

ماتریسها و احتمالات شرطی و کاربردهایی از آن

علی مشکانی*

۱ مقدمه

طرفین تساوی را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$A(BC) = AC$$

یا

$$(AB)C = AC = C$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$DC = C$$

پس D در (۲) صدق می‌کند و (۱) نیز آشکارا برقرار است. به ویژه اینکه هر توانی از P نیز یک ماتریس تصادفی است.

دو متغیر تصادفی گسسته X و Y را که به ترتیب دارای مقادیر ممکن $(a_1, a_2, \dots)$ و $(b_1, b_2, \dots)$ اند در نظر گرفته ماتریس تصادفی P ، با فرض $P(Y = b_j) > 0$ و بردارهای سطری A و B را تعریف می‌کنیم:

$$P = \begin{bmatrix} P(X = a_1 | Y = b_1) & P(X = a_2 | Y = b_1) & \dots \\ P(X = a_1 | Y = b_2) & P(X = a_2 | Y = b_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$B = [P(Y = b_1), P(Y = b_2), \dots],$$

$$A = [P(X = a_1), P(X = a_2), \dots]$$

قضیه زیر را داریم:

در این یادداشت پس از تعریف ماتریس تصادفی و ویژگیهای آن نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روابطی را که شامل احتمالات شرطی اند به کمک این نوع ماتریسها به اختصار نشان داد. سپس کاربردهایی از آن را بیان می‌کنیم.

ماتریس

$$P = [p_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (1)$$

را ماتریس تصادفی می‌نامیم اگر دارای دو ویژگی بنیادی زیر باشد:

(۱) درایه‌های آن نامنفی باشند، یعنی به ازای هر i و j ، $p_{ij} \geq 0$ ،

(۲) مجموع درایه‌های هر سطر برابر ۱ باشد، یعنی برای هر i ، $\sum_j p_{ij} = 1$.

ویژگی (۲) را با در نظر گرفتن بردار $C = [1, \dots]$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$PC = C \quad (2)$$

که نشان می‌دهد ۱، یک مقدار ویژه P و C یک بردار ویژه از راست متناظر با این مقدار است. از این دو خاصیت نتیجه می‌شود که

(۳) حاصلضرب دو ماتریس تصادفی یک ماتریس تصادفی است.

در واقع اگر A و B دو ماتریس تصادفی باشند و AB حاصلضرب

آنها برابر D فرض شود، داریم:

$$BC = C$$

* دکتر علی مشکانی، گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

X_n را به ازای n های مختلف پیدا کنید. به سادگی می توان روابط احتمال شرطی بین X_n و X_{n-1} را تعیین کرد. ماتریسی را که درایه (i, j) ام آن برابر $P[X_n = j | X_{n-1} = i]$ است، $P[X_n = j | X_{n-1} = i]$ ، در نظر می گیریم، این ماتریس برابر است با

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

برای $n = 2$ داریم:

$$[P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3)] \\ = [0, 0, 0, 1]P$$

و به طور کلی

$$[P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)] \\ = [0, 0, 0, 1]P^{n-1}$$

بعضی مقادیر محاسبه شده تابع احتمال X_n در جدول زیر درج شده است.

$P(X_n = i)$	۱	۲	۳	۴	۵
$P(X_n = 0)$	۰	۰	۰	$\frac{6}{64}$	$\frac{60}{256}$
$P(X_n = 1)$	۰	۰	$\frac{6}{16}$	$\frac{26}{64}$	$\frac{150}{256}$
$P(X_n = 2)$	۰	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{25}{256}$
$P(X_n = 3)$	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$

۲ کاربرد

در یک زنجیر مارکف نا همگن ماتریس احتمال تغییر وضعیت n قدمی را با

$$P_n = [p_{ij}(n)]$$

نشان می دهیم که در آن $p_{ij}(n) = P[Y_{n+1} = j | Y_n = i]$ همچنین بردار سطری

$$\Pi_n = [P(Y_n = i_1), P(Y_n = i_2), \dots] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

را تعریف می کنیم. بنا به قضایای فوق داریم:

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n P_n \quad (5)$$

که از آن نتیجه می شود:

$$\Pi_1 = \Pi \cdot P, \Pi_2 = \Pi \cdot P \cdot P_1, \dots, \Pi_{n+1} = \Pi \cdot P \cdot \dots \cdot P_n \quad (6)$$

قضیه. تابع احتمال متغیر تصادفی X از رابطه زیر به دست می آید:

$$A = BP \quad (3)$$

برهان. به ازای هر i داریم:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P[Y = b_j]P[X = a_i | Y = b_j] = P(X = a_i)$$

رابطه (۳) را می توان به بیش از دو متغیر تصادفی تعمیم داد. سه متغیر تصادفی X و Y و Z را در نظر می گیریم و علاوه بر بردارهای A و B و ماتریس P بردار $C = [P(Z = c_1), P(Z = c_2), \dots]$ و ماتریس

$$Q = \begin{bmatrix} P(Y = b_1 | Z = c_1) & P(Y = b_2 | Z = c_1) & \dots \\ P(Y = b_1 | Z = c_2) & P(Y = b_2 | Z = c_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

را تعریف می کنیم، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲. توزیع احتمال متغیر تصادفی X از رابطه زیر به دست می آید.

$$A = CQP \quad (4)$$

برهان. بنابر (۳)، $B = CQ$ ، با به کار بستن مجدد همین تساوی داریم،

$A = BP$ و از آنجا $A = CQP$ و $A = CQ$ و $A = CQP$ از همگرایی کلیه مجموعه ها

و نامنفی بودن درایه های ماتریسها در این محاسبات نتیجه می شود.

روابط (۳) و (۴) را می توان به سادگی به تعداد دلخواهی از متغیرهای

تصادفی تعمیم داد که برای توضیح آن به ذکر یک مثال می پردازیم.

مثال ۱. کیسه ای شامل دو گلوله سفید و یک گلوله سیاه است. گلوله ای

به تصادف بیرون آورده و آن را همراه با گلوله ای هم رنگ خودش به کیسه

برگردانده این فرایند را تکرار می کنیم. فرض کنید X_n تعداد گلوله های سفید

در کیسه بعد از استخراج m ام باشد ($n = 1, 2, \dots$)، به سادگی می توان

روابط زیر را تحقیق کرد:

$$\Pi_1 = [P(X_1 = 2), P(X_1 = 3)] = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

$$\Pi_2 = [P(X_2 = 2), P(X_2 = 3), P(X_2 = 4)]$$

$$= \Pi_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = [\frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}]$$

$$\Pi_3 = [P(X_3 = 2), P(X_3 = 3), P(X_3 = 4), P(X_3 = 5)]$$

$$= \Pi_2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = [\frac{6}{60}, \frac{12}{60}, \frac{18}{60}, \frac{24}{60}]$$

مثال ۲. گلوله هایی را متوالیاً بین چهارخانه توزیع می کنیم. فرض کنید

X برابر تعداد خانه های خالی بعد از توزیع n گلوله باشد. تابع توزیع احتمال

می‌دهیم و در این صورت رابطه (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi_n = \Pi \cdot P^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

مثالهای ۱ و ۲ با این حالت مطابقت می‌کنند یعنی ناهمگن زمانی‌اند.

اگر زنجیر مارکف همگن باشد، ماتریس احتمال تغییر وضعیت را با P نشان

مراجع

- [2] J. Higgins, "Concepts in Probability and Stochastic Modeling," Duxbury Press (1995).
[3] P. Gordon, "Theorie des Chaines de Markov finies" Dunod, Paris (1965).

[۱] نظریه مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی - ترجمه ابوالقاسم میامی، محمدقاسم وحیدی اصل از انتشارات دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.

آمار و سازمانهای آماری

سکنه کشورهای تحت فرمان آنها در دست است. (همان کتاب). پس احصائیه نفوس یا شمارش منابع مالیات‌بندی اصولاً توسط دستگاههای حکومتی و به منظور کسب اطلاعات لازم برای اداره امور جاری کشور بوده و بیشتر جنبه توصیفی و عملی داشته است. این کار معمولاً در چهارچوب دستگاههای دیوانی، مانند دستگاههای جنگی و دیوانهای مالیات یا دیگر امور کشوری، برای تنظیم و ترتیب دفاتر محاسباتی خود آنها انجام می‌گرفته است.

اما پیدایش علم آمار و ایجاد سازمانهای آمارگیری منظم را باید پدیده‌ای دانست که همراه با رشد تدریجی علوم و فنون جدید و تشکیل دولتهای نوین در کشورهای اروپائی شکل گرفته است، زیرا نخستین بار در کشورهای اروپائی بود که ثبت وقایع اجتماعی، علی‌الخصوص وقایع مربوط به جمعیت و اقتصاد، صورت منظم پیدا کرد. مثلاً ثبت وقایع مربوط به تولد و ازدواج و مرگ نخستین بار در برخی از مناطق اروپا مانند اوکسبورگ (۱۵۱۰) و لندن (۱۰۱۷) شروع شد. سپس این کار در غالب کشورهای پیشرفته اروپا مانند فرانسه (۱۵۷۹-۱۵۳۹) و انگلیس (قبل از ۱۵۴۷) و هلند (۱۵۹۰) عمومیت یافت و از آنجا به آمریکای شمالی (۱۶۳۸) کشیده شد (دایرةالمعارف علوم اجتماعی). در اواسط قرن هفدهم سرشماری ادواری شبیه به آنچه امروز معمول است آغاز شد و در قرن نوزدهم میلادی توجهی خاص به این امر مبذول گردید [دایرةالمعارف فارسی].

به نقل از دانشنامه ایران و اسلام، ۱، بنگاه ترجمه و نشر کتاب، تهران، ۱۳۵۶.

فرهنگهای فارسی در معنای ریشه‌ای اصطلاح «آمار» متفق القول‌اند و عموماً آن را از ریشه پهلوی و به معنای «محاسبه» و «شماره» ضبط کرده‌اند. به عنوان مثال [فرهنگ رشیدی] متعلق به ۱۰۶۴ می‌نویسد: آمار، یعنی «حساب، و آمارگیر یعنی محاسب، و آماره نیز آمده»، و از لیبی، شاعر اواخر قرن چهارم و اوایل قرن پنجم بیتی را نقل می‌کند که گفته:

اگر خواهی سپاهش را شماره برون باید شد از حد اماره

دهخدا در [لغت‌نامه] آمار را به معنای شمار می‌داند و می‌نویسد که «آماره‌گیر» یعنی «نویسنده، محاسب، مستوفی». محمدمعین [برهان قاطع]، مصدر اوستائی و صورت پهلوی آن را به دست داده است.

اطلاعات تاریخی موجود نشان می‌دهد که این حسابگرها و شمارشها بیشتر در امور لشکری و کشوری بوده و دامنه آنها به تدریج چنان وسعتی یافته که مشتقات دیگری از ریشه «آمار» در زبان فارسی پدید آمده است. مثلاً کلمه «شاهامار»، به معنای سرشماری سلطنتی، در نوشته‌های رسمی عهد هخامنشی و اشکانی دیده شده ([اسامی دهات کشور])، از اطلاعاتی که گزنفون و هرودت درباره عدد سپاهان هخامنشی، شیوه سرشماری آنها، تعداد ولایات و ترتیب تنظیم مالیاتهای آنها می‌دهند [تاریخ ایران باستان] پیداست که کاربرد اداری و نظامی آمار برای به دست آوردن احصائیه نفوس و منابع مالیات بندی و تنظیم دخل مملکت [دایرةالمعارف فارسی] در ایران و خارج از ایران سابقه طولانی داشته است. از مصریهای قدیم (حدود ۳۰۵۰ ق م) و بابلیها و رومیها مدارکی مشتمل بر اطلاعات تفصیلی در باب