توزیع دونمایی: استفاده از حسابان برای یافتن یک برآورد کنندهٔ درستنمایی ماکسیمم

رابرت نورتون
ترجمهٔ مجتبی عطائی*

۱ مقدمه

هنگام یادگیری چگونگی به دست آوردن یک برآورد درستنمایی ماکسیمم برای پارامتری مجهول از یک تابع چگالی معلوم، دانشجویان وسوسه می‌شوند که پس از برابر صفر قرار دادن مشتق اول و حل آن، کار را متوقف کنند، به ویژه وقتی که مشتق مشکل پیچیده‌ای داشته باشد. گرچه دانشجویان از درس حسابان می‌دانند که یک تابع ممکن است در یک مقدار بحرانی، دارای ماکسیمم، مینیمم باشد یا هیچ یک از آنها اتفاق نیفتد. هدف از این مقاله ارائهٔ یک استدلال ماکسیمم‌سازی ساده در حد تمرین خاصی است که هر مدرس که از کتاب آمار ریاضی، هاگ[1] و کریگ[2]، استفاده می‌کند، با آن روبه‌رو می‌شود. این تمرینی است که دانشجویان اغلب آنرا مشکل می‌یابند.

۲ طرح مسأله و حل آن

مسأله مورد بحث این است: برآورد درستنمایی ماکسیمم برای θ را هنگامی که $X_1, X_2, \ldots, X_n$، نمونه‌ای تصادفی از چگالی

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|), \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

است، به دست آورید.

تابع درستنمایی $L(\theta)$ دارای لگاریتم طبیعی

$$\psi(\theta) = -n\ln 2 - \sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta| = -n\ln 2 - \sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\theta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

است. تابع ψ همه جا پیوسته است و به‌جز در $\theta = x_1, x_2, \ldots, x_n$، مشتق‌پذیر است. حال، وقتی مشتق موجود است،

$$\psi'(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\theta)^2\}^{\frac{1}{2}}(x_i-\theta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)/|x_i-\theta|,$$

که مجموعی از ۱ ها و ۱ـ ها است.

فرض کنید $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ آماره‌های مرتب مربوط به این نمونه را نشان دهد. برای $\theta < y_1$، $\psi'(\theta) = n$، زیرا برای هر i، $\frac{(x_i-\theta)}{|x_i-\theta|} = 1$. اگر $y_1 < \theta < y_2$، آنگاه $\psi'(\theta) = n-2$، در حالی که $y_2 < \theta < y_3$ آنگاه $\psi'(\theta) = n-4$ و غیره. نمودار ψ منحنی چند ضلعی شکل پیوسته‌ای است. حال به راحتی می‌توان دید که برای n فرد، ψ بر $(-\infty, y_{(n+1)/2}]$ اکیداً صعودی و بر $[y_{(n+1)/2}, \infty)$ اکیداً نزولی است، بنابراین در $\theta = y_{(n+1)/2}$ تابعهای ψ و L، ماکسیمم می‌شوند. اگر n زوج باشد، بالاترین نقاط روی نمودار L، روی پاره‌خط افقی

$$\{(\theta, L(\theta)) : y_{n/2} \le \theta \le y_{(n/2)+1}\}$$

قرار می‌گیرد. در نتیجه میانه نمونه‌ای، $\tilde{x}$، برآورد درستنمایی ماکسیمم برای θ است، به نظر دانشجویانی که به آنها درس داده‌ام، این استدلال برای مسأله مفید رسید. دانشجویانی که تشخیص می‌دهند مشتق مجموعی از ۱ هاو ۱ـ هاست، گاهی سعی می‌کنند مشتق را برابر صفر قرار دهند و استنتاج کنند که تعداد ۱ ها و ۱ـ ها باید برابر باشد و نتیجه می‌گیرند که میانه یک جواب است. با این حال این کار تنها برای nهای زوج معنی می‌دهد و در این صورت تنها می‌دانیم که $\tilde{x}$ یک مقدار بحرانی برای θ است، هنوز کار بیشتری باید انجام شود تا نشان دهیم که L در $\theta = \tilde{x}$ ماکسیمم می‌شود.

مراجع

اصل این مقاله در مجلهٔ
The American Statistician, May 1984, Vol. 38, No. 6
به چاپ رسیده است.

[1] Hogg, R. V., and (raig, A. T. (1978), *Introduction to Mathematical Statistics,* New York: Macmillan.

1) Hogg 2) Craig

*) دانشجوی کارشناسی‌ارشد آمار مؤسسه‌ی ریاضیات دکتر مصاحب دانشگاه تربیت معلم