

آزمون نسبت درستنمایی

و

نابرابریهای بین میانگینهای حسابی، هندسی و همساز

احمد پارسیان*

مقدمه

اغلب خوانندگان با آزمون نسبت درستنمایی آشنا هستند. می‌خواهیم با استفاده از این آزمون، نابرابریهای موجود بین میانگینهای حسابی، هندسی، و همساز را ثابت کنیم.

نابرابری بین میانگینهای حسابی و هندسی

فرض کنید $Y_1, \dots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای نمایی به ترتیب با چگالیهای

$$f(y_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i y_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad y_i > 0, \quad \lambda_i > 0$$

باشند. در آزمون فرض

$$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$$

در برابر این فرض مقابل که لااقل یک زوج از مقادیر λ_i با هم نابرابرند، می‌توان به سادگی تحقیق کرد که آماره آزمون نسبت درستنمایی، λ ، برابر است با

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{L(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)}{L(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)} \\ &= \frac{(\bar{Y})^{-n} e^{-n}}{(\prod_{i=1}^n Y_i)^{-1} e^{-n}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n Y_i}{(\bar{Y})^n} \end{aligned}$$

اما با توجه به اینکه می‌دانیم $\lambda \leq 1$ معلوم می‌شود که

$$\bar{Y} > \left(\prod_{i=1}^n Y_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

نابرابری میانگینهای هندسی و همساز

می‌دانیم که نابرابری میانگینهای هندسی و همساز از جایگذاری Y_i با $\frac{1}{X_i}$ در نابرابری به دست آمده برای میانگینهای حسابی و هندسی حاصل می‌شود. بنابراین در به کارگیری خاصیت آزمونهای نسبت درستنمایی، فرض کنید $X_i = \frac{1}{Y_i}$ ، $i = 1, \dots, n$ ، و $Y_i \sim E(\lambda_i)$ ، در این صورت X_i دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{\lambda_i}{x_i^2} e^{-\lambda_i/x_i}, \quad x_i > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

برای آزمون مجدد فرضهای آماری ذکر شده بر پایه $X_1, \dots, X_n$ ، به سادگی معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left\{ n / \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \right\}^n (\prod_{i=1}^n X_i!)^{-1} e^{-n}}{(\prod_{i=1}^n X_i) (\prod_{i=1}^n X_i!)^{-1} e^{-n}} \\ &= \frac{\left\{ n / \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \right\}^n}{(\prod_{i=1}^n X_i)} \end{aligned}$$

حال با توجه به $\lambda \leq 1$ نتیجه می‌شود که

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

مراجع

- [1] Stefanski, L. A. *The American Statistician*, No. 3, Vol. 50, 1996.

(*) دکتر احمد پارسیان، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان