معدل‌گیری از داده‌های نادقیق

ماشاالله ماشین‌چی*

چکیده

در زندگی روزمره با اطلاعاتی مواجه می‌شویم که در قالب مفاهیم نادقیق بیان شده‌اند و نه با اعداد. در صورتی که اطلاعات برحسب اعداد باشند، می‌توان با روشهای رایج آماری آنها را معدل‌گیری کرد. در این مقاله دو روش برای معدل‌گیری داده‌های نادقیق ارائه می‌کنیم. در یک روش، داده‌های نادقیق را به صورت عناصری از یک مشبکه تلقی کرده و سپس عمل معدل‌گیری را توسط یک همسوساز در این مشبکه انجام می‌دهیم. در روش دیگر، ابتدا داده‌های نادقیق را در قالب مجموعه‌های مشکک مدل‌سازی کرده و سپس آنها را با استفاده از اصل توسیع معدل‌گیری می‌کنیم. در هر دو روش برای معدل‌گیری به یک همسوساز مناسب نیاز داریم که این مفهوم را در اینجا معرفی کرده و خواصی از آن را بررسی می‌کنیم. با ارائهٔ چند مثال به بیان دو روش می‌پردازیم تا عیب و حسن و همین طور چگونگی کاربرد روشها آشکار گردد.

۱ مقدمه

در بسیاری از مسائل آماری، اقتصادی و روزمره با اطلاعاتی مواجه می‌شویم که نیاز به معدل‌گیری آنها داریم. در صورتی که این داده‌ها به صورت عدد بیان شوند توسط معیارهای تمرکز مثل میانگین حسابی، میانگین هندسی، میانگین هارمونیک و غیره، که در علم آمار به خوبی شناخته شده‌اند، می‌توان دادها را به اصطلاح همسو کرد و عمل معدل‌گیری را انجام داد [۱]. امّا در بسیاری از موارد داده‌های به دست آمده از نوع عددی نیستند و اغلب به صورت مفاهیم نادقیق [۳ و ۲] مثل: خیلی خوب، متوسط، حول و حوش ۱۸ و غیره در دسترس قرار می‌گیرند. به طور نمونه این مطلب در مکالمات روزمره بسیار مشهود است و بیشتر اطلاعاتی که بین افراد رد و بدل می‌شود از نوع نادقیق‌اند. با این همه ما از این اطلاعات هم استنتاجهای مناسبی را انجام می‌دهیم. مورد دیگری که می‌توان اشاره کرد، این است که اصولاً جمع‌آوری داده‌های عددی ممکن نیست، مانند آمار بلایای طبیعی در یک منطقهٔ دور افتاده یا در مواردی که پاسخ دهندگان رغبت کمتری به دادن اطلاعات دقیق عددی داشته باشند مانند تهیه آمار دربارهٔ میزان درآمد افراد. سرانجام در مواردی تهیهٔ داده‌های نادقیق آسانتر و کم‌خرج‌تر است. لذا در این مقاله فرض می‌کنیم که داده‌های مفروض نادقیق‌اند و می‌خواهیم این داده‌ها را همسو کرده و معدل آنها را به دست آوریم. بنابراین سؤال این است که چگونه می‌توان این معدل‌گیری را انجام داد؟

در این مقاله ما دو روش برای انجام معدل‌گیری ارائه می‌کنیم. در یک روش فرض می‌کنیم که داده‌های ما دارای یک ساختار مشبکه‌ای [۱۵] مناسب‌اند یا از یک مشبکهٔ مناسب بایستی انتخاب شوند. سپس با ارائهٔ مفهوم یک همسوساز روی این مشبکه‌ها معدل‌گیری را انجام می‌دهیم. لذا در این روش داده‌های نادقیق صرفاً به عنوان عناصری از یک مشبکه تلقی می‌شوند. البته روش استفاده از مشبکه‌ها برای استنتاج از مفاهیم نادقیق اخیراً توسط برخی نویسندگان [۵،۴] ارائه شده و نشان داده شده که چنانچه این مفاهیم نادقیق به طریق مناسبی انتخاب شوند، دارای ساختارهای مشبکه‌ای جالبی به نام جبر پرچین (hedge algebra) می‌باشند. ما در اینجا به نحوی از این ایده استفاده کرده‌ایم. در روش دیگر مفاهیم نادقیق را

*) دکتر ماشاالله ماشین‌چی، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

به صورت مجموعه‌های مشکّک [۲] مدل‌سازی می‌کنیم و سپس با استفاده از اصل توسیع به همسوسازی اطلاعات و معدل‌گیری آنها می‌پردازیم. در هر حال در هر دو روش نیازمندیم تا مفهوم همسوساز را معرفی کنیم. لذا در این مقاله ابتدا همسوسازهای مشبکه‌ای را معرفی کرده و سپس برخی همسوسازهای خاص مثل میانگین تعمیم‌یافته، معدل‌گیری وزنی و معدل‌گیر ترتیبی را نیز ارائه می‌کنیم. این همسوسازهای آخر اخیراً به طور وسیعی مورد مطالعه و استفاده قرار گرفته‌اند [۶-۱۳]. در این مقاله با ارائهٔ چند مثال به بیان دو روش می‌پردازیم تا عیب و حسن و همین طور چگونگی کاربرد دو روش را آشکار نماییم.

۲ عملگر همسوساز مشبکه‌ای[1]

فرض کنید از سه استاد در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو سؤال کنیم و آنان پاسخهای خود را به صورتهای نادقیق: خوب، تقریباً خوب و یا کم و بیش خوب بیان کنند. حال می‌خواهیم بدانیم که وضعیت این دانشجو روی هم رفته چطور است؟ برای بررسی مسائلی نظیر این موضوع نیاز به عملگرهای همسوساز مشبکه‌ای داریم که در این بخش به معرفی آنها می‌پردازیم.

فرض کنید $(L, \leq, \wedge, \vee)$ یک مشبکه [۱۵] باشد، که در صورت نیاز و بدون تذکر فرض می‌کنیم L دارای کوچکترین عنصر ۰ و بزرگترین عنصر ۱ است. به عنوان مثال $(p(X), \subseteq, \cap, \cup)$ یک مشبکه است، که در آن X یک مجموعهٔ ناتهی، $p(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X است و به علاوه $\subseteq$، $\cap$ و $\cup$ به ترتیب نمادهای زیرمجموعه بودن، اشتراک و اجتماع هستند. بدین ترتیب در این مشبکه عنصر ۰ همان مجموعه تهی $\emptyset$ و عنصر ۱ همان مجموعهٔ X است. خواننده برای مطالعه در خصوص مشبکه‌ها و مثالهای دیگر می‌تواند به [۱۷،۱۵] مراجعه کند.

مشبکه $(L^n, \leq, \wedge, \vee)$ را که در آن $L^n = L \times \ldots \times L$ حاصلضرب دکارتی n نسخه، n عددی طبیعی، از L است می‌توان به طور طبیعی ساخت. بنابراین ترتیب روی L^n از ترتیب روی L به طور مؤلفه‌ای القاء می‌شود و به ازای هر $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in L^n$ به ترتیب $\wedge, \vee$ را به صورت $\underline{a} \wedge \underline{b} = (a_1 \wedge b_1, \ldots, a_n \wedge b_n)$ و $\underline{a} \vee \underline{b} = (a_1 \vee b_1, \ldots, a_n \vee b_n)$ روی L^n تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ هر تابع $h : L^n \longrightarrow L$ را یک عملگر همسوساز وابسته به مشبکه L، یا به طور مختصر یک همسوساز گوییم.

در واقع یک همسوساز عبارت است از عملی n-تایی روی مشبکه L.

تذکر ۱.۲ اگر فرض کنیم که $h : L^2 \longrightarrow L$ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی L باشد، آنگاه با فرض

$$h(a, b, c) = h(a, h(b, c)), \forall a, b, c \in L$$

می‌توان h را به یک همسوساز روی L توسیع داد.

طبیعی است که هر عمل n-تایی h روی L نمی‌تواند یک همسوساز مناسب برای عمل معدل‌گیری باشد. برای به‌دست آوردن یک همسوساز جالب بایستی شرایطی معقول را بر h اعمال کرد. در اینجا با الهام گرفتن از خواص میانگین حسابی به عنوان یک همسوساز، شرایط زیر را اعمال می‌کنیم که در صورت نیاز به هرکدام از آنها در جای خود به ذکر آن می‌پردازیم.

ش ۱. $h(1, 1, \ldots, 1, 1) = 1, h(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$

ش ۲. اگر $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in L^n$ به طوری که $\underline{a} \leq \underline{b}$ یعنی $a_i \leq b_i$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ آنگاه $h(\underline{a}) \leq h(\underline{b})$. به عبارتی h به طور یکنوا صعودی است.

ش ۳. h متقارن است. یعنی برای هر $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ داریم

$$h(a_1, \ldots, a_n) = h(a_{p(1)}, \ldots, a_{p(n)})$$

که در آن p یک تابع جایگشت روی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ است.

ش ۴. h خود توان[2] است. یعنی به ازای هر $a \in L$ داریم

$$h(a, \ldots, a, a) = a$$

تذکر ۲.۲ با توجه به ش ۴ می‌بینیم که در این حالت ش ۱ نتیجه می‌شود.

به عنوان مثال، تعداد زیادی از همسوسازهای محسوس را می‌توان ارائه کرد. از جمله میانگین تعمیم یافته که در بخش ۱.۳ و معدل‌گیر وزنی که در بخش ۲.۳ ارائه شده‌اند. امّا دستهٔ دیگری از همسوسازها را که کاربرد زیادی نیز دارند، و به نام نُرمهای مثلثی مشبکه‌ای نیز معروف‌اند، به لحاظ نیاز در تعریف زیر ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ تابع $f : L \times L \longrightarrow L$ را در یک Lt- نرم گوییم، اگر دارای خواص زیر باشد

۱) $f(x, 1) = x$ به ازای هر $x \in L$؛

۲) $f(y, x) = f(x, y)$ به ازای هر $x, y \in L$؛

۳) اگر $y \leq z$ آنگاه $f(x, y) \leq f(x, z)$ به ازای هر $x, y, z \in L$؛

۴) f شرکت‌پذیر است، یعنی $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ به ازای هر $x, y, z \in L$.

1) Lattice aggregation operator
2) idempotent

در تعریف فوق f را یک Ltـ هم‌نرم گوییم، اگر به جای خاصیت (۱) فرض زیر برقرار باشد:

(۱′) $f(x,0)=x$ به ازای هر $x\in L$.

Ltـ نرمها و Ltـ هم نرم را نرمهای مثلثی مشبکه‌ای گوییم. حال با توجه به شرکتپذیری یک نرم مثلثی مشبکه‌ای و تذکر ۱.۲ می‌توان از هر نرم مثلثی مشبکه‌ای یک همسوساز ساخت که در ش ۱ ـ ش ۳ صدق می‌کند.

به عنوان مثال، چنانچه مشبکه ما $([0,1],\le,\min,\max)$ باشد، در این صورت اگر f یکی از اعمال دوتایی min (مینیمم)، max (ماکسیمم)، prod (حاصلضرب) روی بازه [۰، ۱] باشد، آنگاه f در هر حالت یک نرم مثلثی روی بازهٔ حقیقی [۰، ۱] است که در آن $\le$ رابطهٔ کوچکتر یا مساوی معمولی روی اعداد حقیقی است. البته مثالهای زیاد دیگری از نرمهای مثلثی می‌توان ارائه کرد که علاقه‌مندان می‌توانند به [۱۴] مراجعه نمایند. برای حالتی که مشبکه L زنجیر شکل ۲ است جدول ۱ مثالی از یک نرم مثلثی روی L است که متفاوت با ۸، ۷ است. خواننده می‌تواند مثالهای متفاوت دیگری را نیز به دست آورد، چنانچه یک نرم مثلثی مشبکه‌ای در ش ۴ صدق کند آنگاه قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۱.۲ فرض کنید f یک نرم مثلثی مشبکه‌ای باشد. آنگاه $f(a,a)=a$ به ازای هر $a\in L$ اگر و فقط اگر $f=\wedge$ یا $f=\vee$.

اصولاً نرمهای مثلثی دسته خاصی از همسوسازها هستند که کاربرد وسیعی در تعریف اعمال اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌های مشکّک دارند [۱۴]. اما در حالت کلی می‌توان قضیهٔ جالب زیر را در مورد هر همسوساز دلخواه ارائه کرد که این همسوساز را به دو همسوساز خاص ۸، ۷ روی مشبکهٔ L محدود می‌کند.

قضیه ۲.۲ فرض کنید $h: L^n \longrightarrow L$ یک همسوساز باشد. اگر h در ش ۲ و ش ۴ صدق کند آنگاه به ازای هر $a_1,\dots,a_n\in L$،

$$a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_n\le h(a_1,a_2,\dots,a_n)\le a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n \qquad (1)$$

به علاوه چنانچه یک همسوساز h در نامساوی (۱) صدق کند آنگاه h حتماً دارای خاصیت خودتوانی ش ۴ است.

برهان. فرض کنید h در ش ۲ و ش ۴ صدق کند. آنگاه با فرض

$$a^*=a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n,\qquad a_*=a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_n$$

به راحتی می‌توان دید که

$$a_*=h(a_*,\dots,a_*)\le h(a_1,\dots,a_n)\le h(a^*,\dots,a^*)=a^*$$

یعنی h در نامساوی (۱) صدق می‌کند. به علاوه اگر یک تابع همسوساز h در نامساوی (۱) صدق کند، آنگاه داریم

$$a=a\wedge a\wedge\dots\wedge a\le h(a,\dots,a)\le a\vee a\vee\dots\vee a=a$$

بنابراین $h(a,\dots,a)=a$ و لذا خود توان است و ش۴ برقرار است.

تذکر ۲.۳ با توجه به قضیهٔ ۱.۲ ملاحظه می‌شود که کرانهای بالا و پایین نامساوی (۱) در قضیهٔ ۲.۲ تنها عملگرهای همسوساز در کلاس نرمهای مثلثی مشبکه‌ای هستند که دارای هر چهار شرط ش۱ ـ ش۴ می‌باشند. به علاوه اگر قرار دهیم

$$\mathrm{Min}(a_1,\dots,a_n)=a_1\wedge a_2\wedge\dots,\wedge a_n,$$

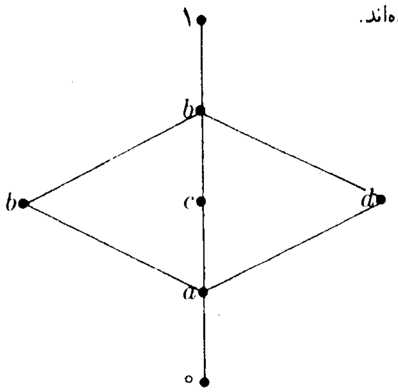
$$\mathrm{Max}(a_1,\dots,a_n)=a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n$$

آنگاه با توجه به خاصیت مشبکه‌ها، $\mathrm{Min}\le\mathrm{Max}$ و به علاوه با توجه به قضیه ۲.۲ هر همسوساز h که بین دو همسوساز $\mathrm{Min},\mathrm{Max}$ قرارگیرد حتماً خودتوان است. بنابراین هر همسوساز روی L از Min قویتر و از Max ضعیفتر است.

به منظور کاربرد همسوساز مشبکه‌ای به ارائهٔ دو مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۲ فرض کنید نظر سه استاد را در مورد وضعیت یک دانشجو سؤال کرده‌ایم. این استادان پاسخهای خود را به صورت نادقیق: خوب (d)، تقریباً خوب (c) و کم و بیش خوب (b) بیان کرده‌اند. حال می‌خواهیم بدانیم وضعیت تحصیلی این دانشجو روی هم رفته چطور است؟

فرض کنید نظر هر سه استاد هم ارزش است و به علاوه به طور ذهنی فرض می‌کنیم که نمرات ارائه شده عناصری از یک مشبکه‌اند. در اینجا با کمی دقت این طور استنباط می‌کنیم که نمرات d,c,b در این مشبکه قابل مقایسه نیستند. لذا با این برداشتها مشبکهٔ L را که در شکل ۱ آمده است برای مطالعهٔ این مسأله چنین در نظر می‌گیریم که در آن مابقی عناصر به صورت بسیار خوب (۱)، خوب (e)، کمی خوب (a) و چنین نیست خوب (۰) تعبیر شده‌اند.



شکل ۱ .مشبکه نمرات L که بر اساس داده‌ها ساخته شده است.

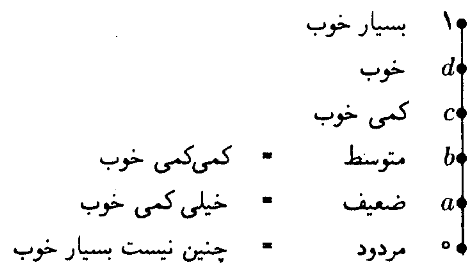
حال مسأله برمی‌گردد به اینکه یک همسوساز $h : L^2 \longrightarrow L$ که مناسب این مدل‌سازی باشد، به دست آوریم به طوری که حتی‌الامکان در همهٔ شرایط ش۱ـش۴ صدق کند. اگر فرض کنیم که $h = \mathrm{Min}$ در این صورت

$$h(b,c,d) = \mathrm{Min}(d, \mathrm{Min}(c,d))$$
$$= \mathrm{Min}(b,a) = a = \text{(با توجه به تعریف) کمی خوب}$$

در این مسأله می‌توان گفت که همسوساز Min یک انتخاب بدبینانه است زیرا که ما در معدل‌گیری بدترین حالت را مدنظر قرار داده‌ایم و در مقابل همسوساز Max یک انتخاب خوشبینانه است، زیرا که در این حالت متمایل به ملاحظهٔ حالتهای بهتر هستیم. لذا ممکن است انتخابهای دیگری از همسوسازها، مدل‌سازی بهتری از مسأله را ارائه دهد.

در مثال ۱.۲ ما ارائه نمره توسط سه استاد را آزاد قرار دادیم. در حالی که ممکن است مشبکهٔ نمره‌های خود را از ابتدا مشخص کنیم و سپس هر نمره‌ای را تنها به عنوان انتخابی از این مشبکه در نظر بگیریم. در مثال بعدْ ما این روش را به کار می‌بریم.

مثال ۲.۲ فرض کنید که نمرات فقط می‌توانند از یک مشبکه، که تشکیل یک زنجیر متناهی [۱۵] می‌دهند، انتخاب شوند. یعنی همهٔ نمرات با هم قابل مقایسه‌اند. ما در این مثال زنجیر L را به صورت شکل ۲ در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۲. مشبکه نمرات L که از قبل ساخته شده است.

حال مانند مثال ۱.۲ از سه استاد می‌خواهیم تا نظرشان را در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو بیان کنند ولی این دفعه مقید به انتخاب از عناصر زنجیر Lاند.

فرض کنید پاسخ آنان به صورت خوب (d)، کمی خوب (c) و متوسط (b) باشد. حال می‌خواهیم معدل نظریات این استادان را در مورد این دانشجو به دست آوریم. مجدداً بایستی یک همسوساز مناسب برای این معدل‌گیری انتخاب کنیم. در اینجا با قدری کاوش عمل دوتایی $h : L^2 \longrightarrow L$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

جدول ۱

h	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	a	c	c	a
b	۰	a	b	c	c	b
c	۰	c	c	c	c	c
d	۰	c	c	c	d	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

حال با توجه به شرکتپذیری عمل h روی L می‌توانیم به راحتی آن را به یک همسوساز $h : L^3 \longrightarrow L$ توسیع دهیم. این همسوساز دارای همهٔ خواص ش۱ ـ ش۴ است و با همسوسازهای Max و Min فرق می‌کند. مثلاً $\mathrm{Min}(a,c) = a$ در حالی که $h(a,d) = c$. اما به هر حال طبق قضیهٔ ۲.۲ داریم $\mathrm{Min} \leq h \leq \mathrm{Max}$. حال با توجه به h معدل نظرات برابر است با:

$$h(b,c,d) = h(b, h(c,d)) = h(b,c) = c = \text{کمی خوب}$$

که نتیجه معقولی است. امّا روی هم رفته معدل‌گیری توسط این همسوساز همه جا رضایت‌بخش نیست. به عنوان مثال معدل ضعیف، متوسط، و کمی خوب به صورت زیر است

$$h(a,b,c) = h(a, h(b,c)) = h(a,c) = c = \text{کمی خوب}$$

که شاید نتیجه جالبی نباشد.

تذکر ۲.۴ همسوسازهای ارائه شده در مثالهای ۱.۲ و ۲.۲ ممکن است قانع کننده نباشند ولی ارائهٔ آنها نشان دهندهٔ روش استفاده از آنهاست و همان‌طور که ملاحظه شد ما با داده‌های نادقیق صرفاً به صورت عناصر یک شبکه برخورد کرده‌ایم. البته انتخاب این مشبکه‌ها می‌تواند بسیار منطقی صورت گیرد. چنانچه اخیراً در مقالات [۵،۴] این روش برای استدلال تقریبی توسط مفاهیم نادقیق به کار رفته و نشان داده شده که مفاهیم نادقیق مورد بحث در صورتی که مناسب انتخاب شوند دارای ساختار مشبکه‌ای جالبی به نام جبرپرچین[1] هستند. در اینجا ذکر یک نکته لازم است که هنوز برنگارنده کاملاً روشن نیست که اگر داده‌های نادقیق هموزن نباشند آنگاه انتخاب h در مثالهای ۲.۲ و ۱.۲ چگونه بایستی صورت گیرد؟ که خود نیاز به تحقیق بیشتر دارد.

1) hedge algebra

۳ برخی همسوسازهای خاص

اگر L مشبکهٔ اعداد حقیقی R^+ یا بازهٔ $[\circ, ۱]$ باشد، که رابطهٔ $\leq$ روی L همان ترتیب معمولی روی اعداد حقیقی است و ۸، ۷ نیز همان توابع min و max روی اعداد حقیقی‌اند، آنگاه نماد L_* را به جای L به کار می‌بریم. با این فرض داده‌های بیان شده در L_* به صورت اعداد حقیقی خواهند بود که برای معدل‌گیری آنها می‌توان از معدل‌گیرهای معمولی استفاده کرد. در این بخش ما به شرح این گونه همسوسازها می‌پردازیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند به مقاله‌های [۶-۱۳] و کتاب [۱۴] مراجعه کند.

۱.۳ میانگین تعمیم‌یافته[۱]

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید همسوساز $h_\alpha : L_*^n \longrightarrow L_*$ به صورت زیر تعریف شود:

$$h_\alpha(a_۱, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_۱^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{۱/\alpha} \qquad (۲)$$

که در آن پارامتر $\alpha \in R$ و $\alpha \neq \circ$ و در حالتی که $\alpha < \circ$ فرض می‌کنیم که همهٔ a_iها مخالف صفرند. در این صورت h_α را میانگین تعمیم‌یافته گوییم. به علاوه h_α دارای خواص زیر است:

۱) اگر $\alpha < \circ$، $a_i \longrightarrow \circ$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ آنگاه $h_\alpha(a_۱, \ldots, a_n)$؛

۲) اگر $\alpha \longrightarrow \circ$ آنگاه $\lim_{\alpha \to \circ} h_\alpha(a_۱, \ldots, a_n) = (a_۱ \ldots a_n)^{۱/n}$، یعنی در این حالت مقدار حد همان میانگین هندسی است؛

۳) $\lim_{\alpha \to -\infty} h_\alpha(a_۱, \ldots, a_n) = \min(a_۱, \ldots. a_n)$؛

۴) $\lim_{\alpha \to +\infty} h_\alpha(a_۱, \ldots, a_n) = \max(a_۱, \ldots, a_n)$؛

۵) اگر $\alpha = -۱$ آنگاه $h_{-۱}(a_۱, \ldots, a_n) = \frac{n}{۱/a_۱ + \cdots + ۱/a_n}$ میانگین هارمونیک است؛

۶) اگر $\alpha = ۱$ آنگاه $h_۱(a_۱, \ldots, a_n) = \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n}$ میانگین حسابی است؛

۷) h_α در ش۴ صدق می‌کند.

۲.۳ معدل‌گیری وزنی[۲]

دسته‌ای از همسوسازها به نام معدل‌گیر وزنی‌اند. برای تعریف این معدل‌گیرها همان طور که از نام آنها برمی‌آید، باید وابسته به یک بردار وزن باشند.

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنید $\underline{w} = (w_۱, \ldots, w_n) \in [\circ, ۱]^n$. اگر $\sum_{i=۱}^n w_i = ۱$ آنگاه $\underline{w}$ را یک بردار وزنی گوییم.

تعریف ۲.۲.۳ فرض کنید $\underline{w} \in [\circ, ۱]^n$ یک بردار وزنی مفروض باشد. همسوساز $h_{\underline{w}} : L_*^n \longrightarrow L_*$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود یک معدل‌گیر وزنی گوییم:

$$h_{\underline{w}}(a_۱, \ldots, a_n) = \sum_{i=۱}^n w_i a_i$$

دستهٔ خاصی از معدل‌گیرهای وزنی را می‌توان در قضیه زیر مشخص کرد.

قضیه ۱.۲.۳ فرض کنید همسوساز $h : L_*^n \longrightarrow L_*$ پیوسته باشد و در ش۴ و شرط مرزی $h(\circ, \circ, \ldots, \circ) = \circ$ صدق کند. به علاوه فرض کنید برای هر $a_i, b_i \in L_*$ که $a_i + b_i \in L_*$ داریم:

$$h(a_۱ + b_۱, \ldots, a_n + b_n) = h(a_۱, \ldots, a_n) + h(b_۱, \ldots, b_n)$$

آنگاه h یک معدل‌گیر وزنی است.

برهان. $h_i : L_* \longrightarrow L_*$ را به صورت $h_i(x) = h(\circ, \ldots, \circ, x, \ldots, \circ)$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ که در آن x در iامین مکان است تعریف می‌کنیم. تابع h_i، به لحاظ پیوستگی h، پیوسته است و به ازای هر $x, y \in L_*$ که $x + y \in L_*$ داریم:

$$h_i(x + y) = h_i(x) + h_i(y) \qquad (۳)$$

حال با استفاده از شرط مرزی روی h داریم $h_i(\circ) = \circ$. معادله (۳) یک معادله تابعی کوشی [۱۶] است که از حل آن داریم:

$$h_i(x) = w_i x$$

که در آن $x \in L_*$ و $\circ < w_i = h_i(۱)$، به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$. لذا

$$\begin{aligned} h(a_۱, \ldots, a_n) &= h(a_۱, \circ, \ldots, \circ) + h(\circ, a_۲, \circ, \ldots, \circ) \\ &\quad + \cdots + h(\circ, \circ, \ldots, \circ, a_n) \\ &= h_۱(a_۱) + h_۲(a_۲) + \cdots + h_n(a_n) \\ &= w_۱ a_۱ + \cdots + w_n a_n \\ &= \sum_{i=۱}^n w_i a_i \end{aligned}$$

1) generalized mean
2) weighted averaging

چون h در ش۴ صدق می‌کند بنابراین $\underline{w}$ یک بردار وزنی است زیرا به ازای $a \neq 0$ داریم

$$a = h(a, \dots, a) = \sum_{i=1}^{n} w_i a = a \sum_{i=1}^{n} w_i$$

پس $\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i = 1$ و بنابراین $h = h_{\underline{w}}$ معدل‌گیری وزنی وابسته به بردار $\underline{w}$ است.

۳.۳ معدل‌گیری وزنی ترتیبی [1]

در این حالت بایستی معدل‌گیر به دست آمده اولاً وزنی باشد و ثانیاً یک نوع ترتیب در آن ملاحظه شود. برای این منظور تعریف دسته‌ای از این معدل‌گیرها را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱.۳.۳ فرض کنید $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0,1]^n$ یک بردار وزنی باشد. همسوساز $h_{\underline{w}} : L_*^n \longrightarrow L_*$ را معدل‌گیری وزنی ترتیبی گوییم، اگر

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = w_1 b_1 + \cdots + w_n b_n$$

که در آن بردار $(b_1, \dots, b_n)$ بردار نزولی به دست آمده از بردار $(a_1, \dots, a_n)$ است. یعنی b_iها همان a_iها مرتب شده‌اند که $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. برای روشن شدن تعریف مثلاً اگر

$$\underline{w} = (0/3, 0/1, 0/2, 0/4)$$

آنگاه

$$h_{\underline{w}}(6, 9, 2, 7) = 0/3 \times 9 + 0/1 \times 7 + 0/2 \times 6 + 0/4 \times 2$$

$h_{\underline{w}}$ دارای خواص زیر است:

۱) اگر $\underline{w} = (0, \dots, 0, 1)$ آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \min(a_1, \dots, a_n)$$

۲) اگر $\underline{w} = (1, 0, \dots, 0)$ آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \dots, a_n)$$

۳) اگر $\underline{w} = (1/n, \dots, 1/n)$ آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

۴) اگر $\underline{w}$ یک بردار وزنی دلخواه باشد آنگاه $h_{\underline{w}}$ در ش۴ صدق می‌کند.

۴ مدل‌سازی مفاهیم نادقیق توسط مجموعه‌های مشکک و همسوسازی آنها

در بخش ۲، داده‌ها به عنوان عناصری صرف از یک مشبکه تلقی شدند و سپس روی آنها عمل همسوسازی انجام شد. برخی اوقات می‌توان ابتدا داده‌ها را به صورت مجموعه‌های مشکک مدل‌سازی کرد و سپس روی آنها عمل همسوسازی را انجام داد [۳،۲]. برای این منظور ابتدا یک تعریف، برخی نمادها و سپس اصل توسیع را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴ $\tilde{A} : X \longrightarrow L$ را که در آن X مجموعه‌ای ناتهی و L یک مشبکه است یک Lـ زیرمجموعهٔ X گوییم. $\tilde{A}(x)$ را به عنوان میزان عضویت x در $\tilde{A}$ تعبیر می‌کنیم. در حالتی که L مشبکهٔ $[0,1]$ باشد، $\tilde{A}$ را یک زیرمجموعهٔ مشکّک X گوییم.

در صورتی که $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ متناهی باشد، Lـ مجموعهٔ $\tilde{A}$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n} \qquad (4)$$

که در آن $\frac{\tilde{A}(x)}{x}$ بدین معنی است که میزان عضویت x در $\tilde{A}$ برابر با $\tilde{A}(x)$ است و معنی تقسیم نمی‌دهد. همین طور علامت + در (۴) برای نشان دادن تمامی عناصر و میزان عضویت آنها به کار رفته و به معنی جمع بین عناصر نیست. به علاوه فرض می‌کنیم:

$$F_L(X) = \{\tilde{A} \mid \tilde{A}\text{یک } L - \text{زیرمجموعهٔ } X\} = L^X$$

و اگر L مشبکه $[0,1]$ باشد آنگاه می‌نویسیم $F(X)$.

اصل توسیع. فرض کنید $f : X \times X \longrightarrow X$ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی مجموعهٔ X و $h : L^n \longrightarrow L$ یک همسوساز باشد. f یک تابع $\tilde{f}_h$ به صورت زیر القا می‌کند:

$$\tilde{f}_h \cdot L^X \times \dots \times L^X \longrightarrow L^X,$$

$$(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \mapsto \tilde{f}_h(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \tilde{f}_h(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)(z)$$

$$= \begin{cases} \sup_{z = f(x_1, \dots, x_n), x_i \in X} h(\tilde{A}_1(x_1), \dots, \tilde{A}_n(x_n)) & z \in X \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

این تابع جدید $\tilde{f}_h$ را توسیع f گوییم. روند فوق را اصل توسیع نامیم. در

1) ordered weighted averaging

اصل توسیع ملاحظه می‌شود که برای به دست آوردن $\tilde{f}_h$ نیاز به یک عملگر همسوساز داریم. چنانچه L شبکه $[۰, ۱]$ باشد، در این صورت بسته به نوع مسأله می‌توان h را میانگین تعمیم‌یافته در بخش ۱.۳ یا معدل‌گیر وزنی در بخش ۲.۳ انتخاب کرد. مثلاً ما در مثال ۱.۴ همسوساز خود را ساده‌ترین حالت یعنی $h(x,y) = \min(x,y)$ انتخاب کرده‌ایم. در حالی که در مثال ۲.۴ همسوساز h را همانند جدول ۱ گرفته‌ایم. اما در هر دو حالت خواننده می‌تواند همسوسازهای دیگری را جایگزین کند. حال برای روشن شدن مطلب به ارائه مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۴ فرض کنید نظر دو استاد را در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو سؤال کرده‌ایم. پاسخ آنان به صورت: خیلی خوب $(\tilde{A})$ و متوسط $(\tilde{B})$ بیان شده است. حال سؤال می‌شود معدل تحصیلی این دانشجو چیست؟

برای پاسخ به این سؤال ابتدا فرض می‌کنیم که $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$ که در آن $X = [۰, ۲۰]$ فضای نمره است. یعنی در اینجا نمره‌ها به صورت نادقیق‌اند اما مدل‌سازی آنها توسط مجموعه‌های مشکّک انجام شده که به صورت زیرند:

$$\tilde{A} = \frac{۰/۸}{۱۷} + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۰/۹}{۱۹}, \quad \tilde{B} = \frac{۰/۵}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۰/۵}{۱۷}$$

ملاحظه می‌کنیم که مدل‌سازی این مفاهیم گرچه با عقل سلیم مطابقت دارد ولی کاملاً ذهنی‌اند و بستگی به شخص و محیط تصمیم‌گیری دارند. مثلاً در اینجا $\tilde{A}$ به این معنی است که نمرهٔ دانشجو حول و حوش ۱۸ است و $\tilde{B}$ به معنی اینکه نمرهٔ دانشجو حول و حوش ۱۶ است. حال برای معدل‌گیری $\tilde{A}, \tilde{B}$ به صورت $\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{۲}$ از اصل توسیع استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم که $f(x,y) = \frac{x+y}{۲}$، $h(x,y) = \min(x,y)$ و $L = [۰, ۱]$ آنگاه با محاسبهٔ (۵) به راحتی می‌توان دید که

$$\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{۲} = \tilde{f}_h(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{۰/۵}{۱۶} + \frac{۰/۸}{۱۶/۵} + \frac{۱}{۱۷} + \frac{۰/۹}{۱۷/۵} + \frac{۰/۵}{۱۸}$$

بنابراین می‌توان، با توجه به مجموعهٔ مشکّک (۶)، گفت که نمره این دانشجو حول و حوش ۱۷ است.

مثال ۲.۴ در مثال قبل مدل‌سازی را در $F(X)$ انجام دادیم. فرض کنید که $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_L(x)$ که در آن $X = [۰, ۲۰]$ و L مشبکه مثال ۲.۲ است که در شکل ۲ ارائه شده است. حال $\tilde{A}, \tilde{B}$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\tilde{A} = \frac{b}{۱۷} + \frac{d}{۱۸} + \frac{c}{۱۹}, \quad \tilde{B} = \frac{a}{۱۵} + \frac{d}{۱۶} + \frac{c}{۱۷}$$

فرض کنید که $f(x,y) = \frac{x+y}{۲}$. به علاوه فرض کنید که همسوساز h روی L همانند مثال ۲.۲ باشد. در این صورت با استفاده از (۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{۲} = \tilde{f}_h(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{a}{۱۶} + \frac{c}{۱۶/۵} + \frac{c}{۱۷} + \frac{c}{۱۷/۵} + \frac{c}{۱۸}$$

لذا نتیجه‌ای که می‌توان ارائه کرد این است که با اطمینان نسبتاً خوب، نمره دانشجو در فاصلهٔ $[۱۶/۵, ۱۸]$ قرار دارد.

نتیجه‌گیری

با توجه به مثالهای ارائه شده می‌توان یکی از عیبهای روش استفاده از مدل‌سازی مفاهیم نادقیق توسط Lـ مجموعه‌ها و سپس معدل‌گیری آنها را در این دید که اصولاً معدل‌گیری توسط یک Lـ مجموعه در عمل مشکل است و بستگی به شخص و محیط تصمیم‌گیری دارد که مدل‌سازی را ناپایدار می‌کند. عیب دوم اینکه $\tilde{f}_h$ خودتوان نیست، یعنی همواره $\tilde{A} = \tilde{f}_h(\tilde{A}, \ldots, \tilde{A})$ نیست که این برخلاف انتظار است. این موضوع را می‌توان به راحتی در دو مثال ۱.۴ و ۲.۴ تحقیق کرد. اما در روش استفاده از عملگرهای همسوساز مشبکه‌ای و تلقی داده‌ها به صورت عناصر یک مشبکه با دو عیب ذکر شدهٔ قبل مواجه نیستیم. یعنی مشکل ناپایداری مدل‌سازی را نداریم و به علاوه با فرض خودتوانی h داریم که $h(a,a) = a$. در عوض عیب این روش این است که ساختن خود h مشکل است و به علاوه تاکنون روشی برای وزن‌دهی به داده‌ها موجود نیست و نیاز به تحقیق دارد.

مراجع

[۱] جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، بنیاد فرهنگی رضوی، ۱۳۶۸.

[۲] سید محمود طاهری، آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۷۵.

[۳] ماشاالله ماشین‌چی، ریاضیات مفاهیم نادقیق و سیستمهای هوشمند، گزارش کامپیوتر، شمارهٔ ۱ سال هیجدهم شماره پیاپی ۱۳۰، صفحات ۲۵-۳۰.

[4] N. Cat Ho and W. Wechler, Hedge algebras: An algebraic approach to structure of set of linguistic truth values, Fuzzy Set and Systems 35 (1990) 281-293.

[5] N. Cat Ho and W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 52 (1992) 259-281.

[6] R. R. Yager, Constrained OWA aggregaeion, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 89-101.

[7] R. R. Yager, Aggregation operators and fuzzy system modeling, Fuzzy Sets and Systems 67 (1994) 129-125.

[8] R. R. Yager, Families OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.

[9] R. R. Yager, Connective and quantifiers in fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 40 (1991) 39-76.

[10] R. R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation in multicriteria decision making LEEE Tran. Systems, Man Cybernet 18 (1988) 183-190.

[11] R. R. Yager, On mean type aggregation IEEE Tran. Systems, Man Cybernet Part B, 26 (1996) 209-326.

[12] H. Dyckhoff and W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[13] A. L. Ralescu and D. A. Ralescu, New concepts of fuzzy aggregation, Fuzzy Sets and Systems, to appear.

[14] G. J. Klir and Bo Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, Theory and Applications, Prentice Hall, 1995.

[15] G. Birkhoff, Lattice theory, American Mathematical Society, Providence, 1967.

[16] J. Aczel, Lectures on functional equation and their applications, Academic Press, New York, 1966.

[17] Vijay K. Khanna, Lattics and Boolean algebras, Vikas Publishing House PVT 1994.

این مقاله با حمایت مالی مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان تهیه شده است.