه‌ای از علامت‌ساز (۱۹۹۶) در رابطه با بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری توزیع‌های آمیزه‌ای دوجمله‌ای، تعمیم داده می‌شود.

## ۱ مقدمه

دوجمله‌ای  $\text{nbm}(n, p)$  خواهد بود. در مورد کاربردهای آن، کافی است به نقش آن در قانون اعداد بزرگ و یا قضیه‌ی حد مرکزی اشاره نمود.

همه با مجموعه‌های جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (i.i.d)

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

در مقاله‌ی حاضر، با حالت تعمیم یافته‌ی این مجموعه‌های جزئی از متغیرهای تصادفی i.i.d سرو کار داریم که در آن  $n$ ، یک عدد ثابت نیست، بلکه خود مشاهده‌ای تصادفی از یک متغیر تصادفی نامنفی  $N$  با مقادیر صحیح در نظر گرفته

آشنا هستیم و توزیع و کاربردهای آن را می‌دانیم. مثلاً، می‌دانیم که اگر توزیع مشترک  $X_i$  ها برنولی با پارامتر  $p$  باشد  $S_n$  دارای توزیع دوجمله‌ای  $\text{bin}(n, p)$  می‌باشد و اگر  $X_i$  ها دارای توزیع مشترک هندسی  $\text{Ge}(p)$  باشند،  $S_n$  دارای توزیع

<sup>۱</sup>دکتر محمدحسین علامت‌ساز، گروه آمار - دانشگاه اصفهان

می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، متغیرهای مرکب

عبارت دقیق‌تر، داریم :

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (2)$$

$$\text{negative binomial} = \text{poisson} \vee \text{logarithmic} \quad (4)$$

در حقیقت، خانواده‌ی توزیع‌های پواسون مرکب غالب توزیع‌های مرکب معروف را دربردارد. توزیع مرکب

را در نظر می‌گیریم.  $S_N$  را یک متغیر تصادفی مرکب یا تعمیم‌یافته (و یا مجموع متوقف شده‌ای از متغیرهای تصادفی) می‌نامند. فلر (۱۹۴۳) دو واژه‌ی اول و داگلاس (۱۹۷۱) واژه‌ی آخر را ترجیح می‌دهد. به هر حال چون واژه‌ی اول یعنی «مرکب» در زبان فارسی رایج‌تر است ما نیز خود را به استفاده از آن مقتد می‌سازیم.

$$Poisson(\lambda) \vee Bernulli(p) ; 0 < p < 1, \lambda > 0$$

به‌ویژه «در مدل‌های خسارت» مورد توجه می‌باشد. این ترکیب در واقع به توزیع پواسون با میانگین  $\lambda p$  منجر می‌شود. بعضی مثال‌های مهم دیگر توزیع‌های پواسون مرکب به شرح زیر هستند:

الف) توزیع پواسون-پاسکال :

$$Poisson(\theta) \vee \text{negative binomial}(r, p)$$

نمایش نمادین توزیع این متغیرها به شرح زیر که توسط گارلند (۱۹۵۷) ارایه شده است، مورد توافق اکثر آمار دانان است. فرض کنید  $F_1$  نشان‌دهنده‌ی توزیع مشترک  $X_i$  ها باشد. در این صورت، توزیع  $S_N$  با نماد  $F_1 \vee F_2$  نشان داده می‌شود که آن را «ترکیب توزیع  $F_1$  با  $F_2$ » می‌خوانیم. به عبارت دیگر، داریم :

ب) توزیع نیمین نوع A :

$$Poisson(\lambda) \vee Poisson(\theta)$$

$$S_N \sim F_1 \vee F_2 \quad (3)$$

که در آن  $F_2$  توزیع پواسون انتقال یافته با تکیه گاه  $\{1, 2, 3, \dots\}$  است. این توزیع به نام توزیع توماس مشهور است.

مثال‌های زیادی از موقعیت‌های واقعی وجود دارند که در آنها متغیرهای مرکب رخ می‌دهند. برای مثال، فرض کنید  $X_i$  نشان‌دهنده‌ی میزان پول (یا وقت) مشتری  $i$  ام باشد که در یک فروشگاه صرف می‌کند و  $N$  تعداد تصادفی مشتریان این فروشگاه در روز را نشان دهد. در این صورت،  $S_N$  نمایشگر میزان تصادفی پول (یا وقت) است که توسط تمام مشتریان در یک روز در این فروشگاه صرف می‌شود.

ج) توزیع پواسون-دوجمله‌ای :

$$Poisson(\lambda) \vee \text{binomial}(n, p)$$

حالت خاص این توزیع مرکب وقتی  $n = 2$  باشد، توزیع هرمیت نامیده می‌شود.

واضح است بسته به این که  $X_i$  ها گسسته یا پیوسته باشند متغیر مرکب  $S_N$  گسسته یا پیوسته خواهد بود. یکی از انواع مشهور توزیع‌های مرکب وقتی رخ می‌دهد که  $F_1$  پواسون باشد. این توزیع‌ها به توزیع‌های پواسون مرکب معروفند. به طوری که مثال ۱ از بخش ۲ نشان می‌دهد، به سادگی دیده می‌شود که توزیع دوجمله‌ای منفی نیز یک توزیع پواسون مرکب است. به

د) توزیع پولیا-اپلی :

$$Poisson(\theta) \vee \text{Geometric}(p)$$

واضح است که این توزیع حالت خاصی از توزیع مرکب پواسون پاسکال است. اینجا، متغیر هندسی به عنوان تعداد آرمایسها تا اولین شکست در نظر گرفته شده است.

## ۲ توزیع $S_N$

فرض کنید  $M(t)$  و  $M_T(t)$  به ترتیب توابع مولد گشتاورهای  $S_N$  (m.g.f) و  $X_i$  و  $G_N(z)$  تابع مولد احتمال (p.g.f) متغیر تصادفی  $N$  باشد. آنگاه، واضح است که با توجه به خواص امید ریاضی شرطی داریم:

$$\begin{aligned} M(t) &= E\{e^{tS_N}\} \\ &= E\{E(e^{tS_N}|N)\} \\ &= E\left\{\prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})\right\} \\ &= E\{[M_T(t)]^N\} \\ &= G_N[M_T(t)] \end{aligned} \quad (6)$$

بدیهی است که اگر  $F_T$  نیز توزیع گسسته‌ای با تکیه گاه اعداد صحیح نامنفی و تابع مولد احتمال  $G_T(z)$  باشد، آنگاه  $S_N$  متغیری گسسته با p.g.f

$$G(z) = G_N[G_T(z)] \quad (7)$$

خواهد بود.

لازم است خاطر نشان کنیم که داگلاس (۱۹۸۰) حالتی را که در آن  $F_N$  نیز پیوسته است در نظر می‌گیرد. اما، در این حالت مسلماً مدل، معنای فیزیکی خود را از دست می‌دهد.

### مثال ۱ - توزیع مرکب

$$Poisson(-r \ln p) \vee \text{logarithmic}(\lambda - p) \quad ; \quad 0 < p < \lambda$$

$$r > 0$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:

$$G_N(z) = e^{(-r \ln p)(z-1)} \quad \text{و} \quad G_T(z) = \frac{\ln(\lambda - qz)}{\ln p};$$

$$q = \lambda - p$$

در نتیجه بنابر (۷) به دست می‌آوریم:

$$G(z) = \exp\left\{-r \ln p \left[\frac{\ln(\lambda - qz)}{\ln p} - 1\right]\right\}$$

توزیع‌های مرکب، به طور عام، و توزیع‌های پواسون مرکب، به طور خاص، کاربردهای مهمی در توصیف موقعیت‌های واقعی دارند. برای مطالعه‌ی این کاربردها، مثلاً به جانسون، کوتز و کمپ (۱۹۹۲) مراجعه کنید. توزیع‌های مرکب پواسون همچنین نقش مهمی در ارتباط با توزیع‌های بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر ایفا می‌کنند. توزیع‌های مرکب برنولی نیز کاربردی اساسی در معرفی توزیع‌های خودتجزیه‌پذیر و پایای گسسته‌ی ون هارن و استیوتال (۱۹۷۹) دارند. این توزیع‌های گسسته نیز بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند. در بخش ۳ به خاصیت بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری توزیع‌های مرکب پرداخته و نتایج مفیدی به دست خواهد آمد. در بخش ۴، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان توزیع‌های مرکب را به توزیع‌های آمیزه‌ای و بالعکس تبدیل نمود. سپس با استفاده از آن نتیجه‌ای از علامت‌ساز (۱۹۹۶) در این زمینه را تعمیم خواهیم داد.

سرانجام، در اینجا لازم است خاطر نشان شود که همانند حالت فرایندهای خسارت که قبلاً ذکر شد، مجموع‌های متوقف شده‌ی متغیرهای تصادفی (۲) در فرایندهای تصادفی نیز کاربرد مشابهی دارند. فرایند تصادفی

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

را که در آن  $X_i$  ها متغیرهای تصادفی i.i.d و  $N(t)$  یک فرایند شمارشی مستقل از  $X_i$  ها است، یک فرایند تصادفی مرکب می‌گویند. فرآیندهای پواسون مرکب (یعنی وقتی که  $N(t)$  در (۵) یک فرآیند پواسون باشد) از توجه خاصی برخوردارند (مثلاً به راس (۱۹۹۶) مراجعه کنید). در میان دیگران، اخیراً علامت‌ساز و لین (۱۹۹۸) در مورد خاصیت مهم خودمشابهی این فرآیندهای مرکب تحقیق کرده و شرایطی را که تحت آنها  $Y(t)$  می‌تواند به نوعی خودمشابه باشد به دست آورده‌اند. خودمشابهی، نقش مهمی در تحلیل داده‌ها دارد. برای توصیف کامل این نوع فرآیندها، علامت‌ساز (۱۳۷۶) را ملاحظه نمایید.

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_N) &= \lambda \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \lambda = \frac{2\lambda}{\mu^2} \\ M(t) &= G_N\left[\frac{\mu}{\mu-t}\right]; \quad t < \mu \\ &= \exp\left\{\lambda\left[\frac{\mu}{\mu-t}\right]\right\}; \quad t < \mu \\ &= \exp\left\{\frac{\lambda t}{\mu-t}\right\}; \quad t < \mu \quad (10) \end{aligned}$$

لازم به تذکر است که اگر تعداد مشتریهای این سیستم در طول روز ثابت و مثلاً  $N = n$  باشد، آنگاه  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  دارای توزیع گامای  $\gamma(n, \mu)$  بوده و در این صورت کمیت‌های بالا در (۱۰) به ترتیب به صورتهای متفاوت  $n/\mu^2$ ،  $n/\mu$  و  $(\frac{\mu}{\mu-t})^n$  در خواهند آمد.

### ۳ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری

خانواده‌ی بزرگ و معروفی از توزیع‌ها، توزیع‌های بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند. متغیر تصادفی  $X$  با تابع مولد گشتاورهای  $M(t)$  بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است؛ اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح و مثبت  $n$  تابع مولد گشتاورهایی چون  $M_n(t)$  موجود باشد به طوری که برای  $t \in \mathbb{R}$  بتوان نوشت:

$$M(t) = [M_n(t)]^n \quad (11)$$

به عبارت دیگر،  $M(t)$  یک m.g.f بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $M_n(t) = [M(t)]^{1/n}$  نیز یک m.g.f باشد. به طور مشابه، برحسب p.g.f، متغیر تصادفی  $X$  بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر  $G_n(z) = [G(z)]^{1/n}$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  یک p.g.f باشد. حال یک توزیع پواسون مرکب دلخواه با نرخ  $\lambda$  را در نظر بگیرید. m.g.f آن عبارت است از:

$$M(t) = G_N[M_T(t)] = \exp\{\lambda[M_T(t) - 1]\}.$$

پس، برای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$[M(t)]^{1/n} = \exp\left\{\frac{\lambda}{n}[M_T(t) - 1]\right\} = M_n(t)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left\{-r \ln\left[\frac{1-qz}{p}\right]\right\} \\ &= \left(\frac{1-qz}{p}\right)^{-r}; \quad |z| < \frac{1}{q} \end{aligned}$$

که آن p.g.f توزیع دوجمله‌ای منفی  $\text{nbm}(r, p)$  است ( $r > 0$ ) لازم نیست عدد صحیح باشد). و این رابطه‌ی (۴) را تأیید می‌کند.

برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس  $S_N$  مشابه با روابط (۶) مجدداً می‌توان از خاصیت امید ریاضی شرطی سود جست و یا مستقیماً با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاورهای (۶) در نقطه‌ی  $t = 0$  به دست آورد:

$$E(S_N) = E[NE(X_1)] = E(X_1) E(N) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E(S_N^2) &= E[N(N-1)E^2(X_1) + NE(X_1^2)] \\ &= E(N) \text{Var}(X_1) + E(N^2)E^2(X_1) \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\text{Var}(S_N) = E(N) \text{Var}(X_1) + E^2(X_1) \text{Var}(N) \quad (9)$$

معادله‌ی (۸) در واقع حالت خاصی از «معادله‌ی والد» است.

مثال ۲ - یک سیستم صف M/M/1 را در نظر بگیرید؛

یعنی سیستمی که دارای یک سرویس‌دهنده است،  $N$ ، تعداد مشتریهای ورودی آن در طول روز که از توزیع پواسون با نرخ  $\lambda$  پیروی می‌کند و  $X_i$ ، طول زمان سرویس مشتری  $i$  ام، که دارای توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{\mu}$  است. در این صورت، متغیر تصادفی مرکب  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  نشان‌دهنده‌ی طول کل دوره‌ی زمانی تصادفی است که این سرویس‌دهنده در روز مشغول خواهد بود. پس داریم:

$$S_N \sim \text{Poisson}(\lambda) \vee \exp(\mu)$$

و در نتیجه بنابر روابط (۶)، (۸) و (۹) میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاورهای زمان اشتغال سرویس‌دهنده عبارت خواهند بود از:

$$E(S_N) = (\lambda) \cdot \frac{1}{\mu} = \lambda/\mu$$

و در نتیجه، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  می توان نوشت :

$$G^{1/n}(z) = M^{1/n}[M_1^{-1}(z)] \quad (12)$$

اما  $M^{1/n}$  بنابر فرض یک m.g.f است، پس طرف راست (۱۲) نیز یک m.g.f بوده و در نتیجه  $G^{1/n}(z)$  یک p.g.f خواهد بود. بنابراین توزیع  $F_1$  بی نهایت بار تقسیم پذیر است. بدین ترتیب قضیه ی زیر را اثبات کرده ایم.

**قضیه ۳ -** اگر  $F_1$  بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد، توزیع مرکب  $F_1 \vee F_2$  نیز بی نهایت بار تقسیم پذیر خواهد بود. بالعکس، اگر  $F_1 \vee F_2$  بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد و  $F_2$  دارای m.g.f یک به یک باشد، آنگاه  $F_1$  نیز بی نهایت بار تقسیم پذیر خواهد بود.

**قضیه ۳** را می توان به این صورت نیز بیان کرد که اگر  $F_2$  دارای m.g.f یک به یک باشد،  $F_1 \vee F_2$  بی نهایت بار تقسیم پذیر است اگر و فقط اگر  $F_1$  بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد.

**فرع ۱ -** تمام توزیع های مرکب هندسی بی نهایت بار تقسیم پذیرند.

**اثبات -** چون  $F_1$  هندسی است و این توزیع بی نهایت بار تقسیم پذیر است، نتیجه بلافاصله از قضیه ی ۳ حاصل می شود.

**فرع ۲ -** فرض کنید  $F_2$  توزیع دوجمله ای  $bin(m, p)$  باشد که در آن  $m$  یک عدد صحیح مثبت فرد است.  $F_1 \vee F_2$  بی نهایت بار تقسیم پذیر است اگر و فقط اگر،  $F_1$  بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد.

**اثبات -** چون تابع مولد گشتاورهای توزیع  $bin(m, p)$  با  $m$  فرد، تابعی یک به یک است، نتیجه بلافاصله از قضیه ی ۳ حاصل می شود.

یک m.g.f است (در واقع، تابع مولد گشتاورهای یک توزیع پواسون مرکب با پارامتر  $\lambda/n$  است). بنابراین، هر توزیع پواسون مرکب، گسسته یا پیوسته، بی نهایت بار تقسیم پذیر است. به علاوه، در حالت توزیع های بی نهایت بار تقسیم پذیر با تکیه گاه  $N$  می توان نشان داد که عکس این مطلب نیز صحت دارد. یعنی داریم :

**قضیه ۱ -** یک توزیع گسسته با تکیه گاه  $N$  بی نهایت بار تقسیم پذیر است اگر و فقط اگر یک توزیع پواسون مرکب باشد. برای اثباتی مقدماتی در مورد عکس این قضیه، فلر (۱۹۷۵) را ملاحظه کنید. دوفیتی (۱۹۳۱)، به طور کلی تر، ثابت می کند که :

**قضیه ۲ -** هر توزیع بی نهایت بار تقسیم پذیر یا یک توزیع پواسون مرکب است و یا صورتی حدی از چنین توزیع هایی است.

حال فرض پواسون بودن توزیع  $F_1$  را حذف کرده و تنها به خاصیت بی نهایت بار تقسیم پذیری آن بسنده می کنیم. یعنی این بار فرض کنید  $F_1$  یک توزیع بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد. در این صورت، بنابر تعریف برای هر  $m \in \mathbb{N}$   $G^{1/n}(z)$  یک p.g.f است. در نتیجه :

$$M^{1/n}(t) = G^{1/n}[M_2(t)]$$

نیز برای هر  $n \in \mathbb{N}$  یک m.g.f است (در واقع، یک متغیر مرکب). بنابراین، در این حالت نیز توزیع مرکب  $F_1 \vee F_2$  بی نهایت بار تقسیم پذیر است. بالعکس، فرض کنید توزیع مرکب  $F_1 \vee F_2$  بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد و فرض کنید که  $z = M_2(t)$  تابعی یک به یک از  $t$  باشد به طوری که  $t = M_1^{-1}(z)$  به طور منحصر به فرد موجود باشد. در این صورت از (۶) داریم :

$$M[M_1^{-1}(z)] = G_1(z)$$

فرض کنید  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  به ترتیب توزیع‌های  $N$ ،  $N$  و  $N$  و  $S_n$  (برای  $N = n$  داده شده) باشند. آنگاه توزیع مرکب  $F_1 \vee F_2$  یا توزیع آمیزه‌ای  $F_1 \bigwedge F_2$  معادل است. یعنی داریم:

$$F_1 \vee F_2 = F_2 \bigwedge F_1.$$

حال سؤالی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که آیا برعکس هم می‌توان عمل کرد، یعنی آیا می‌توان یک توزیع آمیزه‌ای را به یک توزیع مرکب معادل تبدیل کرد؟ گارلند (۱۹۵۷) پاسخ این سؤال را در قضیه‌ای به صورت زیر ارایه می‌دهد.

**قضیه ۴ -** فرض کنید  $F_1$  و  $F_2$  توزیع‌های گسسته‌ای با تکیه‌گاه  $N$  و توابع مولد احتمال  $G_1$  و  $G_2$  باشند. اگر  $G_2$  به پارامتری چون  $\phi$  به گونه‌ای وابسته باشد که برای هر  $k \in \mathbb{N}_0$  داشته باشیم:

$$G_2(z; k\phi) = [G_1(z; \phi)]^k \quad (13)$$

آنگاه:

$$F_2 \bigwedge F_1 = F_1 \vee F_2$$

اثبات این قضیه به سادگی با استفاده از شرط (۱۳) به صورت زیر می‌باشد. فرض کنید

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned} G(z; \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k G_1(z; k\phi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k [G_1(z; \phi)]^k \\ &= G_1(G_1(z; \phi)). \end{aligned}$$

## ۴ ارتباط توزیع‌های مرکب با توزیع‌های آمیزه‌ای

هرگاه  $F_1$  به پارامتر (یا پارامترهایی) چون  $\theta$  وابسته باشد که در آن  $\theta$  خود مشاهده‌ای از یک متغیر تصادفی  $(\theta)$  با توزیع  $F_2$  است، توزیع حاصل را که با نماد  $F_1 \bigwedge F_2$  نشان می‌دهیم آمیزه توزیع  $F_1$  با توزیع  $F_2$  می‌خوانیم. مثلاً اگر در توزیع  $N \sim bin(N, p)$  متغیری تصادفی با توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد توزیع حاصل عبارت است از:

$$bin(N, p) \vee Poisson(\lambda).$$

حال توزیع مرکب  $F_1 \vee F_2$  را در نظر بگیرید و فرض کنید که  $F_2$  توزیع برنولی با پارامتر  $p$  باشد. در این صورت، بدیهی است که داریم:

$$S_N \sim bin(N, p)$$

که در آن  $N$  خود یک متغیر تصادفی است. به عبارت دیگر، توزیع مرکب:

$$F_1 \vee Bernulli(p)$$

با توزیع آمیزه‌ای

$$bin(N, p) \bigwedge F_1$$

معادل است. اما چون  $Bernulli(p) = bin(1, p)$ ، اما چون  $F_1 = Bernulli(p) = bin(1, p)$  در آن  $m = 1$  فرد است، نتیجه‌ی زیر از علامت‌ساز (۱۹۹۶) را به عنوان نتیجه‌ای از فرع ۲ از بخش ۳ به دست می‌آوریم. **فرع ۲ -** توزیع آمیزه‌ای دوجمله‌ای  $bin(N, p)$  بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر، متغیر آمیزنده‌ی آن،  $N$ ، بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد.

استدلال بالا را به سهولت می‌توان عمومیت داد و تمام توزیع‌های مرکب را به صورت توزیع‌های آمیزه‌ای درآورد.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (q + pz)^{nk} \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [(q + pz)^n]^k \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} \\
&= e^{-\theta} [(q + pz)^n - 1] \\
&= G_1[G_2(z)] \quad (14)
\end{aligned}$$

پس چون p.g.f. های توزیع دوجمله‌ای، پوآسون و دوجمله‌ای منفی شرط (۱۳) را برقرار می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که تمام آمیزه‌های گسسته‌ی توزیع‌های پوآسون، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی را می‌توان به صورت توزیع‌های مرکب معادل در نظر گرفت.

### مثال ۳ - توزیع آمیزه‌ای

که در آن  $G_1$  تابع مولد احتمال توزیع  $Poisson(\theta)$  و  $G_2$  تابع مولد احتمال توزیع  $bin(n, p)$  است. به عبارت دیگر، (۱۴) نتیجه می‌دهد که:

$$bin(nK, p) \bigwedge_K Poisson(\theta) = Poisson(\theta) \vee bin(n, p).$$

$$bin(nK, p) \bigwedge_K Poisson(\theta)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nk)! p^x q^{nk-x}}{x!(nk-x)!} \cdot \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!}$$

$$G(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nk)! p^x q^{nk-x}}{x!(nk-x)!} \cdot \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} z^x$$

## مراجع

[۱] علامت‌ساز، م.ح. (۱۳۷۶)، فرایندهای خودمشابه، اندیشه آماری، سال دوم، شماره ۲، ۳۱-۳۵.

- [2] Alamatsaz, M. H. (1996), *Preservation Properties of binomial mixtures*, Pak. J. Statist. 12(2).
- [3] Alamatsaz, M. H. and Y. Xia Lin (1998), *Self-similarity under compounding*, Pak. J. Statist. 14(1).
- [4] De Finetti B. (1931), *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VI, 11, 259-65.
- [5] Douglas J. B. (1971), *Stirling numbers in discrete dist's. Statistical Ecology I: spatial patterns and statistical distributions*, 69-98, University Park, Pennsylvania State University Press.
- [6] Douglas J. B. (1980), *Analysis with standard contiguous dist's*, Brutonsville, MD: International Co-operative Publishing House.
- [7] Feller W. (1943), *On a general class of "contiguous dist's"*, Annals Math. Statist. 11, 389-400.

- [8] Feller W. (1957), *An Introduction to Probability theory and its applications*", 1, New York, Wiley.
- [9] Gurland J. (1957), *Some interrelations among Compound and generalized dist's*, Biometrika, 44, 265-268.
- [10] Johnson N. L., S. Kotz, and A. M. Kemp (1992), *Univariate discrete distributions.*, 2nd ed., New York, Wiley.
- [11] Khatri C. G., and I. R. Patel (1961), *Three classes of univariate dist's*, Biometrics, 17, 567-575.
- [12] Ross Sh. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd ed., New York, Wiley.
- [13] Steutel F. W., and K. Van Harn (1979), *Discrete analogues self-decomposability and stability*, Ann. Prob. 7, No. 5, 893-899.

تعداد مقالات و کتب منتشر شده توسط آمارشناسان معروف

| نام    | سال ۱ | سال ۲ | سال ۳ | سال ۴ | سال ۵ | سال ۶ | سال ۷ | جمع ۷ سال اول | جمع ۲۰ سال اول | کل  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|----------------|-----|
| اولر   | ۱     | ۲     | ۵     | ۱     | ۱     | ۰     | ۰     | ۱۰            | ۴۱             | ۵۶۰ |
| توکی   | ۲     | ۲     | ۲     | ۱     | ۲     | ۰     | ۱     | ۱۰            | ۹۵             | ۳۹۶ |
| فیشر   | ۱     | ۱     | ۱     | ۲     | ۱     | ۱     | ۲     | ۹             | ۹۴             | ۲۹۴ |
| رابینز | ۱     | ۰     | ۲     | ۰     | ۱     | ۴     | ۱     | ۹             | ۴۳             | ۱۳۳ |
| لهمن   | ۱     | ۳     | ۱     | ۲     | ۵     | ۵     | ۳     | ۱۰            | ۴۸             | ۱۲۲ |
| باکس   | ۲     | ۰     | ۱     | ۱     | ۱     | ۲     | ۴     | ۱۱            | ۶۱             | ۱۲۰ |

نقل از مقاله:

" Publication Delays in Statistics Journals "

E. T. Bradlow, H. Wainer, Chance, Vol. II-No. 1 (1998)